Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

Е. С. Дубцов

ВЕСОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВАХ ЛИПШИЦА

§1. Введение

Пусть $\mathrm{H}(\mathbb{D})$ обозначает пространство голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

1.1. Голоморфные пространства Липшица. Для $\alpha > 0$ пространство Липшица $\Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ состоит из тех функций $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$, для которых

$$|f^{(J)}(z)|(1-|z|)^{J-\alpha} \le C, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1.1}$$

где $f^{(J)}$ – производная порядка J, J – целое число такое, что $J > \alpha$. Хорошо известно, что определение пространства $\Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ не зависит от выбора числа J при $J > \alpha$. В действительности оценка (1.1) (в которой $J \in \mathbb{Z}_+$ и $J > \alpha$) определяет шкалу $\Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ для всех вещественных, а не только для положительных α. Итак, $\Lambda^0(\mathbb{D})$ – это классическое пространство Блоха; $\Lambda^\alpha(\mathbb{D})$, $\alpha < 0$, является пространством роста.

Если $\alpha \in \mathbb{R}$, $J \in \mathbb{Z}_+$ и $J > \alpha$, то $\Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ – банахово пространство относительно следующей нормы:

$$\|f\|_{\Lambda^{\alpha,J}(\mathbb{D})} = \sum_{j=0}^{J-1} |f^{(j)}(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f^{(J)}(z)|(1-|z|)^{J-\alpha}.$$

При разных $J > \alpha$ эти нормы эквивалентны, так что в дальнейшем используется обозначение $\|\cdot\|_{\Lambda^\alpha(\mathbb{D})}$ вместо $\|\cdot\|_{\Lambda^{\alpha,J}(\mathbb{D})}$.

1.2. Весовые операторы композиции. Для функции $g \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$ и голоморфного отображения $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ весовой оператор композиции $C_\varphi^g : \mathrm{H}(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}(\mathbb{D})$ задается формулой

$$(C_\varphi^g f)(z) = g(z) f(\varphi(z)), \quad f \in \mathrm{H}(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Если $g \equiv 1$, то C_φ^g обозначается символом C_φ и называется оператором композиции. Разнообразные свойства оператора C_φ представлены в монографиях [1, 9].

Ключевые слова: голоморфное пространство Липшица, оператор композиции.
Работа поддержана грантом РФФИ No. 11-01-00526.

Отправной точкой для данной статьи является работа [5], где охарактеризованы ограниченные и компактные операторы $C_\varphi^g : \Lambda^\beta(\mathbb{D}) \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$, $\beta, \alpha < 1$. В последнее время операторы $C_\varphi^g : X \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ исследовались для различных пространств $X \subset \mathrm{H}(\mathbb{D})$ при $\alpha < 1$ (см., например, [2, 11] и приведенные там ссылки). В настоящей работе получены теоретические описания ограниченных и компактных операторов $C_\varphi^g : X \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ для $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.3. Организация статьи. В §2 излагается аксиоматический подход. Основные результаты работы представлены в §3, где рассматривается естественный случай $X = \Lambda^\beta(\mathbb{D})$, $\beta \in \mathbb{R}$. Если $\beta \le 0$, то $\Lambda^\beta(\mathbb{D})$ – большое пространство, поэтому можно использовать аксиоматический метод. Если $\beta > 0$, то описания компактных операторов менее прямолинейны; см. теорему 3.3. Безусловно, описания становятся проще, если рассматривается минимальное число $J \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $J > \alpha$. Также полученные утверждения сравниваются с известными свойствами невесовых операторов композиции C_φ. В частности, показано, как упростить результаты, доказанные в работе [3]. Заключительные замечания приведены в §4.

Благодарность. Автор признателен М. Ф. Гамаль за полезные обсуждения.

§2. Аксиоматический подход

2.1. Предположения о пространстве X. Зафиксируем банахово (или p-банахово, $0 < p < 1$) пространство $X \subset \mathrm{H}(\mathbb{D})$. Пусть $J \in \mathbb{Z}_+$.

Аксиома 1. *Существуют невозрастающие функции $\Omega_j^X : [0, 1) \to (0, +\infty)$, $j = 0, 1, \dots, J$, такие, что*

$$|f^{(j)}(z)|\Omega_j^X(|z|) \le C\|f\|_X \quad \textit{для всех } f \in X, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Как обычно, $C > 0$ обозначает абсолютную константу, значение которой может меняться от строки к строке.

Также предполагается, что функции Ω_j^X в определенном смысле являются оптимальными.

Аксиома 2. *Существуют тестовые функции $f_{j,w} \in X$, $w \in \mathbb{D}$, $j = 0, 1, \dots, J$, такие, что*

$$\|f_{j,w}\|_X \le C;$$
$$C\big|f_{j,w}^{(j)}(w)\big|\Omega_j^X(|w|) \ge 1;$$

$$\textit{если}\ \ j \geq 1, \quad \textit{то}\ \ f_{j,w}^{(k)}(w) = 0 \quad \textit{для всех}\ \ k = 0, 1, \ldots, j-1.$$

Аксиома 3. *Если* $\|f_n\|_X \leq C$ *и* $f_n \to f$ *равномерно на компактных подмножествах круга, то* $f \in X$.

Отметим, что аксиома 3 выполнена для всех пространств X, рассматриваемых ниже.

Аксиома 4 (усиленная аксиома 2). *Существуют тестовые функции* $f_{j,w} \in X$, $j = 0, 1, \ldots, J$, $w \in \mathbb{D}$, *для которых выполнены условия аксиомы* 2, *а также* $f_{j,w} \to 0$ *равномерно на компактных подмножествах круга при* $|w| \to 1-$.

2.2. Производные весовой композиции. Пусть $J \in \mathbb{Z}_+$. Для $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$ формально вычислим производную $(C_\varphi^g f)^{(J)}$. Таким образом, равенство

$$(C_\varphi^g f)^{(J)}(z) = \sum_{j=0}^{J} G_j[g, \varphi, J](z) f^{(j)}(\varphi(z)), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.1}$$

задает функции $G_j[g, \varphi, J]$, $j = 0, 1, \ldots, J$. В частности,

$G_0[g, \varphi, 0] = g;$

$G_0[g, \varphi, 1] = g', \quad G_1[g, \varphi, 1] = g\varphi';$

$G_0[g, \varphi, 2] = g'', \quad G_1[g, \varphi, 2] = 2g'\varphi' + g\varphi'', \quad G_2[g, \varphi, 2] = g(\varphi')^2.$

2.3. Ограниченные операторы.

Предложение 2.1. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, $J \in \mathbb{Z}_+$ *и* $J > \alpha$. *Предположим, что аксиомы* 1 *и* 2 *выполнены для пространства* $X \subset \mathrm{H}(\mathbb{D})$. *Тогда оператор* $C_\varphi^g : X \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ *ограничен в том и только в том случае, когда*

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{|G_j[g, \varphi, J](z)|(1 - |z|)^{J-\alpha}}{\Omega_j^X(|\varphi(z)|)} < \infty \quad \textit{для}\ j = 0, 1, \ldots, J. \tag{2.2}$$

Доказательство. Пусть имеет место неравенство (2.2) и $f \in X$. В силу формул (2.1), (2.2) и аксиомы 1, имеем

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |(C_\varphi^g f)^{(J)}(z)|(1 - |z|)^{J-\alpha} < \infty.$$

Таким образом, аксиома 1 гарантирует, что оператор $C_\varphi^g : X \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ ограничен, по теореме о замкнутом графике.

Теперь предположим, что C_φ^g – ограниченный оператор. В силу формулы (2.1) верна оценка

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|\sum_{j=0}^{J} G_j[g,\varphi,J](z)f^{(j)}(\varphi(z))\right|(1-|z|)^{J-\alpha}\le C\|f\|_X \tag{2.3}$$

для всех $f\in X$. Положим $f=f_{J,\varphi(z)}$, где $f_{J,\varphi(z)}$ — тестовая функция, существующая в силу аксиомы 2. Используя аксиому 2 и оценку (2.3), получаем

$$\begin{aligned}\sup_{z\in\mathbb{D}}&\frac{|G_J[g,\varphi,J](z)|(1-|z|)^{J-\alpha}}{\Omega_J^X(|\varphi(z)|)}\\ &\le C\sup_{z\in\mathbb{D}}|G_J[g,\varphi,J](z)f_{J,\varphi(z)}^{(J)}(\varphi(z))|(1-|z|)^{J-\alpha}\le C.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Итак, свойство (2.2) выполнено для $j=J$. Далее, аксиома 1 и неравенство (2.4) гарантируют, что

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|G_J[g,\varphi,J](z)f^{(J)}(\varphi(z))\right|(1-|z|)^{J-\alpha}\le C\|f\|_X.$$

При $J\ge 1$ из полученного свойства и оценки (2.3) следует, что

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left|\sum_{j=0}^{J-1} G_j[g,\varphi,J](z)f^{(j)}(\varphi(z))\right|(1-|z|)^{J-\alpha}\le C\|f\|_X$$

для всех $f\in X$. Таким образом, применяя аксиомы 2 и 1, по индукции получаем (2.2) для $j=J-1,\dots,0$. □

2.4. Компактные операторы. Хорошо известны различные модификации следующего критерия компактности (ср. с [1, предложение 3.11]).

Лемма 2.2. *Предположим, что аксиомы* 1 *и* 3 *выполнены для пространства* $X\subset \mathrm{H}(\mathbb{D})$. *Тогда оператор* $C_\varphi^g: X\to\Lambda^\alpha(\mathbb{D})$, $\alpha\in\mathbb{R}$, *компактен в том и только в том случае, когда он ограничен и* $\|C_\varphi^g f_n\|_{\Lambda^\alpha(\mathbb{D})}\to 0$ *для любой ограниченной в* X *последовательности* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *такой, что* $f_n\to 0$ *равномерно на компактных подмножествах круга.*

Предложение 2.3. *Предположим, что* $\alpha\in\mathbb{R}$, $J\in\mathbb{Z}_+$ *и* $J>\alpha$. *Пусть аксиомы* 1, 3 *и* 4 *выполнены для пространства* $X\subset\mathrm{H}(\mathbb{D})$.

Тогда оператор $C_\varphi^g : X \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ *компактен в том и только в том случае, когда*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |G_j[g,\varphi,J](z)|(1-|z|)^{J-\alpha} < \infty \quad \textit{для} \quad j = 0,1,\dots,J, \tag{2.5}$$

а также для любого $\varepsilon > 0$ *существует число* $r \in (0,1)$ *такое, что*

$$\frac{|G_j[g,\varphi,J](z)|(1-|z|)^{J-\alpha}}{\Omega_j^X(|\varphi(z)|)} < \varepsilon \quad \textit{для } j = 0,1,\dots,J \tag{2.6}$$

при $|\varphi(z)| > r$.

Доказательство. Пусть имеют место соотношения (2.5) и (2.6). Тогда выполнено свойство (2.2), следовательно, рассматриваемый оператор ограничен. Предположим, что $\|f_n\|_X \le C$, $n \in \mathbb{N}$, и $f_n \to 0$ равномерно на компактных подмножествах круга. Пусть $\varepsilon > 0$ и $j = 0,1,\dots,J$.

Предположим, что $|\varphi(z)| > r = r(\varepsilon)$. Тогда в силу аксиомы 1 и условия (2.6) имеем

$$\begin{aligned}|G_j[g,\varphi,J](z)||f_n^{(j)}(\varphi(z))|(1-|z|)^{J-\alpha}&\\ \le C\frac{|G_j[g,\varphi,J](z)|(1-|z|)^{J-\alpha}}{\Omega_j^X(|\varphi(z)|)} &< C\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее, предположим, что $|\varphi(z)| \le r$. Так как $f_n \to 0$ равномерно на компактных подмножествах круга, то $|f_n^{(j)}(\varphi(z))| < \varepsilon$ для всех $n \ge n(r)$. Следовательно,

$$|G_j[g,\varphi,J](z)||f_n^{(j)}(\varphi(z))|(1-|z|)^{J-\alpha} < C\varepsilon \quad \text{при } n \ge n(r)$$

в силу (2.5).

Итак,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |(C_\varphi^g f_n)^{(J)}(z)|(1-|z|)^{J-\alpha} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Так как $f_n \to 0$ равномерно на компактных подмножествах круга, то

$$|(C_\varphi^g f_n)^{(k)}(0)| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,\ k = 0,1,\dots,J-1.$$

Таким образом, $\|C_\varphi^g f_n\|_{\Lambda^\alpha(\mathbb{D})} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, C_φ^g – компактный оператор в силу леммы 2.2.

Для доказательства обратной импликации предположим, что оператор C_φ^g компактен. Тогда свойство (2.5) имеет место в силу предложения 2.1. Далее, предположим, что неравенство (2.6) не выполняется при $j = J$. Тогда существуют точки $z_n = z_n(J) \in \mathbb{D}$ такие, что $|\varphi(z_n)| \to 1$ и

$$\frac{|G_J[g,\varphi,J](z_n)|(1-|z_n|)^{J-\alpha}}{\Omega_J^X(|\varphi(z_n)|)} \geq \varepsilon \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $f_{J,w}$, $w \in \mathbb{D}$, – тестовые функции, существующие в силу аксиомы 4. Отметим, что $\|f_{J,\varphi(z_n)}\|_X \leq C$ и $f_{J,\varphi(z_n)} \to 0$ равномерно на компактных подмножествах круга. Следовательно, из компактности оператора C_φ^g и леммы 2.2 вытекает, что

$$\left|(C_\varphi^g f_{J,\varphi(z_n)})^{(J)}(z_n)\right|(1-|z_n|)^{J-\alpha} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \frac{|G_J[g,\varphi,J](z_n)|(1-|z_n|)^{J-\alpha}}{\Omega_J^X(|\varphi(z_n)|)} \\
&\leq C|G_J[g,\varphi,J](z_n)||f_{J,\varphi(z_n)}^{(J)}(\varphi(z_n))|(1-|z_n|)^{J-\alpha} \\
&= C\left|(C_\varphi^g f_{J,\varphi(z_n)})^{(J)}(z_n)\right|(1-|z_n|)^{J-\alpha} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Полученное противоречие гарантирует, что (2.6) имеет место для $j = J$. Теперь предположим, что (2.6) не выполняется при $j = J-1$. Тогда существуют точки $z_n = z_n(J-1) \in \mathbb{D}$ такие, что $|\varphi(z_n)| \to 1$ и

$$\frac{|G_{J-1}[g,\varphi,J](z_n)|(1-|z_n|)^{J-\alpha}}{\Omega_{J-1}^X(|\varphi(z_n)|)} \geq \varepsilon \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $f_{J-1,w}$, $w \in \mathbb{D}$, – тестовые функции, существующие в силу аксиомы 4. Оператор C_φ^g компактен, поэтому

$$\left|(C_\varphi^g f_{J-1,\varphi(z_n)})^{(J)}(z_n)\right|(1-|z_n|)^{J-\alpha} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

В силу аксиомы 4 имеем

$$\begin{aligned}
&(C_\varphi^g f_{J-1,\varphi(z_n)})^{(J)}(z_n) \\
&= G_{J-1}[g,\varphi,J](z_n) f_{J-1,\varphi(z_n)}^{(J-1)}(\varphi(z_n)) + G_J[g,\varphi,J](z_n) f_{J-1,\varphi(z_n)}^{(J)}(\varphi(z_n)).
\end{aligned}$$

Отметим, что

$$|G_J[g,\varphi,J](z_n)||f^{(J)}_{J-1,\varphi(z_n)}(\varphi(z_n))|(1-|z_n|)^{J-\alpha}$$
$$\le C\frac{|G_J[g,\varphi,J](z_n)|(1-|z_n|)^{J-\alpha}}{\Omega^X_J(|\varphi(z_n)|)}\to 0 \quad \text{при } n\to\infty,$$

так как оценка (2.6) имеет место при $j=J$.

Следовательно,

$$|G_{J-1}[g,\varphi,J](z_n)||f^{(J-1)}_{J-1,\varphi(z_n)}(\varphi(z_n))|(1-|z_n|)^{J-\alpha}\to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

С другой стороны, по предположению

$$\varepsilon\le\frac{|G_{J-1}[g,\varphi,J](z_n)|(1-|z_n|)^{J-\alpha}}{\Omega^X_{J-1}(|\varphi(z_n)|)}$$
$$\le C|G_{J-1}[g,\varphi,J](z_n)||f^{(J-1)}_{J-1,\varphi(z_n)}(\varphi(z_n))|(1-|z_n|)^{J-\alpha}.$$

Полученное противоречие гарантирует, что (2.6) имеет место при $j=J-1$. По индукции доказываем свойство (2.6) для $j=J-2,\dots,0$. □

2.5. Примеры. Для классических пространств $X\subset \mathrm{H}(\mathbb{D})$ функции Ω^X_j обычно известны. В частности, различные примеры приведены в статье [11] для $j=0,1$. Ниже рассматриваются иные иллюстрации: пространства Харди $H^p(\mathbb{D})$, $0<p\le\infty$, весовые пространства Бергмана $A^p_\beta(\mathbb{D})$, $0<p<\infty$, $\beta>0$, а также логарифмические пространства Блоха $\mathcal{B}_{\log_k}(\mathbb{D})$, $k\in\mathbb{N}$.

2.5.1. Пространства Харди. Для $0<p<\infty$ пространство Харди $H^p(\mathbb{D})$ состоит из тех функций $f\in\mathrm{H}(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|^p_{H^p(\mathbb{D})}=\sup_{0<r<1}\int\limits_{\partial\mathbb{D}}|f(r\zeta)|^p\,dm(\zeta)<\infty,$$

где m – нормированная мера Лебега на окружности $\partial\mathbb{D}$. Относительно указанной нормы пространство $H^p(\mathbb{D})$ является банаховым при $p\ge 1$ и p-банаховым при $0<p<1$.

Пусть $X=H^p(\mathbb{D})$, $0<p<\infty$. Хорошо известно, что аксиома 1 выполнена для $\Omega^X_j(t)=(1-t)^{j+\frac{1}{p}}$. Чтобы проверить аксиому 4, положим

$$f_{j,w}(z)=\frac{(z-w)^j(1-|w|)}{(1-z\overline{w})^{j+1+\frac{1}{p}}},\quad j=0,1,\dots,J,\quad w,z\in\mathbb{D}.$$

Имеем $|z-w| \le |1-z\overline{w}|$, поэтому предложение 1.4.10 из монографии [7] гарантирует, что $\|f_{j,w}\|_{H^p(\mathbb{D})} \le C$. Остается заметить, что

$$C|f_{j,w}^{(j)}(w)| \ge (1-|w|)^{-j-\frac{1}{p}}, \quad w \in \mathbb{D},$$

и $f_{j,w}(z) \to 0$ равномерно на компактных подмножествах круга при $|w| \to 1-$.

Пусть $X = H^\infty(\mathbb{D})$. Тогда аксиома 1 выполнена для $\Omega_j^X(t) = (1-t)^j$. Для проверки аксиомы 4 достаточно положить

$$f_{j,w}(z) = \frac{(z-w)^j(1-|w|)}{(1-z\overline{w})^{j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad w, z \in \mathbb{D}.$$

2.5.2. Пространства Бергмана. Для $0 < p < \infty$ и $\beta > 0$ пространство $A^p_\beta(\mathbb{D})$ состоит из тех функций $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|)^{\beta-1}\, dm_2(z) < \infty,$$

где m_2 – нормированная мера Лебега на круге $\mathbb{D}$. Пусть $X = A^p_\beta(\mathbb{D})$. Хорошо известно, что аксиома 1 выполнена для $\Omega_j^X(t) = (1-t)^{j+\frac{\beta+1}{p}}$. Положим

$$f_{j,w}(z) = \frac{(z-w)^j(1-|w|)}{(1-z\overline{w})^{j+1+\frac{\beta+1}{p}}}, \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad w \in \mathbb{D}.$$

Аксиома 4 имеет место в силу предложения 1.4.10 из [7].

2.5.3. Логарифмические пространства Блоха $\mathcal{B}_{\log_k}(\mathbb{D})$. При $k \in \mathbb{N}$ пространство $\mathcal{B}_{\log_k}(\mathbb{D})$ состоит из тех функций $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|_{\mathcal{B}_{\log_k}(\mathbb{D})} = |f(0)| + \sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)|(1-|z|^2) \prod_{m=1}^{k} \log_{(m)} \frac{e^{(k)}}{1-|z|^2} < \infty,$$

где $e^{(1)} = e$, $e^{(k+1)} = \exp(e^{(k)})$ и $\log_{(1)} = \log$, $\log_{(k+1)} = \log\log_{(k)}$.

Пусть $X = \mathcal{B}_{\log_k}(\mathbb{D})$. В силу леммы 7 из работы [2] аксиома 1 выполнена для

$$\Omega_0^X(t) = \frac{1}{\log_{(k+1)} \frac{e^{(k+1)}}{1-t^2}}.$$

По определению пространства X

$$\Omega_1^X = (1-t^2)\prod_{m=1}^{k}\log_{(m)}\frac{e^{(k)}}{1-t^2}.$$

Следовательно,

$$\Omega_j^X = (1-t^2)^j\prod_{m=1}^{k}\log_{(m)}\frac{e^{(k)}}{1-t^2}, \quad j\geq 1.$$

Отметим, что функции Ω_j^X убывают на промежутке $[0,1)$. Наконец, для $w\in\mathbb{D}$ положим

$$f_{w,0}(z)=\frac{\left(\log_{(k+1)}\frac{e^{(k+1)}}{1-z\overline{w}}\right)^2}{\log_{(k+1)}\frac{e^{(k+1)}}{1-|w|^2}}, \quad z\in\mathbb{D};$$

$$f_{w,j}(z)=\frac{(1-|w|^2)(z-w)^j}{(1-z\overline{w})^{j+1}\prod_{m=1}^{k}\log_{(m)}\frac{e^{(k)}}{1-z\overline{w}}}, \quad z\in\mathbb{D}, \quad j\geq 1.$$

Итак, аксиома 4 выполнена.

§3. X является пространством Липшица

3.1. Общие результаты.

Предложение 3.1. *Пусть $J\in\mathbb{Z}_+$ и $X=\Lambda^\beta(\mathbb{D})$, $\beta\in\mathbb{R}$. Зафиксируем минимальное число $N\in\mathbb{Z}_+$ такое, что $\beta\leq N$. Тогда аксиомы 1 и 2 выполнены для следующих функций Ω_j^X:*

если $N>0$, *то* $\Omega_j^X\equiv 1$ *для* $j=0,1,\dots,\min\{N-1,J\}$;

если $\beta<N\leq J$, *то* $\Omega_j^X(t)=(1-t)^{j-\beta}$ *для* $j=N,\dots,J$;

если $\beta=N<J$, *то* $\Omega_j^X(t)=(1-t)^{j-\beta}$ *для* $j=N+1,\dots,J$;

если $\beta=N\leq J$, *то* $\Omega_N^X(t)=\dfrac{1}{\log\frac{e}{1-t}}$.

Доказательство. 1. Пусть $N>0$ и $j=0,\dots,N-1$. Так как $\beta> N-1\geq 0$, то

$$|f^{(j)}(z)|\leq C\|f\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{D})} \quad \text{для всех } f\in\Lambda^\beta(\mathbb{D}),\ z\in\mathbb{D}.$$

Для $w\in\mathbb{D}$ положим $f_{j,w}(z)=(z-w)^j$, $z\in\mathbb{D}$. В частности, если $N>J$, то $\Omega_j^X\equiv 1$ для всех $j=0,\dots,J$.

2. Пусть $\beta < N \le J$. По определению пространства $\Lambda^\beta(\mathbb{D})$ справедливо неравенство

$$|f^{(N)}(z)|(1-|z|)^{N-\beta} \le \|f\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{D})} \quad \text{для всех } f \in \Lambda^\beta(\mathbb{D}),\ z \in \mathbb{D}.$$

Следовательно, если $N < J$, то для $j = N+1, \dots, J$ имеем

$$|f^{(j)}(z)|(1-|z|)^{j-\beta} \le C\|f\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{D})} \quad \text{для всех} \quad f \in \Lambda^\beta(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.1}$$

по формуле Коши.

Далее, для $w \in \mathbb{D}$ и $j = N, \dots, J$ положим

$$f_{j,w}(z) = \frac{(z-w)^j}{(1-z\overline{w})^{j-\beta}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Выполняя непосредственные вычисления и используя неравенство

$$|z-w| \le |1-z\overline{w}|, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

получаем $|f_{j,w}^{(N)}(z)|(1-|z|)^{N-\beta} \le C$, $z \in \mathbb{D}$. Если $N \ge 1$, то $|f_{j,w}^{(k)}(0)| \le C$ для $k = 0, 1, \dots, N-1$. Напомним, что $N > \beta$, следовательно, $\|f_{j,w}\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{D})} \le C$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$C|f_{j,w}^{(j)}(w)|(1-|w|)^{j-\beta} \ge 1 \quad \text{для всех} \quad w \in \mathbb{D}.$$

Наконец, если $j \ge 1$, то $f_{j,w}^{(k)}(w) = 0$ для $k = 0, 1, \dots, j-1$.

3. Пусть $\beta = N < J$. Для $j = N+1$ оценка (3.1) выполнена по определению пространства $\Lambda^\beta(\mathbb{D})$. Следовательно, (3.1) имеет место для $j = N+1, \dots, J$. Остается повторить для $j = N+1, \dots, J$ рассуждения, использованные в случае $\beta < N \le J$.

4. Пусть $\beta = N \le J$. По определению пространства $\Lambda^N(\mathbb{D})$ справедливо неравенство

$$|f^{(N+1)}(z)|(1-|z|) \le \|f\|_{\Lambda^N(\mathbb{D})} \quad \text{для всех} \quad f \in \Lambda^N(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Следовательно,

$$|f^{(N)}(z)| \le \|f\|_{\Lambda^N(\mathbb{D})} \log\frac{e}{1-|z|} \quad \text{для всех} \quad f \in \Lambda^N(\mathbb{D}), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Положим

$$f_{N,w}(z) = (z-w)^N \log\frac{e}{1-z\overline{w}}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Тогда $\|f_{N,w}\|_{\Lambda^N(\mathbb{D})} \le C$ и $C|f_{N,w}^{(N)}(w)| \ge \log\frac{e}{1-|w|}$. Наконец, если $N > 0$, то $f_{N,w}^{(k)}(w) = 0$ для $k = 0, \dots, N-1$. $\square$

Предложение 3.2. *Пусть $J \in \mathbb{Z}_+$ и $X = \Lambda^\beta(\mathbb{D})$, $\beta \le 0$. Тогда аксиомы* 1 *и* 4 *выполнены для функций Ω_j^X, $j = 0, \dots, J$, введенных в предложении* 3.1.

Доказательство. Пусть $\beta < 0$ и $j = 0, \dots, J$ или пусть $\beta = 0$ и $j = 1, \dots, J$. Для $w \in \mathbb{D}$ положим

$$f_{j,w}(z) = \frac{(1-|w|)(z-w)^j}{(1-z\overline{w})^{j-\beta+1}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Если $\beta = 0$, то для $w \in \mathbb{D}$ положим

$$f_{0,w}(z) = \frac{\left(\log \frac{e}{1-z\overline{w}}\right)^2}{\log \frac{e}{1-|w|}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Прямые вычисления показывают, что аксиомы 1 и 4 выполнены для $\Omega_0^X(t) = 1/(\log \frac{e}{1-t})$ при $\beta = 0$, а также для $\Omega_j^X(t) = (1-t)^{j-\beta}$ при $\beta < 0$ и $j = 0, \dots, J$ или при $\beta = 0$ и $j = 1, \dots, J$. $\square$

Если $X = \Lambda^\beta(\mathbb{D})$ при $\beta > 0$, то предложение 2.3 неприменимо. На самом деле, результаты и рассуждения несколько отличаются в этом случае.

Теорема 3.3. *Предположим, что $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $J \in \mathbb{Z}_+$, $J > \alpha$ и $N \in \mathbb{Z}_+$ – минимальное число такое, что $N \ge \beta$. Положим $X = \Lambda^\beta(\mathbb{D})$ и рассмотрим функции Ω_j^X, $j = 0, \dots, J$, определенные в предложении* 3.1. *Тогда оператор $C_\varphi^g : X \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ компактен в том и только в том случае, когда выполнены следующие условия*:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|G_j[g,\varphi,J](z)|(1-|z|)^{J-\alpha}}{\Omega_j^X(|\varphi(z)|)} < \infty \quad \text{для} \quad j = 0, \dots, \min\{N-1, J\}; \tag{3.2}$$

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |G_j[g,\varphi,J](z)|(1-|z|)^{J-\alpha} < \infty \quad \text{для } j = N, \dots, J; \tag{3.3}$$

для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{|G_j[g,\varphi,J](z)|(1-|z|)^{J-\alpha}}{\Omega_j^X(|\varphi(z)|)} < \varepsilon \quad \text{для } j = N, \dots, J \tag{3.4}$$

при $|\varphi(z)| > r$. Если $N > J$, то условия (3.3) *и* (3.4) *отсутствуют.*

Доказательство. Если $N = 0$, то достаточно применить предложения 2.3 и 3.2. Для $N > 0$ ниже видоизменены рассуждения, использованные при доказательстве предложения 2.3.

Предположим, что $N > 0$ и выполнены условия (3.2)–(3.4). Безусловно, рассматриваемый оператор ограничен. Пусть $\|f_n\|_X \le C$ и $f_n \to 0$ равномерно на компактных подмножествах круга. Заметим, что $f_n^{(j)} \to 0$ равномерно на круге $\mathbb{D}$ для $j = 0, \dots, N-1$. На самом деле, это наблюдение объясняет, почему результат отличается при $\beta > 0$. Итак,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |G_j[g,\varphi,J](z)||f_n^{(j)}(\varphi(z))|(1-|z|)^{J-\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty, \quad j = 0,\dots,N-1,$$

в силу (3.2). Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве предложения 2.3, получаем

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |G_j[g,\varphi,J](z)||f_n^{(j)}(\varphi(z))|(1-|z|)^{J-\alpha} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty, \quad j = N,\dots,J,$$

в силу (3.3) и (3.4). Так как $f_n \to 0$ равномерно на круге, то

$$\left|(C_\varphi^g f_n)^{(k)}(0)\right| \to 0 \ \text{ при } \ n\to\infty, \ k = 0,\dots,J-1.$$

Таким образом,

$$\|C_\varphi^g f_n\|_{\Lambda^\alpha(\mathbb{D})} \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Лемма 2.2 гарантирует, что C_φ^g – компактный оператор.

Для доказательства обратной импликации предположим, что $N > 0$ и оператор C_φ^g компактен. Тогда (3.2) и (3.3) имеют место в силу предложений 3.1 и 2.1. Пусть $N \le J$. Ниже доказано свойство (3.4).

Если $\beta < N$, то для $w \in \mathbb{D}$ положим

$$f_{N,w}(z) = \frac{(1-|w|)(z-w)^N}{(1-z\overline{w})^{N-\beta+1}}, \quad z\in\mathbb{D}.$$

Если $\beta = N$, то для $w \in \mathbb{D}$ положим

$$f_{N,w}(z) = \frac{\left(\log\frac{e}{1-z\overline{w}}\right)^2 (z-w)^N}{\log\frac{e}{1-|w|}}, \quad z\in\mathbb{D}.$$

Если $N < J$, то для $w \in \mathbb{D}$ положим

$$f_{j,w}(z) = \frac{(1-|w|)(z-w)^j}{(1-z\overline{w})^{j-\beta+1}}, \quad z \in \mathbb{D},\ j = N+1, \dots, J.$$

Функции $f_{j,w} \in X$, $j = N, \dots, J$, $w \in \mathbb{D}$, удовлетворяют требованиям аксиомы 4. Итак, для проверки свойства (3.4) достаточно повторить индукционные рассуждения, использованные при доказательстве предложения 2.3. □

3.2. Операторы композиции. Хорошо известно, что теорема 3.3 существенно упрощается при $g \equiv 1$. В частности, имеет место следующий результат.

Теорема 3.4. *Пусть отображение $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ голоморфно и $0 < \alpha < 1$. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

$$\textit{оператор } C_\varphi : \Lambda^\alpha(\mathbb{D}) \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D}) \textit{ компактен}; \tag{3.5}$$

$$\varphi \in \Lambda^\alpha(\mathbb{D}) \textit{ и } \lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\varphi'(z)| \left(\frac{1-|z|}{1-|\varphi(z)|} \right)^{1-\alpha} = 0; \tag{3.6}$$

$$\varphi \in \Lambda^\alpha(\mathbb{D}) \textit{ и } \|\varphi\|_\infty < 1. \tag{3.7}$$

Отметим, что (3.5)⇔(3.6) в силу теоремы 1.4 из статьи [10] или в силу теоремы 3.3; эквивалентность свойств (3.5) и (3.7) доказана в [8]. Так как оператор C_φ отсутствует в условиях (3.6) и (3.7), то естественно задать вопрос о прямом доказательстве импликации (3.6)⇒(3.7). В работе [4] эта импликация получена с помощью теоремы Жулиа–Каратеодори. Следующая лемма показывает, что (3.6) влечет (3.7) в силу леммы Шварца.

Лемма 3.5. *Пусть отображение $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ голоморфно и $0 < \alpha \le 1$. Тогда следующие свойства несовместимы*:

(i) *существует точка $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ такая, что* $\lim_{t\to 1-} |\varphi(t\zeta)| = 1$;

(ii) *для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r \in (0,1)$ такое, что*

$$|\varphi'(z)| \left(\frac{1-|z|}{1-|\varphi(z)|} \right)^{1-\alpha} < \varepsilon \quad \textit{при } |\varphi(z)| > r.$$

Доказательство. Пусть имеют место оба свойства (i) и (ii). Заметим, что

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial z}(1-|\varphi(z)|^2)^\alpha\right| \\ &\le \frac{\alpha|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{1-\alpha}}, \quad z\in\mathbb{D}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Положим

$$\varepsilon = \left(\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}\right)^\alpha > 0.$$

Применяя (ii), зафиксируем $r = r(\frac{\varepsilon}{2})$. Используя (i), выберем число $R = R(r) \in (0,1)$ такое, что $|\varphi(t\zeta)| > r$ для всех $t\in[R,1)$. Тогда в силу (3.8) имеем

$$\begin{aligned}(1-|\varphi(R\zeta)|^2)^\alpha &= \left|(1-\lim_{t\to 1-}|\varphi(t\zeta)|^2)^\alpha - (1-|\varphi(R\zeta)|^2)^\alpha\right| \\ &< \varepsilon\int\limits_R^1 \frac{\alpha}{(1-t)^{1-\alpha}}\,dt = \varepsilon(1-R)^\alpha < \varepsilon(1-R^2)^\alpha.\end{aligned}$$

Однако лемма Шварца, примененная к композиции подходящего преобразования Мёбиуса и φ, гарантирует, что

$$\left(\frac{1-|\varphi(R\zeta)|^2}{1-R^2}\right)^\alpha \ge \varepsilon.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

3.3. Дифференцирование композиции. Пусть D – оператор дифференцирования. Весьма замысловатые описания для ограниченных и компактных операторов $DC_\varphi : H^\infty(\mathbb{D}) \to \Lambda^1(\mathbb{D})$ были недавно получены в работе [3]. В силу теоремы 3.3 или леммы 3.5 такие операторы характеризуются простыми явными условиями.

Следствие 3.6. *Пусть отображение $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ голоморфно. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

(i) *оператор $DC_\varphi : H^\infty(\mathbb{D}) \to \Lambda^1(\mathbb{D})$ ограничен;*
(ii) *оператор $DC_\varphi : H^\infty(\mathbb{D}) \to \Lambda^1(\mathbb{D})$ компактен;*
(iii) *$\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{D})$ и $\|\varphi\|_\infty < 1$.*

Доказательство. Пусть имеет место условие (i). Полагая $f(z) = z$, получаем $DC_\varphi f = \varphi' \in \Lambda^1(\mathbb{D})$, т.е. $\varphi \in \Lambda^2(\mathbb{D})$. В силу свойства (i) ограничен оператор $DC_\varphi : H^\infty(\mathbb{D}) \to H^\infty(\mathbb{D})$. Используя тестовые функции

$$f_w(z) = \frac{(z-w)(1-|w|)}{(1-z\overline{w})^2}, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

получаем, что

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|} < \infty.$$

В силу леммы 3.5 имеем $\|\varphi\|_\infty < 1$. Итак, (i) влечет (iii). Проверка импликации (iii)$\Rightarrow$(ii) стандартна. Наконец, из (ii) следует (i). $\square$

§4. Заключительные замечания

4.1. Смежные интегральные операторы. Для $g \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$ и голоморфного отображения $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ оператор типа Вольтерра $V_\varphi^g : \mathrm{H}(\mathbb{D}) \to \mathrm{H}(\mathbb{D})$ задается формулой

$$(V_\varphi^g f)(z) = \int_0^z f(\varphi(w))g'(w)\,dw, \quad f \in \mathrm{H}(\mathbb{D}),\ z \in \mathbb{D}.$$

Если $\varphi(z) \equiv z$, то оператор V_φ^g обозначается символом J_g и его называют обобщенным оператором Чезаро (см. [6]). Так как $(V_\varphi^g f)' = C_\varphi^{g'} f$, то рассуждения, использованные в данной работе, применимы к операторам типа Вольтерра $V_\varphi^g : X \to \Lambda^\alpha(\mathbb{D})$ при $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.2. Обобщенные пространства Липшица. Пусть $J \in \mathbb{Z}_+$ и функция $\Phi : [0,1) \to (0,+\infty)$ является невозрастающей. По определению, пространство $\Lambda^{J,\Phi}(\mathbb{D})$ состоит из тех функций $f \in \mathrm{H}(\mathbb{D})$, для которых

$$\|f\|_{\Lambda^{J,\Phi}(\mathbb{D})} = \sum_{j=0}^{J-1} |f^{(j)}(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} |f^{(J)}(z)|\Phi(|z|) < \infty.$$

Например, $\mathcal{B}_{\log_k}(\mathbb{D}) = \Lambda^{1,\Phi_k}(\mathbb{D})$, где

$$\Phi_k(t) = (1-t^2) \prod_{m=1}^{k} \log_{(m)} \frac{e^{(k)}}{1-t^2}.$$

Отметим, что предложения 2.1 и 2.3, а также их доказательства переписываются с минимальными изменениями для весовых операторов композиции $C_\varphi^g : X \to \Lambda^{J,\Phi}(\mathbb{D})$.

Литература

1. C. C. Cowen, B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions.* — Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
2. S. G. Krantz, S. Stević, *On the iterated logarithmic Bloch space on the unit ball.* — Nonlinear Anal. **71** (2009), no. 5–6, 1772–1795.
3. Y. Liu, Y. Yu, *Composition followed by differentiation between H^∞ and Zygmund spaces.* — Complex Anal. Oper. Theory, published online: 22 May 2010; doi:10.1007/s11785-010-0080-7.
4. P. J. Nieminen, *Compact differences of composition operators on Bloch and Lipschitz spaces.* — Comput. Methods Funct. Theory **7** (2007), no. 2, 325–344.
5. S. Ohno, K. Stroethoff, R. Zhao, *Weighted composition operators between Bloch-type spaces.* — Rocky Mountain J. Math. **33** (2003), no. 1, 191–215.
6. Ch. Pommerenke, *Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation.* — Comment. Math. Helv. **52** (1977), no. 4, 591–602.
7. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbf{C}^n$. Мир, М., 1984.
8. J. H. Shapiro, *Compact composition operators on spaces of boundary-regular holomorphic functions.* — Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), no. 1, 49–57.
9. J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory.* Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.
10. J. Xiao, *Composition operators associated with Bloch-type spaces.* — Complex Variables Theory Appl. **46** (2001), no. 2, 109–121.
11. Z. Zhou, R. Chen, *Weighted composition operators from $F(p,q,s)$ to Bloch type spaces on the unit ball.* — Internat. J. Math. **19** (2008), no. 8, 899–926.

Dubtsov E. S. Weighted composition operators into Lipschitz spaces.

We investigate bounded and compact weighted composition operators that map into holomorphic Lipschitz spaces.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru

Поступило 23 мая 2011 г.