Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

И. В. Курбатова

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, ПОРОЖДЕННОЕ КВАДРАТИЧНЫМ ОПЕРАТОРНЫМ ПУЧКОМ

Квадратичным пучком называют функцию

$$\lambda \mapsto \lambda^2 E + \lambda F + H$$

комплексного параметра λ. Здесь E, F и H – линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y. *Спектром* пучка называют множество $\sigma(E, F, H)$ тех λ, для которых оператор $\lambda^2 E + \lambda F + H$ не имеет обратного, а *резольвентой* – семейство $R_\lambda = (\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1}$, $\lambda \notin \sigma(E, F, H)$. Рассмотрим отображение

$$\psi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma f(\lambda)(\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1}\, d\lambda,$$

где f – аналитическая функция, а жорданов контур Γ окружает спектр пучка. Очевидно, ψ переводит сумму функций в сумму соответствующих операторов, но, как нетрудно показать, произведение функций отображение ψ в произведение соответствующих операторов, как правило, не переводит (более того, если $X \neq Y$, то произведение операторов, действующих из X в Y, вообще не определено). Аналогичная проблема возникает уже в случае линейного пучка $\lambda \mapsto \lambda F - G$. Ее решению посвящена статья [6].

Один из естественных подходов к анализу квадратичного пучка состоит в рассмотрении линейного матричного пучка, порожденного рассматриваемым квадратичным пучком. Для линейного пучка тождество Гильберта и аналог отображения ψ использовались многими авторами; в [6] на замыкании линейной оболочки резольвентного множества линейного пучка определено произведение и показано, что

Ключевые слова: пучок второго порядка, функциональное исчисление, банахова алгебра, псевдорезольвента, операторная экспонента.

Работа поддержана грантом 10-01-00276 Российского Фонда Фундаментальных Исследований.

функциональное исчисление переводит произведение функций в произведение операторов из этой линейной оболочки. Тождество Гильберта и свойства функционального исчисления для квадратичного пучка получаются как следствия аналогичных результатов для линейного матричного пучка.

Однако при рассмотрении линейного матричного пучка размера 2×2, построенного по квадратичному пучку, оказывается, что достаточно рассматривать только элементы второго столбца. Другими словами, оказывается, что одновременно с отображением ψ достаточно рассмотреть еще одно отображение

$$\chi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \lambda f(\lambda)(\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1}\, d\lambda,$$

а также векторное отображение $\Upsilon = (\psi, \chi)$. В результате на замыкании $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ линейной оболочки всевозможных пар $(R_\lambda, \lambda R_\lambda)$, $\lambda \notin \sigma(E,F,H)$, (это подпространство является областью значений отображения Υ) можно рассмотреть умножение

$$(A_1, A_2) \boxdot (B_1, B_2) = (A_2EB_1 + A_1FB_1 + A_1EB_2,\ A_2EB_2 - A_1HB_1),$$

которое превращает $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ в банахову алгебру (теорема 5). При этом отображение Υ переводит произведение функций в $\boxdot$-произведение соответствующих операторов (теоремы 12 и 13).

В качестве приложения описывается (теорема 16) представление решения дифференциального уравнения $E\ddot{u} + F\dot{u} + Hu = f$ в терминах операторов $\psi(\exp_t)$ и $\chi(\exp_t)$, где $\exp_t(\lambda) = e^{\lambda t}$. Обсуждаются вопросы (следствие 18 и предложение 20), связанные с приближенным вычислением операторов $\psi(\exp_t)$ и $\chi(\exp_t)$.

§1. Псевдорезольвенты в банаховых алгебрах

Аналитическое функциональное исчисление [4, 9, 12] можно построить, имея в распоряжении только максимальную псевдорезольвенту, принимающую значения в банаховой алгебре. Соответствующая конструкция из [12] в удобной для наших целей форме напоминается в настоящем параграфе.

В терминологии, связанной с (комплексными банаховыми) алгебрами, мы придерживаемся монографий [4, 9, 12].

Единицу в алгебре $\mathbf{B}$ будем обозначать символом $\mathbf{1} \in \mathbf{B}$.

Пусть $\mathbf{B}$ – алгебра без единицы. Символом $\widetilde{\mathbf{B}}$ будем обозначать алгебру $\mathbf{B}$ с присоединенной единицей $\mathbf{I}$. *Спектром* (*резольвентой*) элемента алгебры без единицы называют спектр (резольвенту) этого элемента в алгебре с присоединенной единицей. Если $\mathbf{B}$ содержит единицу, то под алгеброй $\widetilde{\mathbf{B}}$ будем понимать саму алгебру $\mathbf{B}$, а под $\mathbf{I}$ – элемент $\mathbf{1}$.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – алгебры. Отображение $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ называют [4] *морфизмом алгебр*, если $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, $\varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A)$ и $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ содержат единицы и $\varphi(\mathbf{1_A}) = \mathbf{1_B}$, то говорят, что φ – *морфизм алгебр с единицей.*

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – алгебры, причем $\mathbf{A}$ не имеет единицы. Очевидно, для любого морфизма алгебр $\varphi\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ единственным расширением до морфизма алгебр с единицей $\tilde{\varphi}\colon \widetilde{\mathbf{A}} \to \widetilde{\mathbf{B}}$ является отображение $\tilde{\varphi}(\alpha\mathbf{I} + A) = \alpha\mathbf{I} + \varphi(A)$.

Пусть $\mathbf{B}$ – банахова алгебра и $G \subseteq \mathbb{C}$ – непустое подмножество. *Псевдорезольвентой* (на G со значениями в $\mathbf{B}$) называют [12, глава 5, § 2, с. 201] функцию (семейство) $\lambda \mapsto R_\lambda$, определенную на G, принимающую значения в $\mathbf{B}$ и удовлетворяющую *тождеству Гильберта*

$$R_\lambda - R_\mu = -(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu, \qquad \lambda, \mu \in G. \tag{1}$$

Псевдорезольвенту называют [2] *максимальной*, если она не может быть расширена на более широкое множество с сохранением тождества (1). Простейший пример максимальной псевдорезольвенты – резольвента $R_\lambda = (\lambda\mathbf{I} - A)^{-1}$ элемента $A \in \mathbf{B}$.

Теорема 1 ([12, теорема 5.8.6]). *Всякая псевдорезольвента единственным образом продолжается до максимальной. Областью определения максимальной псевдорезольвенты является множество всех* $\lambda \in \mathbb{C}$, *при которых элемент* $\mathbf{I} + (\lambda-\mu)R_\mu$ *обратим в* $\widetilde{\mathbf{B}}$. *Это продолжение имеет вид*

$$R_\lambda = R_\mu\bigl(\mathbf{I} + (\lambda-\mu)R_\mu\bigr)^{-1}.$$

Область определения максимальной псевдорезольвенты является открытым множеством, а псевдорезольвента – аналитической функцией.

Область определения $\rho(R_{(\cdot)})$ максимального продолжения псевдорезольвенты назовем *регулярным множеством* исходной псевдорезольвенты, а дополнение $\sigma(R_{(\cdot)})$ к $\rho(R_{(\cdot)})$ – *сингулярным множеством. Расширенным регулярным множеством* $\bar{\rho}(R_{(\cdot)})$ псевдорезольвенты $R_{(\cdot)}$

назовем регулярное множество $\rho(R_{(\cdot)})$, к которому добавим точку $\lambda = \infty$, если и только если алгебра $\mathbf{B}$ содержит единицу $\mathbf{1}$, максимальное продолжение псевдорезольвенты допускает аналитическое продолжение в точку $\lambda = \infty$ и $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda = \mathbf{1}$. Дополнение $\bar\sigma(R_{(\cdot)})$ к расширенному регулярному множеству назовем [1], [2, с. 8] *расширенным сингулярным множеством.*

Пусть K – замкнутое подмножество расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим символом $\mathbf{O}(K)$ множество всех аналитических[1] функций $f\colon U \to \mathbb{C}$, каждая из которых определена в некоторой открытой окрестности U множества K. Очевидно, множество $\mathbf{O}(K)$ является коммутативной алгеброй с единицей $u(\lambda) = 1$ относительно поточечных операций.

Контур Γ называют [12, с. 183] *ориентированной огибающей* замкнутого множества $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *относительно* замкнутого множества $K_1 \subseteq \overline{\mathbb{C}}$, где $K \cap K_1 = \emptyset$, если при проходе вдоль контура Γ множество K остается слева, а множество K_1 – справа.

Теорема 2. *Пусть $R_{(\cdot)}$ – максимальная псевдорезольвента, причем $\infty \in \bar\rho(R_{(\cdot)})$. Тогда отображение $\varphi\colon \mathbf{O}\big(\sigma(R_{(\cdot)})\big) \to \mathbf{B}$, определенное по формуле*

$$\varphi(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\lambda) R_\lambda\, d\lambda,$$

где Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей сингулярного множества $\sigma(R_{(\cdot)})$ относительно точки ∞ и дополнения к области определения функции f, является морфизмом алгебр с единицей. В частности, функция $u(\lambda) = 1$ переводится морфизмом φ в единицу $\mathbf{1}$ алгебры $\mathbf{B}$. При этом функция $r_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$, где $\lambda_0 \in \rho(R_{(\cdot)})$, переводится морфизмом φ в R_{λ_0}.

Доказательство. Повторяет обычные рассуждения при доказательстве теорем о функциональном исчислении [4, гл. 1, § 4, теорема 3], [9, теорема 10.27], [12, теорема 5.2.5]. $\square$

Теорема 3. *Пусть $R_{(\cdot)}$ – максимальная псевдорезольвента, причем $\infty \in \bar\sigma(R_{(\cdot)})$. Тогда отображение $\varphi\colon \mathbf{O}\big(\bar\sigma(R_{(\cdot)})\big) \to \widetilde{\mathbf{B}}$, определенное по*

[1]Функцию f называют [7, с. 36] *аналитической* в бесконечно удаленной точке, если функция $\mu \mapsto f(1/\mu)$ является аналитической в нуле.

формуле

$$\varphi(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} f(\lambda)R_\lambda\,d\lambda+f(\infty)\mathbf{I},$$

где Γ *– контур, являющийся ориентированной огибающей расширенного сингулярного множества* $\bar\sigma(R_{(\cdot)})$ *относительно дополнения к области определения функции* f*, является морфизмом алгебр с единицей. В частности, функция* $u(\lambda)=1$ *переводится морфизмом* φ *в присоединенную единицу* $\mathbf{I}$ *алгебры* $\widetilde{\mathbf{B}}$*. Функция* $r_{\lambda_0}(\lambda)=\frac{1}{\lambda_0-\lambda}$*, где* $\lambda_0\in\rho(R_{(\cdot)})$*, переводится морфизмом* φ *в* R_{λ_0}*.*

Доказательство. Рассуждения аналогично доказательству теоремы 5.11.2 в [12]. $\square$

§2. $\boxdot$-УМНОЖЕНИЕ

Этот параграф является основным в статье. В нем описывается банахова алгебра с $\boxdot$-умножением (теорема 5) и функциональное исчисление в ней (теоремы 12 и 13).

Пусть X и Y – комплексные банаховы пространства. Символом $\mathbf{B}(X,Y)$ будем обозначать множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y. (*Квадратичным операторным*) *пучком* называют [8] функцию

$$\lambda\mapsto\lambda^2E+\lambda F+H\in\mathbf{B}(X,Y),\qquad\lambda\in\mathbb{C},$$

где $E,F,H\in\mathbf{B}(X,Y)$. *Резольвентным множеством* пучка называют множество $\rho(E,F,H)$, состоящее из тех $\lambda\in\mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda^2E+\lambda F+H\colon X\to Y$ обратим, а *резольвентой* – функцию (семейство)

$$R_\lambda=(\lambda^2E+\lambda F+H)^{-1}\in\mathbf{B}(Y,X),\qquad\lambda\in\rho(E,F,H).$$

Дополнение $\sigma(E,F,H)$ к $\rho(E,F,H)$ называют *спектром* пучка.

Хорошо известно, что дифференциальное уравнение второго порядка может быть сведено к системе двух уравнений первого порядка. Аналогичным образом исследование квадратичного пучка $\lambda\mapsto\lambda^2E+\lambda F+H$ может быть сведено (подробнее см., например, [8]) к исследованию линейного матричного пучка

$$\lambda\mapsto\lambda\mathcal{F}-\mathcal{G}\colon X\oplus X\to X\oplus Y,$$

где

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&E\end{pmatrix},\qquad\mathcal{G}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\-H&-F\end{pmatrix}.$$

Для линейного пучка $\lambda \mapsto \lambda\mathcal{F}-\mathcal{G}$ рассмотрим резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda\mathcal{F}-\mathcal{G})^{-1}$; очевидно, эта резольвента удовлетворяет $\mathcal{F}$-тождеству Гильберта $\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu = -(\lambda-\mu)\mathcal{R}_\lambda\mathcal{F}\mathcal{R}_\mu$.

В [6] предложена конструкция функционального исчисления для произвольного линейного пучка, которая в случае пучка $\lambda \mapsto \lambda\mathcal{F}-\mathcal{G}$ приводит к следующему. На замыкании $\mathbf{B}_{(\mathcal{F},\mathcal{G})}(X\oplus Y, X\oplus X)$ в пространстве $\mathbf{B}(X\oplus Y, X\oplus X)$ линейной оболочки всех значений резольвенты $\mathcal{R}_\lambda = (\lambda\mathcal{F}-\mathcal{G})^{-1}$ следует ввести умножение

$$\mathcal{A}\odot\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{F}\mathcal{B},$$

называемое $\mathcal{F}$-умножением. Тогда тождество Гильберта записывается в виде

$$\mathcal{R}_\lambda - \mathcal{R}_\mu = -(\lambda-\mu)\mathcal{R}_\lambda\odot\mathcal{R}_\mu. \tag{2}$$

$\mathcal{F}$-умножение превращает $\mathbf{B}_{(\mathcal{F},\mathcal{G})}(X\oplus Y, X\oplus X)$ в банахову алгебру. При этом отображение

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\lambda)(\lambda\mathcal{F}-\mathcal{G})^{-1}\,d\lambda$$

сохраняет $\mathcal{F}$-произведение:

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\odot\Phi(g).$$

Нетрудно показать, что резольвента матричного пучка допускает представление

$$\mathcal{R}_\lambda = (\lambda\mathcal{F}-\mathcal{G})^{-1} = \begin{pmatrix}\lambda R_\lambda E + R_\lambda F & R_\lambda\\ -R_\lambda H & \lambda R_\lambda\end{pmatrix}, \tag{3}$$

из которого видно, что элементы первого столбца матрицы $\mathcal{R}_\lambda$ являются линейными комбинациями элементов второго столбца (с коэффициентами E, F и H). Следовательно, матрицы, принадлежащие алгебре $\mathbf{B}_{(\mathcal{F},\mathcal{G})}(X\oplus Y, X\oplus X)$, восстанавливаются по своим вторым столбцам, и тем самым второй столбец можно использовать в качестве представления для элементов алгебры $\mathbf{B}_{(\mathcal{F},\mathcal{G})}(X\oplus Y, X\oplus X)$. Это представление берется в качестве основного в дальнейшем изложении. Такой подход позволяет уменьшить длину формул в два раза. Кроме того, он позволяет рассуждать непосредственно в терминах исходного дифференциального уравнения второго порядка, а не эквивалентной ему системы уравнений первого порядка (отметим аналогию: дифференциальное уравнение типа $y''+y=0$ можно решать путем сведения к системе двух уравнений, нахождения собственных значений и собственных векторов, построения решения системы и возврата к исходному дифференциальному уравнению; а можно, найдя корни характеристического уравнения, сразу выписать решение).

Перейдем к подробному изложению. Пусть

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_3 & A_1 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{B}_{(\mathcal{F},\mathcal{G})}(X \oplus Y, X \oplus X).$$

Из (3) следует, что

$$A_3 = A_2 E + A_1 F, \quad A_4 = -A_1 H. \tag{4}$$

Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbf{B}_{(\mathcal{F},\mathcal{G})}(X \oplus Y, X \oplus X)$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_3 & A_1 \\ A_4 & A_2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_3 & B_1 \\ B_4 & B_2 \end{pmatrix}$. Учитывая представление (4) для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, получим, что элементы второго столбца матрицы $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ равны $A_2EB_1 + A_1FB_1 + A_1EB_2$ и $A_2EB_2 - A_1HB_1$. Обозначим через $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ замыкание по норме в прямой сумме $\mathbf{B}(Y,X) \oplus \mathbf{B}(Y,X)$ [2] линейной оболочки всех пар $(R_\lambda, \lambda R_\lambda)$, где $\lambda \in \rho(E,F,H)$. Введем в пространстве $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ $\boxdot$-умножение по формуле

$$(A_1, A_2) \boxdot (B_1, B_2) = (A_2EB_1 + A_1FB_1 + A_1EB_2,\ A_2EB_2 - A_1HB_1).$$

Символами типа $A^{k\boxdot}$ и $A^{-1\boxdot}$ будем обозначать степени и обратные относительно этого умножения.

Следствие 4. *Семейство $\mathfrak{R}_\lambda = (R_\lambda, \lambda R_\lambda)$, $\lambda \in \rho(E,F,H)$, удовлетворяет $\boxdot$-тождеству Гильберта*

$$\mathfrak{R}_\lambda - \mathfrak{R}_\mu = -(\lambda - \mu)\mathfrak{R}_\lambda \boxdot \mathfrak{R}_\mu. \tag{5}$$

Доказательство вытекает из определения $\boxdot$-умножения, тождества Гильберта (2) и равенства (3). □

Теорема 5. *Пространство $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ является коммутативной банаховой алгеброй относительно $\boxdot$-умножения. Эта алгебра содержит единицу тогда и только тогда, когда оператор E обратим; при этом единицей является пара $\mathbf{1} = \mathbf{1}_\boxdot = (\mathbf{0}, E^{-1})$.*

---

[2] Для определенности будем считать, что норма на $\mathbf{B}(Y,X) \oplus \mathbf{B}(Y,X)$ задана формулой $\|(A_1, A_2)\| = \|A_1\| + \|A_2\|$.

Если алгебра $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ содержит единицу, то в качестве нормы можно взять функцию

$$\begin{aligned}\|(A_1,A_2)\| = \sup\big\{\big\|(A_1,A_2)\boxdot(B_1,B_2)\big\|_{\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)}:\\ \big\|(B_1,B_2)\big\|_{\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)}\le 1,\\ (B_1,B_2)\in\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)\big\}.\end{aligned}\tag{6}$$

Если алгебра $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ не содержит единицы, то в качестве нормы можно взять функцию

$$\begin{aligned}\|(A_1,A_2)\| = \sup\big\{\big\|\beta(A_1,A_2)+(A_1,A_2)\boxdot(B_1,B_2)\big\|_{\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)}:\\ |\beta|+\big\|(B_1,B_2)\big\|_{\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)}\le 1,\quad \beta\in\mathbb{C},\\ (B_1,B_2)\in\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)\big\}.\end{aligned}\tag{7}$$

Обе эти нормы эквивалентны исходной норме пространства $\mathbf{B}(Y,X)\oplus\mathbf{B}(Y,X)$.

Доказательство. Проверка того, что $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ является алгеброй, почти очевидна. Дистрибутивность умножения проверяется непосредственно, ассоциативность и коммутативность умножения следуют из тождества Гильберта (5).

Если оператор E обратим, то легко проверяется, что $\mathbf{1}_{\boxdot}=(\mathbf{0},E^{-1})$ является единицей. Докажем обратное. Предположим, что существует единица (I_1,I_2). Умножим ее слева на пару $(R_\lambda,\lambda R_\lambda)$, где $\lambda\in\rho(E,F,H)$:

$$\begin{aligned}\lambda R_\lambda EI_1+R_\lambda FI_1+R_\lambda EI_2&=R_\lambda,\\ \lambda R_\lambda EI_2-R_\lambda HI_1&=\lambda R_\lambda.\end{aligned}$$

Сократим на обратимый оператор R_λ:

$$\begin{aligned}\lambda EI_1+FI_1+EI_2&=\mathbf{1}_Y,\\ \lambda EI_2-HI_1&=\lambda\mathbf{1}_Y.\end{aligned}$$

Из этих двух равенств, в частности, следует, что

$$(\lambda^2E+\lambda F+H)I_1=\mathbf{0}.$$

Так как оператор $\lambda^2E+\lambda F+H$ обратим, то $I_1=\mathbf{0}$. Следовательно, $EI_2=\mathbf{1}_Y$. Теперь умножим единицу $(\mathbf{0},I_2)$ на пару $(R_\lambda,\lambda R_\lambda)$ справа, получим, что $I_2ER_\lambda=R_\lambda$, откуда $I_2E=\mathbf{1}_X$. Таким образом, $I_2=E^{-1}$.

Проверка аксиом нормы для функций (6) и (7) проводится непосредственно. □

Предложение 6. *Семейство* $\mathfrak{R}_\lambda$, $\lambda \in \rho(E,F,H)$, *является максимальной* $\boxdot$*-псевдорезольвентой, т.е. не может быть продолжено на более широкое множество с сохранением* $\boxdot$*-тождества Гильберта* (5).

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\mu \in \rho(E,F,H)$. Предположим противное: пусть резольвенту $\mathfrak{R}_{(\cdot)}$ можно продолжить в точку $\lambda \notin \rho(E,F,H)$ с сохранением тождества Гильберта. Обозначим продолжение резольвенты в точку λ через (A_1,A_2) и $\boxdot$-умножим (A_1,A_2) на $\mathfrak{R}_\mu = (R_\mu, \mu R_\mu)$ слева. Применяя $\boxdot$-тождество Гильберта, получим, что $A_2 = \lambda A_1$ и что A_1 является правым обратным к $\lambda^2 E + \lambda F + H$. Затем $\boxdot$-умножим $(A_1, \lambda A_1)$ на $\mathfrak{R}_\mu$ справа. После применения $\boxdot$-тождества Гильберта получим, что A_1 является левым обратным к $\lambda^2 E + \lambda F + H$. Следовательно, λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(E,F,H)$. В силу следствия 4 $\boxdot$-тождество Гильберта выполняется во всех точках множества $\rho(E,F,H)$. □

Предложение 7. *В окрестности любой точки* $\mu \in \rho(E,F,H)$ $\boxdot$*-псевдорезольвента* $\mathfrak{R}_\lambda = (R_\lambda, \lambda R_\lambda)$ *квадратичного пучка раскладывается в степенной ряд*

$$\mathfrak{R}_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \mathfrak{R}_\mu^{n+1\boxdot}.$$

Доказательство. Это частный случай теоремы 5.8.2 в [12]. □

Предложение 8. *Пусть* $\boxdot$*-псевдорезольвента* $\mathfrak{R}_{(\cdot)}$ *допускает аналитическое продолжение в кольцо* $0 \le \gamma_1 < |\lambda| < \gamma_2 \le \infty$. *Тогда существуют такие элементы* $\Pi, A, N \in \mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$, *что* $\Pi^{2\boxdot} = \Pi$, $N \boxdot \Pi = \Pi \boxdot N = \mathbf{0}$, $A \boxdot \Pi = \Pi \boxdot A = A$,

$$\mathfrak{R}_\lambda = \mathfrak{R}_\lambda^0 + \mathfrak{R}_\lambda^1, \qquad \gamma_1 < |\lambda| < \gamma_2,$$

где

$$\mathfrak{R}_\lambda^0 = \frac{\Pi}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \frac{A^{2\boxdot}}{\lambda^3} + \frac{A^{3\boxdot}}{\lambda^4} + \dots = \Pi \boxdot (\lambda \mathbf{1} - A)^{-1\boxdot}, \quad \gamma_1 < |\lambda|,$$
$$\mathfrak{R}_\lambda^1 = -N - \lambda N^{2\boxdot} - \lambda^2 N^{3\boxdot} - \dots = N \boxdot (\lambda N - \mathbf{1})^{-1\boxdot}, \quad |\lambda| < \gamma_2.$$

Если $\gamma_2 = \infty$, *то* $\sigma_{\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)}(N) = 0$.

Доказательство. Это частный случай теоремы 5.9.3 в [12]. $\square$

Следствие 9. *Пусть $\boxdot$-псевдорезольвента $\mathfrak{R}_{(\cdot)}$ допускает аналитическое продолжение в окрестность точки ∞. Тогда ее разложение в ряд Лорана в окрестности бесконечности имеет вид*

$$\mathfrak{R}_\lambda = N + \frac{\Pi}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \frac{A^{2\boxdot}}{\lambda^3} + \frac{A^{3\boxdot}}{\lambda^4} + \cdots,$$

где $N, \Pi, A \in \mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ – некоторые элементы, обладающие свойствами

$$N^{2\boxdot} = \mathbf{0}, \quad \Pi^{2\boxdot} = \Pi, \quad N \boxdot \Pi = \Pi \boxdot N = \mathbf{0}, \quad A \boxdot \Pi = \Pi \boxdot A = A.$$

Доказательство. Это частный случай теоремы 5.9.2 в [12]. $\square$

Предложение 10. *Пусть оператор E обратим. Тогда $\boxdot$-псевдорезольвента $\mathfrak{R}_{(\cdot)}$ совпадает с обычной резольвентой $\lambda \mapsto \big(\lambda \mathbf{1}_\boxdot - A\big)^{-1\boxdot}$ элемента $A = (E^{-1}, -E^{-1}FE^{-1})$ в алгебре $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$.*

Доказательство. Поскольку оператор E обратим, резольвента $R_\lambda = (\lambda^2 E + \lambda F + H)^{-1}$ является аналитической функцией в окрестности бесконечности. Первые члены ее разложения в степенной ряд в окрестности бесконечности легко получить с помощью ряда Неймана:

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda^2}E^{-1} - \frac{1}{\lambda^3}E^{-1}FE^{-1} + \cdots,$$

откуда (см. также замечание 3)

$$\mathfrak{R}_\lambda = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{0}, E^{-1}) + \frac{1}{\lambda^2}(E^{-1}, E^{-1}FE^{-1}) + \cdots.$$

В силу единственности разложения аналитической функции в степенной ряд это разложение совпадает с разложением из следствия 9. В нем $N = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\Pi = \mathbf{1}_\boxdot = (\mathbf{0}, E^{-1})$, $A = (E^{-1}, E^{-1}FE^{-1})$. Отсюда по предложению 6 следует, что $\boxdot$-псевдорезольвента $\mathfrak{R}_\lambda$ совпадает с резольвентой элемента $A = (E^{-1}, -E^{-1}FE^{-1})$ всюду. $\square$

В случае, когда оператор E необратим, обозначим через $\widetilde{\mathbf{B}}_{(E,F,H)}(Y,X)$ алгебру $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$ с присоединенной единицей $\mathbf{I}$. В случае, когда E обратим, под $\widetilde{\mathbf{B}}_{(E,F,H)}(Y,X)$ будем понимать саму алгебру $\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$, а под $\mathbf{I}$ – пару $(\mathbf{0}, E^{-1})$.

Расширенным резольвентным множеством пучка назовем подмножество $\bar{\rho}(E,F,H)$ расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, состоящее из $\rho(E,F,H)$ и, возможно, точки ∞. Точку $\lambda=\infty$ отнесем к *расширенному резольвентному множеству* $\bar\rho(E,F,H)$ пучка, если резольвента $R_\lambda=(\lambda^2E+\lambda F+H)^{-1}$ определена в проколотой окрестности точки $\lambda=\infty$, оператор E обратим и $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2R_\lambda=E^{-1}$. В противном случае точку $\lambda=\infty$ отнесем к *расширенному спектру* $\bar\sigma(E,F,H)$ пучка.

Предложение 11. *Точка ∞ принадлежит $\bar\rho(E,F,H)$ тогда и только тогда, когда оператор E обратим.*

Доказательство. Очевидно, из обратимости E вытекает включение проколотой окрестности бесконечности в резольвентное множество и соотношение $\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^2R_\lambda=E^{-1}$. $\square$

Теорема 12. *Пусть $\infty\in\bar\rho(E,F,H)$, т. е. оператор E обратим. Тогда отображение $\Upsilon=(\psi,\chi)\colon \mathbf{O}\bigl(\sigma(E,F,H)\bigr)\to\mathbf{B}_{(E,F,H)}(Y,X)$, где отображения $\psi,\chi\colon \mathbf{O}\bigl(\sigma(E,F,H)\bigr)\to\mathbf{B}(Y,X)$ определены по формулам*

$$\psi(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma f(\lambda)(\lambda^2E+\lambda F+H)^{-1}\,d\lambda, \tag{8}$$

$$\chi(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda f(\lambda)(\lambda^2E+\lambda F+H)^{-1}\,d\lambda, \tag{9}$$

а Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей сингулярного множества $\sigma(E,F,H)$ относительно точки ∞ и дополнения к области определения функции f, является морфизмом алгебр с единицей. В частности, отображения ψ и χ обладают свойствами

$$\psi(fg)=\chi(f)E\psi(g)+\psi(f)F\psi(g)+\psi(f)E\chi(g), \tag{10}$$

$$\chi(fg)=\chi(f)E\chi(g)-\psi(f)H\psi(g). \tag{11}$$

Функция $r_{\lambda_0}(\lambda)=\frac{1}{\lambda_0-\lambda}$, где $\lambda_0\in\rho(E,F,H)$, переводится отображением $\Upsilon=(\psi,\chi)$ в $\mathfrak{R}_{\lambda_0}=(R_{\lambda_0},\lambda_0R_{\lambda_0})$. Кроме того (см. также предложение 17),

$$\begin{aligned}\Upsilon(u)&=\bigl(\psi(u),\chi(u)\bigr)=\mathbf{1}_{\boxdot}=\bigl(\mathbf{0},E^{-1}\bigr),\\ \Upsilon(v)&=\bigl(\psi(v),\chi(v)\bigr)=\bigl(E^{-1},-E^{-1}FE^{-1}\bigr),\\ \Upsilon(v_2)&=\bigl(\psi(v_2),\chi(v_2)\bigr)=\bigl(-E^{-1}FE^{-1},\\ &\quad-E^{-1}HE^{-1}+E^{-1}FE^{-1}FE^{-1}\bigr),\end{aligned}$$

где $u(\lambda)=1$, $v(\lambda)=\lambda$, $v_2(\lambda)=\lambda^2$.

Доказательство. Вытекает из теоремы 2 и предложений 6 и 10. Отметим только, что

$$\Upsilon(v_2) = A^{2\boxdot} = (-E^{-1}FE^{-1}, -E^{-1}HE^{-1} + E^{-1}FE^{-1}FE^{-1}).$$

$\square$

Теорема 13. *Пусть $\infty \in \bar{\sigma}(E,F,H)$, т. е. оператор E не имеет обратного. Тогда отображение $\Upsilon\colon \mathbf{O}\bigl(\bar{\sigma}(E,F,H)\bigr) \to \widetilde{\mathbf{B}}(Y,X)$, определенное по формуле*

$$\Upsilon(f) = \bigl(\psi(f), \chi(f)\bigr) + f(\infty)\mathbf{I},$$

где отображения $\psi, \chi\colon \mathbf{O}\bigl(\bar{\sigma}(E,F,H)\bigr) \to \mathbf{B}(Y,X)$ определены по формулам (8) *и* (9)*, но Γ – контур, являющийся ориентированной огибающей расширенного спектра $\bar{\sigma}(E,F,H)$ относительно дополнения к области определения функции f, является морфизмом алгебр с единицей. В частности,*

$$\Upsilon(fg) = \Bigl(f(\infty)\psi(g) + g(\infty)\psi(f) + \chi(f)E\psi(g) + \psi(f)F\psi(g) + \psi(f)E\chi(g),$$
$$f(\infty)\chi(g) + g(\infty)\chi(f) + \chi(f)E\chi(g) - \psi(f)H\psi(g)\Bigr) + f(\infty)g(\infty)\mathbf{I}.$$

Функция $r_{\lambda_0}(\lambda) = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}$, где $\lambda_0 \in \rho(E,F,H)$, переводится морфизмом Υ в $\mathfrak{R}_{\lambda_0} = (R_{\lambda_0}, \lambda_0 R_{\lambda_0})$.

Доказательство. Вытекает из теоремы 3 и предложения 6. $\square$

§3. Операторная экспонента

Наиболее важной для приложений функцией, к которой можно применять отображения ψ и χ, является функция

$$\exp_t(\lambda) = e^{\lambda t}.$$

В этом параграфе обсуждаются свойства операторов $\psi(\exp_t)$ и $\chi(\exp_t)$, в частности (теорема 16), их использование для построения решения дифференциального уравнения второго порядка.

Следствие 14. *Пусть оператор E обратим. Тогда справедливы следующие тождества*

$$\psi(\exp_{t+s}) = \chi(\exp_t)E\psi(\exp_s) + \psi(\exp_t)F\psi(\exp_s) + \psi(\exp_t)E\chi(\exp_s),$$
$$\chi(\exp_{t+s}) = \chi(\exp_t)E\chi(\exp_s) - \psi(\exp_t)H\psi(\exp_s).$$

Доказательство. Вытекает из формул (10) и (11). $\square$

Следствие 15. *Пусть оператор E обратим. Тогда*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi(\exp_t) &= \psi(v\cdot\exp_t) = \chi(\exp_t),\\
\frac{d}{dt}\chi(\exp_t) &= \chi(v\cdot\exp_t) = -E^{-1}F\chi(\exp_t) - E^{-1}H\psi(\exp_t),\\
\frac{d^2}{dt^2}\psi(\exp_t) &= \psi(v_2\cdot\exp_t) = -E^{-1}F\chi(\exp_t) - E^{-1}H\psi(\exp_t),\\
\frac{d^2}{dt^2}\chi(\exp_t) &= \chi(v_2\cdot\exp_t) = (-E^{-1}H + E^{-1}FE^{-1}F)\chi(\exp_t)\\
&\quad + E^{-1}FE^{-1}H\psi(\exp_t),
\end{aligned}$$

где $v(\lambda)=\lambda$, $v_2(\lambda)=\lambda^2$.

Доказательство вытекает из формулы для производной скалярной функции $\mu\mapsto\exp\mu t$ и теоремы 12. □

Теорема 16. *Пусть оператор E обратим. Тогда решение начальной задачи*

$$\begin{aligned}
E\ddot{x}(t) + F\dot{x}(t) + Hx(t) &= f(t), \qquad t\geq 0,\\
x(0) &= x_0,\\
\dot{x}(0) &= x_1,
\end{aligned}$$

где $x_0, x_1\in X$, представимо в виде

$$x(t) = \chi(\exp_t)\cdot Ex_0 + \psi(\exp_t)\cdot(Ex_1 + Fx_0) + \int_0^t \psi(\exp_{t-s})f(s)\,ds. \quad (12)$$

Доказательство. Проверим, что функция (12) удовлетворяет начальной задаче. В соответствии со следствием 15 вычислим производные:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = {}&-E^{-1}F\cdot\chi(\exp_t)\cdot Ex_0 - E^{-1}H\cdot\psi(\exp_t)\cdot Ex_0\\
&+ \chi(\exp_t)\cdot(Ex_1 + Fx_0) + \int_0^t \chi(\exp_{t-s})f(s)ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) = {} & E^{-1}FE^{-1}F \cdot \chi(\exp_t) \cdot Ex_0 + E^{-1}FE^{-1}H \cdot \psi(\exp_t)Ex_0 \\
& - E^{-1}H \cdot \chi(\exp_t) \cdot Ex_0 \\
& - E^{-1}F \cdot \chi(\exp_t) \cdot (Ex_1 + Fx_0) \\
& - E^{-1}H \cdot \psi(\exp_t) \cdot (Ex_1 + Fx_0) + E^{-1}f(t) \\
& + \int\limits_0^t \Big(-E^{-1}F\chi(\exp_{t-s}) - E^{-1}H\psi(\exp_{t-s})\Big) f(s)ds.
\end{aligned}$$

Подставив полученные равенства в уравнение, убедимся, что $x(t)$ удовлетворяет ему. Также очевидно, что для $x(t)$ выполнены начальные условия. □

Замечание 1. Аналоги следствия 14 и теоремы 16 для случая $E = \mathbf{1}$ и коммутирующих (неограниченных) F и H имеются в [5, с. 29 и с. 45]. В [5] они формулируются в терминах функций M и N, которые в наших обозначениях могут быть представлены в виде

$$M(t) = \chi(\exp_t)E + \psi(\exp_t)F, \qquad N(t) = \psi(\exp_t).$$

В последующих предложениях приводится ряд формул, которые могут оказаться полезными для построения приближенных решений [10, 11] дифференциальных уравнений второго порядка.

Предложение 17. *Пусть оператор E обратим, а f – целая функция, разложение которой в ряд Маклорена имеет вид*

$$f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \cdots .$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\psi(f) &= \mathbf{0} + c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 + \cdots , \\
\chi(f) &= c_0V_1 + c_1V_2 + c_2V_3 + \cdots ,
\end{aligned}$$

где V_k вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}
V_1 &= E^{-1}, \\
V_2 &= -E^{-1}FE^{-1}, \\
V_3 &= -E^{-1}HE^{-1} + E^{-1}FE^{-1}FE^{-1}, \\
V_k &= -E^{-1}HV_{k-2} - E^{-1}FV_{k-1}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Формула для χ является очевидным следствием формулы для ψ.

Формулы для V_1, V_2 и V_3 получены в теореме 12. Формула для V_k получается в результате подстановки в формулу (11) $f(\lambda) = \lambda$ и $g(\lambda) = \lambda^{k-2}$. $\square$

Замечание 2. Опишем словами формулу для V_k, получаемую в результате применения рекуррентной формулы из предложения 17. Она представляет собой сумму, состоящую из всевозможных произведений вида $E^{-1}KE^{-1}\dots E^{-1}KE^{-1}$, где вместо K стоит либо F, либо H. Эти произведения имеют разную буквальную длину, но одинаковую "весовую длину", равную $k-1$. "Весовая длина" вычисляется по формуле: количество F плюс количество H, умноженное на 2. Знак плюс или минус перед произведением определяется количеством F и H, входящих в его состав: если их четное число, то знак плюс, если же нечетное, то – минус.

Замечание 3. Нетрудно показать, что в обозначениях предложения 10 справедлива формула $A^{k\boxdot} = (V_k, V_{k+1})$.

Следствие 18. *Пусть оператор E обратим. Тогда*

$$\psi(\exp_t) = \mathbf{0} + \frac{t}{1!}V_1 + \frac{t^2}{2!}V_2 + \frac{t^3}{3!}V_3 + \dots,$$
$$\chi(\exp_t) = V_1 + \frac{t}{1!}V_2 + \frac{t^2}{2!}V_3 + \dots,$$

где V_k определены как в предложении 17.

Предложение 19. *Пусть оператор E обратим. Тогда*

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda_1 - \lambda) &= -E^{-1},\\
\chi(\lambda_1 - \lambda) &= \lambda_1 E^{-1} + E^{-1}FE^{-1},\\
\psi((\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)E^{-1} - E^{-1}FE^{-1},\\
\chi((\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)) &= (\lambda_1 + \lambda_2)E^{-1}FE^{-1} - E^{-1}HE^{-1}\\
&\quad + \lambda_1\lambda_2 E^{-1} + E^{-1}FE^{-1}FE^{-1},\\
\psi((\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)) &= -(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3)E^{-1}\\
&\quad - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)E^{-1}FE^{-1}\\
&\quad - E^{-1}FE^{-1}FE^{-1} + E^{-1}HE^{-1}.
\end{aligned}$$

А рекуррентные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}\psi\bigl((\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_k-\lambda)\bigr)&=-\chi\bigl((\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_k-\lambda)\bigr)\\&\quad+\lambda_{k-1}\psi\bigl((\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_{k-1}-\lambda)\bigr),\\\chi\bigl((\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_k-\lambda)\bigr)&=(\lambda_k+E^{-1}F)\chi\bigl((\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_{k-1}-\lambda)\bigr)\\&\quad+E^{-1}H\psi\bigl((\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_{k-1}-\lambda)\bigr).\end{aligned}$$

Доказательство. Следует из предложения 17. □

Следующее предложение удобно для построения рациональных аппроксимаций [3, 10, 11] аналитических функций от пучка (в частности, $\psi(\exp_t)$ и $\chi(\exp_t)$). Напомним, что любую рациональную функцию можно представить в виде суммы элементарных.

Предложение 20. *Пусть* $\lambda_0\notin\rho(E,F,H)$*. Тогда*

$$\begin{gathered}\psi\left(\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\right)=R_{\lambda_0},\qquad\chi\left(\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\right)=\lambda_0R_{\lambda_0},\\\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^2}\right)=R_{\lambda_0}\Bigl(2\lambda_0E+F\Bigr)R_{\lambda_0},\\\chi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^2}\right)=-R_{\lambda_0}+\lambda_0R_{\lambda_0}\Bigl(2\lambda_0E+F\Bigr)R_{\lambda_0}.\end{gathered}$$

А рекуррентные формулы имеют вид

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^k}\right)&=R_{\lambda_0}\Bigl(2\lambda_0E+F\Bigr)\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^{k-1}}\right)\\&\quad-R_{\lambda_0}E\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^{k-2}}\right),\\\chi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^k}\right)&=-\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^{k-1}}\right)+\lambda_0\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^k}\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Первые две формулы отмечались в теоремах 12 и 13.

Из формулы (10), учитывая, что $\chi\left(\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\right)=\lambda_0R_{\lambda_0}$, получаем

$$\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^2}\right)=R_{\lambda_0}\Bigl(2\lambda_0E+F\Bigr)R_{\lambda_0}.$$

Далее имеем

$$\chi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^2}\right)=\psi\left(\frac{\lambda}{(\lambda_0-\lambda)^2}\right)=-\psi\left(\frac{1}{\lambda_0-\lambda}\right)+\lambda_0\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^2}\right)$$
$$=-R_{\lambda_0}+\lambda_0 R_{\lambda_0}(2\lambda_0 E+F)R_{\lambda_0}.$$

Выведем рекуррентную формулу. Заметим, что в силу формулы (10)

$$\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^k}\right)=R_{\lambda_0}(\lambda_0 E+F)\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^{k-1}}\right)$$
$$+R_{\lambda_0}E\chi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^{k-1}}\right). \qquad (13)$$

Аналогичным образом из формулы (11) получаем рекуррентную формулу из формулировки предложения для χ:

$$\chi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^k}\right)=\psi\left(\frac{\lambda}{(\lambda_0-\lambda)^k}\right)$$
$$=-\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^{k-1}}\right)+\lambda_0\psi\left(\frac{1}{(\lambda_0-\lambda)^k}\right).$$

Подставляя это выражение для χ в формулу (13), получаем рекуррентную формулу из формулировки предложения для ψ. $\square$

Литература

1. W. Arendt, *Approximation of degenerate semigroups.* Birkhauser–Verlag, Basel, 2001.
2. А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, *Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов.* — Матем. сборник **193** (2002), No 11, 3–42.
3. Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде.* Мир, М., 1986.
4. Н. Бурбаки., *Спектральная теория*, Мир, М., 1972.
5. В. К. Иванов, И. В. Мельникова, А. И. Филинков, *Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи.* Наука, Физматлит, М., 1995.
6. И. В. Курбатова, *Банахова алгебра, связанная с линейным операторным пучком.* — Мат. заметки **86** (2009), No 3, 394–401.
7. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного.* Наука, М., 1965.
8. А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* Штиинца, Кишинев, 1986.
9. У. Рудин, *Функциональный анализ.* Мир, М., 1975.
10. Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи.* — Мир, М., 1990.

11. Э. Хайрер, Г. Ваннер, *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи.* Мир, М., 1999.
12. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы.* ИЛ, М., 1962.

Kurbatova I. V. Functional calculus generated by a square pencil.

A linear transformation Υ is introduced that assigns an element of a special Banach algebra to each analytic function defined on the spectrum of the pencil $\lambda \mapsto \lambda^2 E + \lambda F + H$. The transformation Υ maps the product of two functions into the product of two elements of the algebra. As an application, a formula for a solution of the differential equation $E\ddot{x}(t) + F\dot{x}(t) + Hx(t) = f(t)$ is given.

Воронежский государственный технический университет, кафедра прикладной математики, Московский проспект 14, Воронеж 394026, Россия
E-mail: la_soleil@bk.ru

Поступило 26 мая 2011 г.