Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

М. Б. Дубашинский

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ И ПОЧТИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

§1. Введение

Буквой K мы всегда будем обозначать компактное множество в $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ или 3 (хотя все основные результаты нетрудно обобщить на значения $d = 4, 5, \dots$).

Пусть $\vec{\mathcal{V}}$ – некоторый класс непрерывных векторных полей (то есть отображений в пространство $\mathbb{R}^d$ с областью задания в $\mathbb{R}^d$). Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^d$ через $\vec{C}(K)$ обозначим пространство всех векторных полей, непрерывных на K. Задачи, которым посвящена эта работа, в основном связаны со следующим вопросом: какие условия, налагаемые на K, обеспечивают плотность в пространстве $\vec{C}(K)$ множества всех следов (сужений) на K полей класса $\vec{\mathcal{V}}$? В роли $\vec{\mathcal{V}}$ будут выступать: во-первых, класс всех гармонических векторных полей, а во-вторых – класс всех безвихревых векторных полей. В обоих случаях поля класса $\vec{\mathcal{V}}$ заданы на открытых множествах в $\mathbb{R}^d$ и гладки. Напомним, что гладкое поле $\vec{v}$ называется *гармоническим*, если его матрица Якоби симметрична, а её след равен нулю. При $d = 2$ гармоничность поля $\vec{v} = (v_1, v_2)$ означает комплексную аналитичность комплекснозначной функции $v_1 - i\, v_2$ (мы отождествляем $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$). При $d = 3$ гармоничность гладкого поля $\vec{v}$ означает, что его вихрь и дивергенция равны нулю, так что $\vec{v}$ локально совпадает с градиентом гармонической функции. Мы говорим, что поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ *допускает гармоническую аппроксимацию* на множестве K, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся поле $\vec{f}_\varepsilon$, гармоническое вблизи K и такое, что $|\vec{f} - \vec{f}_\varepsilon| < \varepsilon$ на K. Компактное множество K будем называть “хорошим”, если любое поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает гармоническую аппроксимацию на K.

Ключевые слова: гармоническое векторное поле, равномерная аппроксимация, соленоидальные векторные заряды.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышёва СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026, а также гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых МК-7656.2010.1.

Таким образом, при $d = 2$ поставленный выше вопрос равносилен классической проблеме рациональной аппроксимации: на каких компактных множествах $K \subset \mathbb{C}$ любая непрерывная комплекснозначная функция допускает равномерную на K аппроксимацию рациональными функциями комплексной переменной? Этот вопрос был решён А. Г. Витушкиным (см. [4, 5]). Полученный им ответ дан в терминах аналитической ёмкости. Для нас важно то, что этот ответ по своему характеру *локален*. Переходя вновь на язык гармонических векторных полей, эту локальность можно выразить так: если поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает равномерную аппроксимацию гармоническими полями вблизи каждой точки множества K, то $\vec{f}$ допускает такую аппроксимацию и на всём множестве K.

При переходе от $d = 2$ к $d = 3$ ситуация меняется радикально, и описание множеств $K \subset \mathbb{R}^3$, на которых любое поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает гармоническую аппроксимацию, утрачивает, вообще говоря, локальный характер. В [2] построено множество $K \subset \mathbb{R}^3$ (двумерная поверхность), на котором не все непрерывные поля допускают гармоническую аппроксимацию, хотя локально (вблизи любой точки множества K) такое приближение возможно.

Однако, возможно такое d-мерное ($d \geq 3$) обобщение двумерной задачи описания "хороших" множеств K, при котором локальный характер их описания сохраняется. Мы имеем в виду следующую модификацию задачи гармонической аппроксимации на множестве $K \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$. Будем говорить, что поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает *почти гармоническую аппроксимацию* (на K), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая окрестность $V(\varepsilon)$ множества K и такое поле $\vec{f}_\varepsilon \in \vec{C}^1(V(\varepsilon))$, что $\|\vec{f} - \vec{f}_\varepsilon\|_{\vec{C}(K)} < \varepsilon$, $\sup\limits_{V(\varepsilon)} |\operatorname{rot} \vec{f}_\varepsilon| < \varepsilon$, $\sup\limits_{V(\varepsilon)} |\operatorname{div} \vec{f}_\varepsilon| < \varepsilon$ (норма в пространстве $\vec{C}(K)$ определяется стандартным образом: $\|\vec{f}\|_{\vec{C}(K)} = \max\limits_K |\vec{f}|$). Аппроксимирующее поле $\vec{f}_\varepsilon$ "почти гармонично" вблизи K – в том смысле, что его вихрь и дивергенция равномерно сколь угодно малы вблизи K.

Оказывается, что при $d = 2$ почти гармоническая аппроксимируемость поля на K *равносильна* его гармонической аппроксимируемости (см. §3, предложение 3.3). Поэтому при $d = 2$ "почти хорошие" компактные множества K (на которых любое векторное поле допускает почти гармоническую аппроксимацию) оказываются хорошими. Мы

приходим к следующей модификации вопроса, поставленного в начале введения: *описать почти хорошие компактные множества в* $\mathbb{R}^d$. При $d = 2$ он совпадает с вопросом об описании компактных множеств $K \subset \mathbb{C}$, на которых множество рациональных функций плотно в $C(K)$. Мы покажем (в §5), что при $d = 3$ почти хорошие множества не обязаны быть хорошими. При этом свойство множества K быть почти хорошим локально – в отличие от хороших множеств (§3, теорема 3.6).

В случае, если множество $K \subset \mathbb{R}^3$ имеет нулевую меру Лебега, гармоническая аппроксимируемость векторного поля на K равносильна его безвихревой аппроксимируемости, а почти гармоническая – почти безвихревой (предложение 3.4). Мы даём характеризацию векторных полей, допускающих безвихревую (теорема 4.3) и почти безвихревую аппроксимацию (теорема 3.5); эти утверждения формулируются в терминах векторных зарядов, ортогональных подпространствам пространства $\vec{C}(K)$, состоящим из векторных полей, допускающих соответствующую аппроксимацию. Для характеризации зарядов, ортогональных всем полям, безвихревым вблизи K, используются потоки Био–Савара (см. определение 4.1).

§5 посвящён обсуждению результатов, характеризующих гармоническую, почти гармоническую, безвихревую и почти безвихревую аппроксимации. Заряды, ортогональные полям, допускающим безвихревую или почти безвихревую аппроксимацию, соленоидальны, то есть их дивергенция, понимаемая в обобщённом смысле, равна нулю. Такие заряды охарактеризованы в теореме С.К.Смирнова (см. [3]); грубо говоря, такие заряды разлагаются на липшицевы кривые, поэтому свойства соответствующих аппроксимаций связаны с наличием на множестве K липшицевых кривых. Мы приводим формулировку теоремы С. К. Смирнова и даём комментарии, касающиеся дополнительных условий, налагаемых на эти кривые. Кроме того, мы приводим пример, иллюстрирующий нелокальность свойства гармонической аппроксимации и неравносильность задач гармонической и почти гармонической аппроксимаций. Наконец, оказывается, что свойства безвихревой и почти безвихревой аппроксимаций сохраняются при диффеоморфизмах (предложение 5.4).

§6 посвящён некоторым случаям, в которых задачи аппроксимации упрощаются. Предложение 6.3 указывает условие, достаточное

для равносильности задач безвихревой и почти безвихревой аппроксимаций. Этому условию, в частности, удовлетворяют "плоские" компактные множества – множества $K \subset \mathbb{R}^3$, содержащиеся в двумерной плоскости. Такие множества имеют нулевой объём, поэтому все четыре задачи безвихревой, почти безвихревой, гармонической и почти гармонической аппроксимаций на таких множествах равносильны. Предложение 6.1 характеризует свойство этих аппроксимаций на "плоских" компактных множествах.

В следующем параграфе мы введём обозначения и нужные нам понятия, а также напомним известные постановки задач приближения.

§2. Обозначения. Постановка задач гармонической и безвихревой аппроксимации

Пусть размерность d равна 2 или 3. Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^d$ через $\vec{C}(K)$ обозначим пространство векторных полей, заданных и непрерывных на K, то есть непрерывных отображений $\vec{f}\colon K \to \mathbb{R}^d$; стандартная норма в этом пространстве определяется так:

$$\|\vec{f}\|_{\vec{C}(K)} = \max_{x \in K} |\vec{f}(x)|,$$

где $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^d$. Меру Лебега в пространстве $\mathbb{R}^d$ мы будем обозначать через λ_d.

Через $\vec{M}(K)$ обозначим пространство векторных зарядов с носителями на K, то есть пространство векторнозначных счётно-аддитивных функций множества, определённых на σ-алгебре борелевских подмножеств множества K. Символ $\|\vec{\mu}\|$ обозначает полную вариацию заряда $\vec{\mu}$.

Напомним некоторые определения из теории потоков. Мы будем работать с обобщёнными функциями и обобщёнными векторными полями в трёхмерном пространстве. Итак, $\mathcal{D}$ есть пространство C^∞-гладких вещественнозначных функций, заданных на всём $\mathbb{R}^3$ и имеющих компактный носитель, а $\vec{\mathcal{D}}$ – пространство C^∞-гладких векторных полей в $\mathbb{R}^3$ с компактным носителем. Элементы этих пространств называются соответственно пробными функциями и пробными векторными полями. Сходимость в этих пространствах определяется стандартным способом. Далее, пространства $\mathcal{D}'$ и $\vec{\mathcal{D}}'$ суть пространства линейных функционалов, определённых и непрерывных (относительно упомянутой сходимости) на $\mathcal{D}$ и $\vec{\mathcal{D}}$ соответственно. Это

пространства обобщённых функций (или потоков размерности 0) и обобщённых векторных полей (или потоков размерности 1) соответственно. (В случае необходимости единообразного описания обобщённых функций и обобщённых векторных полей мы будем применять укороченный термин "поток".) Каждое обобщённое векторное поле можно записать в координатах, его компонентами будут обобщённые функции. Далее, $\mathcal{E}'$ и $\vec{\mathcal{E}}'$ – пространства обобщённых функций и векторных полей соответственно, имеющих компактный носитель (с обычной сходимостью).

Через $T[\varphi]$ мы обозначим результат применения потока $T \in \mathcal{D}'$ к пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}$. Аналогичный смысл будет иметь символ $\vec{T}[\vec{\varphi}]$ для $\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}'$ и $\vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}$.

Дифференциальные операторы на потоках определяются следующим образом:

$$\text{если } T \in \mathcal{D}', \text{ то } \nabla T \in \vec{\mathcal{D}}' \text{ и } \nabla T[\vec{\varphi}] = -T[\operatorname{div}\vec{\varphi}] \text{ для } \vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}; \tag{1}$$

$$\text{если } \vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}', \text{ то } \operatorname{div}\vec{T} \in \mathcal{D}' \text{ и } \operatorname{div}\vec{T}[\varphi] = -\vec{T}[\nabla\varphi] \text{ для } \varphi \in \mathcal{D}; \tag{2}$$

$$\text{если } \vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}', \text{ то } \operatorname{rot}\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}' \text{ и } \operatorname{rot}\vec{T}[\vec{\varphi}] = \vec{T}[\operatorname{rot}\vec{\varphi}] \text{ для } \vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}; \tag{3}$$

$$\text{если } T \in \mathcal{D}', \text{ то } \Delta T \in \mathcal{D}' \text{ и } \Delta T[\varphi] = T[\Delta\varphi] \text{ для } \varphi \in \mathcal{D}; \tag{4}$$

$$\text{если } \vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}', \text{ то } \vec{\Delta}\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}' \text{ и } \vec{\Delta}\vec{T}[\vec{\varphi}] = \vec{T}[\vec{\Delta}\vec{\varphi}] \text{ для } \vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}} \tag{5}$$

($\vec{\Delta} = \nabla\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}$ – покоординатный оператор Лапласа, определяемый следующим образом: если пробное поле $\vec{\varphi}$ в ортонормированном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ представляется как $\vec{\varphi} = \varphi_1\vec{e}_1 + \varphi_2\vec{e}_2 + \varphi_3\vec{e}_3$, то $\vec{\Delta}\vec{\varphi} = \Delta\varphi_1\vec{e}_1 + \Delta\varphi_2\vec{e}_2 + \Delta\varphi_3\vec{e}_3$).

Поток $\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}'$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div}\vec{T} = 0$.

Определим потенциалы Ньютона. Если φ – пробная функция или пробное векторное поле, то U^φ есть C^∞-гладкая функция или C^∞-гладкое векторное поле соответственно:

$$U^\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(y)\,dy}{|x-y|}, \ x \in \mathbb{R}^3.$$

Потенциал Ньютона пробной функции или пробного векторного поля бесконечно гладок, и при этом $\Delta U^{\varphi} = -4\pi\varphi$ при $\varphi \in \mathcal{D}$ и $\vec{\Delta} U^{\vec{\varphi}} = -4\pi\vec{\varphi}$ при $\vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}$. Координаты потенциала Ньютона векторного поля суть потенциалы Ньютона его координат.

Если T есть поток размерности 0 или 1 с компактным носителем, то его потенциал Ньютона есть поток размерности 0 или 1 соответственно, определяемый равенством

$$U^T[\varphi] = T[U^{\varphi}],\ \varphi \in \mathcal{D} \text{ или } \varphi \in \vec{\mathcal{D}} \text{ соответственно.}$$

Выражение $T[U^{\varphi}]$ имеет смысл, так как носитель потока T компактен. Потенциал Ньютона потока T вне носителя $\operatorname{supp} T$ есть C^{∞}-гладкая функция или векторное поле; кроме того, имеют место соотношения $\Delta U^T = -4\pi T$ при $T \in \mathcal{E}'$ и $\vec{\Delta} U^{\vec{T}} = -4\pi\vec{T}$ при $\vec{T} \in \vec{\mathcal{E}}'$.

Простейший пример одномерного потока – поток, порождаемый локально суммируемым векторным полем: если $\vec{T} \in L^1_{\mathrm{loc}}$, то $\vec{T}[\vec{\varphi}] = \int \left\langle \vec{T}, \vec{\varphi} \right\rangle d\lambda_3$ ($\langle a, b \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$). Далее, векторный заряд $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^3)$ задаёт одномерный поток по правилу

$$\vec{\mu}[\vec{\varphi}] = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle \vec{\varphi}, d\vec{\mu} \rangle,\ \vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}.$$

(выражение $\vec{\mu}[\vec{\varphi}]$ имеет смысл и для непрерывных $\vec{\varphi}$ с компактным носителем). Если пробное поле $\vec{\varphi}$ имеет в некоторой системе координат вид $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, а заряд $\vec{\mu}$ имеет в той же системе координат компоненты (μ_1, μ_2, μ_3), то $\vec{\mu}[\vec{\varphi}] = \int \varphi_1 d\mu_1 + \int \varphi_2 d\mu_2 + \int \varphi_3 d\mu_3$. Среди одномерных потоков, порождённых зарядами, особый интерес для нас представляют потоки, порождённые спрямляемыми липшицевыми путями: если $\vec{\Gamma}\colon [0, t] \to \mathbb{R}^3$ – такой путь, то есть отображение класса W^1_{∞} (или, что то же самое, липшицево), и $|\vec{\Gamma}'| = 1$ почти всюду на $[0, t]$, то оно задаёт поток размерности 1 по правилу

$$\vec{\Gamma}[\vec{\varphi}] = \int\limits_0^t \left\langle \vec{\Gamma}'(s), \vec{\varphi}(\vec{\Gamma}(s)) \right\rangle ds,\ \vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}.$$

При этом $\operatorname{div} \vec{\Gamma} = \delta_{\vec{\Gamma}(0)} - \delta_{\vec{\Gamma}(t)}$. Таким образом, спрямляемая петля есть соленоидальный поток: если $\vec{\Gamma}[0] = \vec{\Gamma}[t]$, то $\operatorname{div} \vec{\Gamma} = 0$.

Пусть S – гладкая ориентируемая поверхность с краем (двумерное подмногообразие в $\mathbb{R}^3$), $\vec{n}$ – непрерывное поле нормалей к S (сторона),

а dS – элемент её площади. Свяжем с этой поверхностью одномерный поток:

$$S[\vec{\varphi}] = \int\limits_S \langle \vec{\varphi}(p), \vec{n}(p) \rangle \, dS(p), \;\; \vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}.$$

Если правильно ориентировать край поверхности ∂S и связать с ним поток (являющийся суммой потоков, задаваемых спрямляемыми петлями), то формулу Стокса можно будет записать следующим образом:

$$\operatorname{rot} S = \partial S.$$

Наконец, пусть K – гладкое трёхмерное подмногообразие с краем в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим его характеристическую функцию $\mathbb{1}_K$ и порождённый ею поток размерности 0. Пусть ∂K – край многообразия K, ориентированный полем внешних нормалей. Теорему Остроградского–Гаусса теперь можно записать так:

$$\nabla \mathbb{1}_K = -\partial K.$$

Напомним постановки задач гармонической и безвихревой аппроксимации.

Определение 2.1. *Пусть V – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, а $\vec{f} \in \vec{C}^1(V)$ – векторное поле. Мы будем называть поле $\vec{f}$* гармоническим, *если на множестве V*

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{f} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{f} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Далее, если на V

$$\operatorname{rot} \vec{f} = 0, \tag{7}$$

то говорят, что поле $\vec{f}$ безвихревое.

Уравнения (6) означают, что поле $\vec{f}$ *локально* есть градиент скалярной гармонической функции. Это свойство можно принять за определение гармонического поля в пространстве $\mathbb{R}^d$ для произвольного d. Нетрудно видеть, что при $d = 2$ гармоничность поля $\vec{f} = (f_1, f_2)$ равносильна комплексной аналитичности функции $f_1 - if_2$. Поэтому естественным аналогом системы (6) при $d = 2$ можно считать систему уравнений Коши–Римана.

Определение 2.2. *Пусть K – компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, а векторное поле $\vec{f}$ задано и непрерывно на K. Мы будем говорить, что поле $\vec{f}$* допускает гармоническую аппроксимацию *на множестве K, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся поле $\vec{f}_\varepsilon$, заданное и гармоническое в некоторой окрестности V_ε множества K (зависящей, вообще говоря, от ε), такое, что $\|\vec{f}_\varepsilon - \vec{f}\|_{\vec{C}(K)} < \varepsilon$. Если произвольное поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает гармоническую аппроксимацию на K, то мы будем говорить, что* множество K обладает свойством гармонической аппроксимации.

Аналогичный смысл придаётся словам *поле $\vec{f}$ допускает безвихревую аппроксимацию на компактном множестве K* и *компактное множество K обладает свойством безвихревой аппроксимации*: соответствующие определения получаются из определения 2.2, если в нём требовать, чтобы поля $\vec{f}_\varepsilon$ были лишь безвихревыми, а не обязательно гармоническими.

Задачи гармонической (безвихревой) аппроксимации ставятся следующим образом. Даны компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ и поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$; требуется выяснить, допускает ли это поле гармоническую (безвихревую) аппроксимацию на K. Другая задача состоит в том, чтобы выяснить, обладает ли данное компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ свойством гармонической (безвихревой) аппроксимации.

Сейчас мы перейдём к задачам почти аппроксимации, получаемым из поставленных выше задач ослаблением условий, налагемых на аппроксимирующие поля.

§3. Задачи почти аппроксимации

Задачи почти аппроксимации получаются из задач гармонической и безвихревой аппроксимации, если на поля $\vec{f}_\varepsilon$ налагать требования малости их вихря и дивергенции вместо более сильного требования их равенства нулю.

Определение 3.1. *Пусть K – компактное множество в $\mathbb{R}^3$, а $\vec{f} \in \vec{C}(K)$. Предположим, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое векторное поле $\vec{f}_\varepsilon$, заданное и непрерывно дифференцируемое в окрестности множества K, что*

$$\|\vec{f} - \vec{f}_\varepsilon\|_{\vec{C}(K)} < \varepsilon, \tag{8}$$

$$\|\operatorname{rot}\vec{f}_\varepsilon\|_{\vec{C}(K)} < \varepsilon, \tag{9}$$

$$\|\operatorname{div}\vec{f}_\varepsilon\|_{C(K)} < \varepsilon. \tag{10}$$

В этом случае мы будем говорить, что поле $\vec{f}$ допускает аппроксимацию почти гармоническими векторными полями *или, короче, почти гармоническую аппроксимацию. Про семейство* $\{\vec{f}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ *мы будем говорить, что оно* доставляет почти гармоническую аппроксимацию *поля* $\vec{f}$.

Если любое векторное поле, заданное и непрерывное на K, *допускает почти гармоническую аппроксимацию на этом множестве, то мы будем говорить, что* K *обладает* свойством почти гармонической аппроксимации.

Если на поля $\vec{f}_\varepsilon$ налагаются только условия (8) и (9), мы получаем задачи почти безвихревой аппроксимации (условие на дивергенцию отбрасывается). Термины *поле* $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ *допускает почти безвихревую аппроксимацию* и *множество* $K \subset \mathbb{R}^3$ *обладает свойством почти безвихревой аппроксимации* понимаются аналогично определению 3.1.

Задачи почти гармонической (почти безвихревой) аппроксимации ставятся следующим образом: даны компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ и поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$; требуется выяснить, допускает ли оно почти гармоническую (почти безвихревую) аппроксимацию на K; другая задача состоит в том, чтобы выяснить, обладает ли данное компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ свойством почти гармонической (почти безвихревой) аппроксимации.

Отметим, что определение почти гармонической аппроксимации можно переформулировать следующим образом: поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает почти гармоническую аппроксимацию, если найдётся такая последовательность векторных полей $\vec{f}_m$, $m = 1, 2, \ldots$, заданных и непрерывно дифференцируемых в окрестностях множества K, что

$$\vec{f}_m \xrightarrow{m\to\infty} \vec{f}, \quad \operatorname{rot}\vec{f}_m \xrightarrow{m\to\infty} 0 \ \text{ по норме пространства } \vec{C}(K)$$

и

$$\operatorname{div}\vec{f}_m \xrightarrow{m\to\infty} 0 \ \text{ по норме пространства } C(K);$$

про последовательность $\vec{f}_m$ мы будем также говорить, что она *доставляет почти гармоническую аппроксимацию* поля $\vec{f}$. Аналогичное замечание касается и почти безвихревой аппроксимации; определения

гармонической и безвихревой аппроксимаций также допускают очевидные переформулировки в секвенциальных терминах.

Отметим простейшее свойство полей, допускающих почти гармоническую (почти безвихревую) аппроксимацию.

Предложение 3.2. *Множество векторных полей, допускающих почти гармоническую (почти безвихревую) аппроксимацию на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^3$, есть замкнутое линейное подпространство в $\vec{C}(K)$.*

По аналогии с поставленными выше задачами можно сформулировать и задачу *почти аналитической* аппроксимации на комплексной плоскости.

Пусть K – компактное подмножество комплексной плоскости, а комплекснозначная функция f задана и непрерывна на K. Напомним, что, по определению, функция f допускает аналитическую аппроксимацию, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся комплекснозначная функция f_ε, аналитическая в окрестности множества K (зависящей, вообще говоря, от ε), такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_{C(K)} < \varepsilon$. Мы будем говорить, что f допускает почти аналитическую аппроксимацию на K, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся комплекснозначная функция f_ε, заданная в окрестности множества K (также зависящей, вообще говоря, от ε), имеющая в ней непрерывные первые производные и такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_{C(K)} < \varepsilon$ и $\|\bar{\partial} f_\varepsilon\|_{C(K)} < \varepsilon$. Постановка задач аналитической и почти аналитической аппроксимаций аналогична указанным выше постановкам.

Оказывается, что в двумерном случае задачи аналитической и почти аналитической аппроксимаций равносильны. Напомним, что в двумерном случае задача гармонической аппроксимации векторного поля $\vec{f} = (f_1, f_2)$ равносильна задаче аналитической аппроксимации функции $f = f_1 - i f_2$ на множестве K. Поэтому в двумерном случае задачи гармонической и почти гармонической аппроксимации равносильны.

Предложение 3.3. *Комплекснозначная функция f, заданная на компактном множестве $K \subset \mathbb{C}$, допускает почти аналитическую аппроксимацию, если и только если она допускает аналитическую аппроксимацию.*

Доказательство. Предположим, что функция f допускает почти аналитическую аппроксимацию. Пусть $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – семейство функций, доставляющее почти аналитическое приближение функции f. Будем

считать, что функция f_ε задана на открытом множестве V_ε, содержащем K, причём $\|\bar\partial f_\varepsilon\|_{L^\infty(V_\varepsilon)} < \varepsilon$; будем считать, что все множества V_ε имеют правильные границы и ограничены в совокупности; также можно считать, что функции f_ε непрерывны вплоть до границ множеств V_ε. Представим функцию f_ε внутри множества V_ε по формуле Коши–Грина:

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial V_\varepsilon} \frac{f_\varepsilon(\zeta)\ d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{V_\varepsilon} \frac{\bar\partial f_\varepsilon(\zeta)\ d\lambda_2(\zeta)}{\zeta - z},\ z \in V_\varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что второе интегральное слагаемое будет равномерно и сколь угодно малым на K при достаточно малых ε. Поэтому функции $\tilde f_\varepsilon$, заданные формулой $\tilde f_\varepsilon(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial V_\varepsilon} \frac{f_\varepsilon(\zeta)\ d\zeta}{\zeta - z},\ z \in V_\varepsilon$, также равномерно стремятся к f на K при $\varepsilon \to 0$, будучи аналитическими вблизи K. □

Итак, задача о почти аналитическом (то есть почти гармоническом) приближении на плоскости равносильна задаче об аналитической (гармонической) аппроксимации. Далее мы увидим, что в $\mathbb{R}^3$ задачи гармонической и почти гармонической аппроксимации неравносильны. Возникает естественный вопрос: почему нельзя приспособить доказательство последнего предложения для доказательства равносильности задач гармонической и почти гармонической аппроксимаций в $\mathbb{R}^3$? В самом деле, трёхмерная формула Коши–Грина (см., например, [1]) выражает значение поля $\vec f$ внутри области с достаточно гладкой границей через его значения на её границе и значения его вихря и дивергенции внутри этой области:

$$\begin{aligned}\vec f(p) = {} & \frac{1}{4\pi}\nabla_p \int\limits_{\partial V} \frac{\langle \vec f(q), \vec n(q)\rangle}{|q-p|}\ dS(q) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_p \int\limits_{\partial V} \frac{\vec f(q)\times \vec n(q)}{|q-p|}\ dS(q) \\ & - \frac{1}{4\pi}\nabla_p \int\limits_{V} \frac{\operatorname{div}\vec f(q)}{|q-p|}\ d\lambda_3(q) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_p \int\limits_{V} \frac{\operatorname{rot}\vec f(q)}{|q-p|}\ d\lambda_3(q) \\ & = I_1^V \vec f(p) + I_2^V \vec f(p) + I_3^V \vec f(p) + I_4^V \vec f(p),\ p \in V. \quad (11)\end{aligned}$$

(Мы обозначили через $I_1^V \vec f$ и $I_2^V \vec f$ поверхностные интегралы, а через $I_3^V \vec f$ и $I_4^V \vec f$ – объёмные.) Для переноса двумерного доказательства следовало бы приближать поле $\vec f$ полями вида $I_1^{V_\varepsilon}\vec f_\varepsilon + I_2^{V_\varepsilon}\vec f_\varepsilon$, где $\{\vec f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$

– семейство полей, доставляющее почти гармоническое приближение, а V_ε – некоторые окрестности множества K. Однако поле вида

$$I_2^V \vec{f}_\varepsilon(p) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_p \int\limits_{\partial V} \frac{\vec{f}_\varepsilon(q) \times \vec{n}(q)}{|q-p|}\, dS(q)\ (p \in V)$$

не является, вообще говоря, гармоническим. Это обстоятельство существенно отличает трёхмерную задачу от двумерной. Заметим, между прочим, что трудности обычно возникают именно при работе с этим полем: поле вида $I_1^V \vec{f}$ всегда гармоническое вне ∂V, а интегралы вида $I_3^V \vec{f}$ и $I_4^V \vec{f}$ можно оценить, если, например, объём $\lambda_3(V)$ мал; однако с полем $I_2^V \vec{f}$ в общем случае этого нельзя сделать и, повторим, оно не является, вообще говоря, гармоническим; в §6 мы, тем не менее, будем иметь дело со случаями, когда это слагаемое можно оценить. Сейчас мы приведём утверждение, доказательство которого основано на формуле (11).

Предложение 3.4. *Пусть компактное множество $K \in \mathbb{R}^3$ имеет нулевой объём.*

1. *Если поле $\vec{f}$ допускает на K почти безвихревое приближение, то оно допускает и почти гармоническое приближение.*
2. *Если поле $\vec{f}$ допускает приближение безвихревыми полями, то оно допускает и приближение гармоническими полями.*

Дадим схему доказательства. Оно повторяет расуждения двумерной теоремы Гартогса–Розенталя (см. [4]). Оба пункта доказываются одинаково.

Пусть семейство полей $\{\vec{f}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ доставляет, скажем, почти безвихревое приближение заданного поля $\vec{f}$. Пусть поле $\vec{f}_\varepsilon$ задано и гладко вблизи замыкания множества V_ε, причём $|\operatorname{rot} \vec{f}_\varepsilon| < \varepsilon$, $|\operatorname{div} \vec{f}_\varepsilon| < \varepsilon$ на V_ε; можно считать, что множества V_ε имеют правильные границы. Запишем поле $\vec{f}_\varepsilon$ по формуле Коши–Грина (11). Пусть $\vec{g}_\varepsilon = I_1^{V_\varepsilon} \vec{f}_\varepsilon + I_2^{V_\varepsilon} \vec{f}_\varepsilon + I_4^{V_\varepsilon} \vec{f}_\varepsilon = \vec{f}_\varepsilon + \frac{1}{4\pi} \nabla_p \int\limits_{V_\varepsilon} \frac{\operatorname{div}\ \vec{f}_\varepsilon(q)}{|q-p|}\, d\lambda_3(q)$. Поле $\vec{g}_\varepsilon$ задано и гладко в окрестности множества K. Нетрудно видеть, что $\operatorname{div} \vec{g}_\varepsilon = 0$, а $\operatorname{rot} \vec{g}_\varepsilon = \operatorname{rot} \vec{f}_\varepsilon$. Наконец, можно выбирать окрестности V_ε с настолько малым объёмом, что поле $\frac{1}{4\pi} \nabla_p \int\limits_{V_\varepsilon} \frac{\operatorname{div}\ \vec{f}_\varepsilon(q)}{|q-p|}\, d\lambda_3(q)$ равномерно близко

к нулю на K. Поэтому если семейство $\{\vec{f}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ доставляло почти безвихревое приближение поля $\vec{f}$, то семейство $\{\vec{g}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ доставляет почти гармоническое приближение этого поля. Рассуждение, доказывающее равносильность безвихревого и гармонического приближения на компактном множестве нулевого объёма, проводится аналогично.

Теперь мы дадим условие, необходимое и достаточное для того, чтобы поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускало *почти безвихревую аппроксимацию.* В этих условиях участвуют заряды, ортогональные подпространству пространства $\vec{C}(K)$, состоящему из векторных полей, допускающих почти безвихревую аппроксимацию.

Теорема 3.5. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – компактное множество.*

1. *Поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает почти безвихревое приближение в том и только в том случае, если $\int\limits_K \langle \vec{f}, d\vec{\mu} \rangle = 0$ для любого заряда $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, для которого существует заряд $\vec{\nu} \in \vec{M}(K)$, такой, что $\operatorname{rot} \vec{\nu} = \vec{\mu}$ (под $\operatorname{rot} \vec{\nu}$ мы понимаем обобщённый вихрь заряда $\vec{\nu}$, заданного в $\mathbb{R}^3$, совпадающего с $\vec{\nu}$ на K и исчезающего вне K, см. формулу* (3)).
2. *Любое векторное поле из $\vec{C}(K)$ допускает почти безвихревое приближение в том и только в том случае, если не существует векторного заряда $\vec{\nu} \in \vec{M}(K)$ такого, что $\vec{\mu} = \operatorname{rot} \vec{\nu} \in \vec{M}(K)$ и $\vec{\mu} \neq 0$.*

Теорема следует из стандартных соображений двойственности. Для доказательства достаточности в первой части теоремы нужно рассмотреть множество $A_V = \{\operatorname{rot} \vec{g} \mid \vec{g} \in \vec{C}^1(\overline{V}),\ |\vec{g} - \vec{f}| < \varepsilon \text{ в } \overline{V}\} \subset \vec{C}(K)$, где V – некоторая окрестность множества K, и выразить в двойственных терминах величину $\operatorname{dist}(A_V, 0)$.

Из теоремы 3.5 можно вывести, что свойство почти безвихревой аппроксимации локально (точный смысл понятия локальности см. ниже в формулировке теоремы 3.6): достаточно расщепить заряд $\vec{\nu}$. Свойство локальности, однако, имеет место и для почти гармонической аппроксимации; мы приведём доказательство, общее для почти гармонической и почти безвихревой аппроксимаций, и не опирающееся на теорему 3.5.

Теорема 3.6. *Пусть* $\vec{f} \in \vec{C}(K)$. *Пусть* $W_1, \dots, W_l$ $(l \in \mathbb{N})$ – *открытые множества,* $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} W_j$.

1. *Предположим, что для каждого* $j = 1, \dots, l$ *поле* $\vec{f}$ *допускает почти гармоническую аппроксимацию на множестве* $\overline{K \cap W_j}$. *Тогда поле* $\vec{f}$ *допускает и почти гармоническую аппроксимацию на множестве* K.
2. *Предположим, что для каждого* $j = 1, \dots, l$ *поле* $\vec{f}$ *допускает почти безвихревую аппроксимацию на множестве* $\overline{K \cap W_j}$. *Тогда поле* $\vec{f}$ *допускает и почти безвихревую аппроксимацию на множестве* K.

Доказательство. Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Выберем *и зафиксируем* разбиение единицы, подчинённое покрытию $(W_1, \dots, W_l)$, то есть набор гладких неотрицательных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_l \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp} \varphi_j \subset W_j$, $\varphi_1 + \dots + \varphi_l = 1$ около K, $0 \le \varphi_j \le 1$, $j = 1, \dots, l$. Пусть $K_j = K \cap \operatorname{supp} \varphi_j$.

По условию, поле $\vec{f}$ допускает почти гармоническую аппроксимацию на множествах K_j. Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть гладкие поля $\vec{h}_\varepsilon^j$ определены в окрестностях множеств K_j и

$$\|\vec{h}_\varepsilon^j - \vec{f}\|_{\vec{C}(K_j)} < \varepsilon, \ \|\operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon^j\|_{\vec{C}(K_j)} < \varepsilon, \ \|\operatorname{div} \vec{h}_\varepsilon^j\|_{C(K_j)} < \varepsilon, \ j = 1, \dots, l. \tag{12}$$

Можно считать, что поля $\vec{h}_\varepsilon^j$ определены на всём пространстве $\mathbb{R}^3$ и гладки.

Пусть $\vec{h}_\varepsilon = \sum\limits_{j=1}^{l} \varphi_j \vec{h}_\varepsilon^j$. Покажем, что величины

$$\|\vec{h}_\varepsilon - \vec{f}\|_{\vec{C}(K)}, \quad \|\operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon\|_{\vec{C}(K)}, \quad \|\operatorname{div} \vec{h}_\varepsilon\|_{C(K)}$$

становятся сколь угодно малыми при малых ε, этого достаточно, чтобы поле $\vec{f}$ допускало почти гармоническую аппроксимацию на множестве K.

Сперва оценим $\|\vec{f} - \vec{h}_\varepsilon\|_{\vec{C}(K)}$. На множестве K справедлива формула

$$\vec{h}_\varepsilon - \vec{f} = \sum_{j=1}^{l} \varphi_j (\vec{h}_\varepsilon^j - \vec{f}),$$

так как $\sum\limits_{j=1}^{l} \varphi_j = 1$ на K. Заметим, что $|\varphi_j(\vec{h}_\varepsilon^j - \vec{f})| \le \varepsilon$ *на всём* K. Действительно, $|\vec{h}_\varepsilon^j - \vec{f}| \le \varepsilon$ и $0 \le \varphi_j \le 1$ на множестве K_j, а вне этого множества $\varphi_j = 0$. Поэтому $\|\vec{h}_\varepsilon - \vec{f}\|_{\vec{C}(K)} \le l\varepsilon$.

Оценим $\|\operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon\|_{\vec{C}(K)}$. Верно равенство

$$\operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon = \sum_{j=1}^{l} \operatorname{rot}(\varphi_j \vec{h}_\varepsilon^j) = \sum_{j=1}^{l} \varphi_j \operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon^j + \sum_{j=1}^{l} \nabla\varphi_j \times \vec{h}_\varepsilon^j. \tag{13}$$

Оценим первую сумму на множестве K. Для этого заметим, что

$$|\varphi_j \operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon^j| < \varepsilon$$

на всём множестве K: на K_j верны оценки $|\operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon^j| < \varepsilon$, $0 \le \varphi_j \le 1$, а вне K_j функция φ_j равна нулю. Поэтому

$$\left| \sum_{j=1}^{l} \varphi_j \operatorname{rot} \vec{h}_\varepsilon^j \right| \le l\varepsilon.$$

Чтобы оценить вторую сумму в (13), заметим, что $\sum\limits_{j=1}^{l} \nabla\varphi_j = 0$ на множестве K, так как $\sum\limits_{j=1}^{l} \varphi_j = 1$ около K. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{l} \nabla\varphi_j \times \vec{h}_\varepsilon^j = \sum_{j=1}^{l} \nabla\varphi_j \times (\vec{h}_\varepsilon^j - \vec{f})$$

и

$$\left| \sum_{j=1}^{l} \nabla\varphi_j \times \vec{h}_\varepsilon^j \right| \le \sum_{j=1}^{l} |\nabla\varphi_j| \cdot \left| \vec{h}_\varepsilon^j - \vec{f} \right|.$$

Пусть $C = \max\limits_j \max\limits_{\mathbb{R}^3} |\nabla\varphi_j|$. Снова неравенство $|\nabla\varphi_j| \cdot \left| \vec{h}_\varepsilon^j - \vec{f} \right| \le C\varepsilon$ верно на всём множестве K, и окончательно

$$\left| \sum_{j=1}^{l} \nabla\varphi_j \times \vec{h}_\varepsilon^j \right| \le Cl\varepsilon.$$

Постоянная C зависит лишь от разбиения единицы $\{\varphi_j\}_{j=1}^{l}$ и не зависит от ε и выбора полей $\vec{h}_\varepsilon^j$. Собирая вместе полученные оценки,

заключаем, что $\|\operatorname{rot}\vec{h}_\varepsilon\|_{\vec{C}(K)} \leq (C+1)l\varepsilon$, последняя величина становится сколь угодно малой при выборе малых ε.

Оценки для $\operatorname{div}\vec{h}_\varepsilon$ проводятся аналогично с учётом равенства

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{h}) = \left\langle \nabla\varphi, \vec{h} \right\rangle + \varphi \operatorname{div}\vec{h}. \qquad \square$$

Замечание. Доказательство последней теоремы обобщается на довольно широкий класс систем дифференциальных уравнений. Мы не будем этого делать, однако отметим, что проведённое рассуждение годится и для доказательства свойства локальности почти аналитической аппроксимации на компактных подмножествах комплексной плоскости. Задача почти аналитической аппроксимации равносильна задаче аналитической аппроксимации (предложение 3.3). Поэтому свойство аналитической аппроксимации локально; этот факт составляет содержание теоремы Бишопа (см., напр., [4]).

Теперь мы обратимся к формулировке результатов, касающихся *безвихревой* аппроксимации.

§4. Безвихревая аппроксимация

В этом параграфе мы дадим условия, при которых возможна безвихревая аппроксимация на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^3$. Для этого нам понадобятся потоки Био–Савара, порождаемые соленоидальными потоками. Эти потоки хорошо известны в электродинамике: соленоидальные потоки отвечают, например, постоянным электрическим токам, а порождаемые ими потоки Био–Савара суть магнитные поля, создаваемые этими токами.

Определение 4.1. *Пусть $\vec{T} \in \vec{\mathcal{E}}'$ – обобщённое векторное поле (поток размерности 1) с компактным носителем. Поток*

$$BS^{\vec{T}} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot} U^{\vec{T}} \in \vec{\mathcal{D}}'$$

называется потоком Био–Савара, порождённым потоком $\vec{T}$.

Напомним, что определение потенциала Ньютона $U^{\vec{T}}$ было дано в §2.

Предложение 4.2 (простейшие свойства полей Био–Савара)**.** *Пусть $\vec{T}$ принадлежит $\vec{\mathcal{E}}'$, а $\operatorname{div}\vec{T} = 0$.*

1. *Вне множества* $\operatorname{supp}\vec{T}$ *поток* $BS^{\vec{T}}$ *совпадает с некоторым* C^∞*-гладким векторным полем.*
2. *Справедливы равенства* $\operatorname{rot} BS^{\vec{T}} = \vec{T},\ \operatorname{div} BS^{\vec{T}} = 0.$
3. *Поле* $BS^{\vec{T}}$ *гармонично вне множества* $\operatorname{supp}\vec{T}$.
4. (Закон взаимности для полей Био-Савара). *Если* $\vec{T}, \vec{S} \in \vec{\mathcal{E}}'$ *и* $\operatorname{supp}\vec{T} \cap \operatorname{supp}\vec{S} = \varnothing$, *то* $\vec{T}[BS^{\vec{S}}] = \vec{S}[BS^{\vec{T}}]$ (*значения* $\vec{T}[BS^{\vec{S}}]$ *и* $\vec{S}[BS^{\vec{T}}]$ *определены корректно, например,* $BS^{\vec{T}}$ *в окрестности множества* $\operatorname{supp}\vec{S}$ *есть гладкое векторное поле*).
5. *Пусть* $\vec{\mu} \in \vec{M}(\mathbb{R}^3)$ *и* $\operatorname{supp}\vec{\mu}$ – *компактное множество. Тогда* $BS^{\vec{\mu}}$ *совпадает в* $\mathbb{R}^3$ *с локально-суммируемым векторным полем.*

Определив потенциалы Био–Савара, мы можем сформулировать условия, характеризующие заряды, ортогональные всем полям, безвихревым в окрестности компактного множества K.

Теорема 4.3. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^3$ – *компактное множество,* $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$. *Следующие утверждения равносильны*:

(i) $\vec{\mu}[\vec{f}] = 0$ *для любого поля* $\vec{f}$, *гладкого и безвихревого вблизи* K;

(ii)
$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{\mu} = 0, \\ \exists\ \psi \in C^\infty(K^c)\ :\ BS^{\vec{\mu}} = \nabla\psi \text{ вне } K. \end{cases} \tag{14}$$

(iii) *для любой окрестности* V *множества* K *найдётся такой векторный заряд* $\vec{\nu} = \vec{\nu}_V$ *с носителем в* V, *что* $\operatorname{rot}\vec{\nu} = \vec{\mu}$.

Применяя теорему Хана–Банаха, заключаем, что любое векторное поле, принадлежащее $\vec{C}(K)$, допускает равномерную аппроксимацию безвихревыми векторными полями в том и только в том случае, если не существует заряда $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, обладающего свойствами (ii) или (iii) теоремы 4.3.

В [1] выводятся условия, характеризующие заряды $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, ортогональные полям, гармоническим около K (ср. с (14)):

$$\begin{cases} \operatorname{div} U^{\vec{\mu}} = 0 \text{ вне } K, \\ \exists\ \psi \in C^\infty(K^c)\ :\ BS^{\vec{\mu}} = \nabla\psi \text{ вне } K. \end{cases}$$

В [1], кроме того, выводится следующее утверждение, обобщающее теорему Гартогса–Розенталя. Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$

будем называть *невидимым*, если найдётся декартова система координат $Oxyz$ такая, что площади проекций множества K на плоскости Oxy, Oyz, Ozx равны нулю. *Если компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ невидимо, то оно обладает свойством гармонической аппроксимации.*

Отсюда мы можем вывести такое утверждение.

Следствие 4.4. *Если компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ невидимо, то не существует заряда $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$, обладающего свойствами* (ii) *или* (iii) *теоремы* 4.3.

Действительно, если множество K обладает свойством гармонической аппроксимации, то оно обладает и свойством безвихревой аппроксимации.

В частности, невидимое множество K обладает и свойством почти безвихревой аппроксимации, и, согласно теореме 3.5, мы можем заключить, что *если множество K невидимо, то не существует такого заряда $\vec{\nu} \in \vec{M}(K)$, что* $0 \neq \operatorname{rot} \vec{\nu} \in \vec{M}(K)$.

§5. Замечания, примеры и следствия

В этом параграфе мы изложим некоторые соображения, делающие более наглядными условия теорем 3.5 и 4.3. Кроме того, мы продемонстрируем неравносильность задач обычной аппроксимации и почти аппроксимации в трёхмерном пространстве.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – компактное множество. Положим

$$\operatorname{sol} K = \{\vec{\mu} \in \vec{M}(K) \colon \operatorname{div} \vec{\mu} = 0\}.$$

Очевидно, заряды $\vec{\mu}$, о которых идёт речь в теоремах 3.5 и 4.3, принадлежат $\operatorname{sol} K$, в то же время, вообще говоря, не все заряды из $\operatorname{sol} K$ удовлетворяют этим условиям.

В [3] доказана теорема, описывающая структуру соленоидальных зарядов. Мы воспроизведём здесь её формулировку, ограничиваясь только случаем зарядов с компактными носителями.

Определение 5.1. *Заряд $\vec{T} \in \vec{\mathcal{E}}'$ называется* элементарным соленоидом, *если существует такая функция $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, что*

1) *f липшицева и $\|f'\|_{L^\infty} \leq 1$;*

2) *для любого пробного поля* $\vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}$ *верно равенство*

$$\vec{T}[\vec{\varphi}] = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k} \int_{-k}^{k} \langle f'(s), \vec{\varphi}\,(f(s))\rangle\, ds$$

(*в частности, предел в правой части существует для любого пробного поля* $\vec{\varphi}$);

3) *полная вариация заряда* $\vec{T}$ *равна* 1;

4) $f(\mathbb{R}) \subset \operatorname{supp} \vec{T}$.

Таким образом, элементарный соленоид есть поток, совпадающий с чезаровским средним интегралов касательной составляющей пробного поля вдоль дуг некоторой липшицевой кривой. Циркуляция вдоль цикла есть частный случай элементарного соленоида. (Отметим, что в $\mathbb{R}^2$ всякий элементарный соленоид есть спрямляемый цикл.)

Через $\mathfrak{c}(K)$ обозначим множество элементарных соленоидов с носителями на K, наделённое слабой топологией, индуцированной из $\vec{M}(K)$.

Теорема 5.2. *Любой заряд* $\vec{T} \in \operatorname{sol}(K)$ *выпукло разлагается на элементарные соленоиды, то есть: существует такая мера* α *на* $\mathfrak{c}(K)$, *борелевская относительно слабой топологии на* $\mathfrak{c}(K)$, *что*

$$\vec{T} = \int_{\mathfrak{c}(K)} \vec{R}\; d\alpha(\vec{R}),$$

$$\|\vec{T}\| = \alpha(\mathfrak{c}(K))$$

(*интеграл в первом равенстве следует понимать в* $\vec{\mathcal{D}}$*-слабом смысле*).

В работе [2] построен пример компактного множества в $\mathbb{R}^3$, доказывающий нелокальность свойства гармонической аппроксимации в $\mathbb{R}^3$. Это множество (обозначим его через Σ_0) есть график функции двух переменных, определённой в круге: $\Sigma_0 = \{(x, y, F(x, y)) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, причём функция F непрерывна и $F(x, y) = 0$ при $(x, y) \in C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$; кроме того, F обладает таким свойством: на Σ_0 нет спрямляемых кривых, кроме постоянных (“одноточечных”) кривых и дуг окружности C. Функцию F можно описать следующим образом: вначале возьмём функцию $F_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такую, что на её графике вообще нет непостоянных спрямляемых кривых (построение такой

функции см. в [2]). Далее, положим $F = (\chi F_0)|_{\bar{B}_2(0,1)}$, где χ – гладкая функция двух переменных, равная нулю на C и не обращающаяся в нуль вне C, а $\bar{B}_2(0,1)$ – замкнутый круг единичного радиуса с центром в нуле в плоскости Oxy. Мы можем для определённости считать, что $F > 0$ в открытом круге $B_2(0,1)$. Рассмотрим замкнутую кривую $\vec{\Gamma}:\ \vec{\Gamma}(s) = (\cos s, \sin s, 0),\ 0 \le s \le 2\pi$, и отождествим её с порождённым ею потоком.

Так как $\lambda_3(\Sigma_0) = 0$, то задача приближения гармоническими векторными полями на Σ_0 равносильна задаче приближения безвихревыми полями (предложение 3.4). А так как существует система вложенных односвязных окрестностей множества Σ_0, пересечение которых есть Σ_0, то задача приближения безвихревыми векторными полями равносильна задаче приближения градиентами. Векторные заряды, ортогональные градиентам, описываются условием $\operatorname{div}\vec{\mu} = 0$, и из теоремы 5.2 следует, что единственный (с точностью до домножения на константу) такой заряд с носителем на Σ_0 есть $\vec{\Gamma}$. Таким образом, поле $\vec{f} \in \vec{C}(\Sigma_0)$ допускает приближение безвихревыми полями в том и только в том случае, если $\vec{\Gamma}[\vec{f}] = 0$. В то же время, если положить $\Sigma_0^+ = \{(x,y,z) \in \Sigma_0 \mid x \ge -\frac{1}{2}\}$, $\Sigma_0^- = \{(x,y,z) \in \Sigma_0 \mid x \le \frac{1}{2}\}$, то на множествах $\Sigma_0^{\pm}$ любое непрерывное векторное поле допускет безвихревое приближение, так как опять же, по теореме 5.2, на них нет ненулевых соленоидальных зарядов. Таким образом, свойство приближения безвихревыми полями имеет нелокальный характер.

Можно, однако, сказать больше: *любое компактное множество K, вложенное в Σ_0, отличное от Σ_0, обладает свойством безвихревого приближения.* Действительно, если K не содержит множество $\operatorname{supp}\vec{\Gamma}$, то на K любое непрерывное поле можно приблизить даже градиентами; если же $\operatorname{supp}\vec{\Gamma} \subset K$ и $K \ne \Sigma_0$, то нетрудно построить поле $\vec{f}_0$, безвихревое в окрестности множества K и такое, что $\vec{\Gamma}[\vec{f}_0] \ne 0$, скажем, $\vec{\Gamma}[\vec{f}_0] = 1$ (так как петля $\vec{\Gamma}$ не стягиваема в окрестности множества K). Тогда произвольное поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ можно представить в виде $\vec{f} = \vec{\Gamma}[\vec{f}]\,\vec{f}_0 + \vec{f}_1$, где $\vec{\Gamma}[\vec{f}_1] = 0$. Теперь поле $\vec{f}_1$ можно равномерно на K приблизить градиентом, а поле $\vec{\Gamma}[\vec{f}]\,\vec{f}_0$ само безвихревое, и поле $\vec{f}$ допускает аппроксимацию безвихревыми полями.

Множество Σ_0 обладает свойством почти безвихревой аппроксимации. Действительно, это свойство локально (теорема 3.6), а любая отличная от Σ_0 компактная часть K им обладает, так как K обладает

даже свойством гармонической аппроксимации. Мы можем вывести отсюда такое следствие. Пусть

$$V = \left\{(x,y,z)\colon (x,y) \in \bar{B}_2(0,1),\ 0 \le z \le F(x,y)\right\}.$$

Тогда множество V не есть множество конечного периметра, то есть $\nabla \mathbb{1}_V$ не есть заряд. Действительно, если $\vec{\nu}_0 = \nabla \mathbb{1}_V$ является зарядом, то рассмотрим плоскую поверхность S, ограниченную кривой $\vec{\Gamma}$, и поле нормалей $(0,0,1)$ к S; теперь S порождает одномерный поток и $\operatorname{rot} S = \vec{\Gamma}$. Пусть $\vec{\nu} = \vec{\nu}_0 - S$. Тогда $\operatorname{supp}\vec{\nu} \subset \Sigma_0$, $\vec{\nu}$ есть заряд, и $\vec{\mu} = \operatorname{rot}\vec{\nu} = \operatorname{rot}\nabla\mathbb{1}_V - \operatorname{rot} S = -\vec{\Gamma}$ – тоже заряд, а тогда множество Σ_0 не обладает свойством почти безвихревой аппроксимации.

Итак, в отличие от двумерной задачи, где аналитическая и почти аналитическая аппроксимации равносильны, в трёхмерном случае гармоническая и почти гармоническая аппроксимации неравносильны.

Условие (ii) теоремы 4.3 означает следующее: компактное множество K обладает свойством безвихревой аппроксимации в том и только в том случае, если отображение $BS\colon \operatorname{sol} K \to H^1(K^c)$, переводящее соленоидальный заряд $\vec{\mu}$ в его поле Био–Савара $BS^{\vec{\mu}}|_{K^c}$, является инъективным – так как пространство когомологий H^1 определяется именно как

$$\left\{\begin{matrix}\text{Замкнутые гладкие}\\ \text{векторные поля}\end{matrix}\right\} \Big/ \left\{\begin{matrix}\text{Точные гладкие}\\ \text{векторные поля}\end{matrix}\right\}$$

и поле $BS^{\vec{\mu}}$ замкнуто вне $\operatorname{supp}\vec{\mu}$, если $\operatorname{div}\vec{\mu} = 0$. Таким образом, если, например, на K есть бесконечно много попарно непересекающихся замкнутых липшицевых кривых, а размерность пространства $H^1(K^c)$ конечна, то на K уже нет безвихревой аппроксимации.

Скажем несколько слов об условии (iii). Напомним, что характерный пример пары зарядов $\vec{\mu}, \vec{\nu}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{rot}\vec{\nu} = \vec{\mu}$, доставляют заряд $\vec{\nu}$, порождённый гладким ориентированным двумерным многообразием S с краем, и заряд $\vec{\mu}$, порождённый краем ∂S этого многообразия (см. §2). Поэтому равенство $\operatorname{rot}\vec{\nu} = \vec{\mu}$ можно грубо истолковать следующим образом: заряд $\vec{\nu}$ есть "поверхность, затягивающая" заряд $\vec{\mu}$. Условие $\|\vec{\nu}\| < \infty$ означает в таком случае "конечную площадь" этой поверхности. Тогда условие (iii) теоремы 4.3 нужно понимать так: заряд $\vec{\mu}$ можно "затянуть плёнкой конечной площади" в любой окрестности множества K. А условие из теоремы 3.5 означает, грубо говоря, что заряд $\vec{\mu}$ можно "затянуть плёнкой конечной площади" на самом множестве K.

Напомним, что в двумерном случае задача гармонической аппроксимации сводится к задаче об аппроксимации аналитическими функциями. Отметим, что ответ на вопрос об аналитической аппроксимации можно дать следующим образом: компактное множество K обладает свойством аналитической аппроксимации в том и только в том случае, если отображение $\hat{}\colon M(K) \to \mathcal{H}(K^c)$, переводящее комплексный заряд μ в его преобразование Коши $\hat{\mu} = \mu * \frac{1}{z}$, является инъекцией. Однако в двумерном случае выводятся ёмкостные условия, равносильные этой инъективности. Мы полагаем, что в трёхмерном случае невозможны условия ёмкостного вида для задачи равномерной безвихревой (или гармонической) аппроксимации. Причина этого, грубо говоря, в том, что нужно очень немного, чтобы на K не было безвихревой аппроксимации: достаточно наличия на K нескольких (конечного числа), скажем, замкнутых липшицевых кривых, ограничивающих (в смысле теории гомологий) в любой окрестности множества K.

Чтобы сделать условия теоремы 4.3 ощутимее, мы расширим коллекцию примеров, обобщив идеи построения поверхности Σ_0. Пусть W – область в $\mathbb{R}^2$ с правильной границей, вообще говоря, неодносвязная. Отметим в W несколько (конечное число) гладких простых замкнутых попарно непересекающихся кривых $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Пусть функция $F_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такова, что на её графике нет непостоянных спрямляемых кривых, а $\chi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, обращающаяся в нуль в точности на множестве $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$. Пусть $F = (\chi F_0)|_{\overline{W}}$ и

$$\Sigma = \left\{(x,\ y,\ F(x,y)) : (x,y) \in \overline{W}\right\}.$$

Пусть $\vec{\Gamma}_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$ – ориентированные циклы на Σ, соответствующие кривым C_j; отождествим $\vec{\Gamma}_j$ с порождёнными ими потоками.

График функции F есть образ графика функции $F_0|_{\overline{W}}$ при отображении $(x, y, z) \mapsto (x, y, \chi(x, y)z)$. При $(x, y) \in \overline{W} \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n)$ это отображение есть диффеоморфизм; поэтому на Σ нет непостоянных спрямляемых кривых, кроме дуг кривых $\vec{\Gamma}_j$.

Очевидно, что множество Σ имеет нулевой объём, поэтому на Σ задача гармонической аппроксимации равносильна задаче безвихревой аппроксимации. Следующее предложение характеризует это свойство в гомологических терминах.

Предложение 5.3. *Множество Σ обладает свойством безвихревой аппроксимации в том и только в том случае, если циклы $C_1, C_2, ..., C_n$ линейно независимы в пространстве гомологий $H_1(W)$.*

Доказательство сводится к несложному анализу линейных зависимостей полей Био–Савара, порождённых циклами $\vec{\Gamma}_j$.

Из всего сказанного выше можно сделать такой вывод: свойство безвихревой аппроксимации на компактном множестве зависит, во-первых, от наличия на нём спрямляемых кривых, то есть от его метрических характеристик, во-вторых, от взаимного расположения этих кривых, то есть от его топологических характеристик. И метрические, и топологические свойства сохраняются при диффеоморфизмах, поэтому сохраняется и свойство безвихревой аппроксимации. Дадим точную формулировку.

Предложение 5.4. *Пусть K_1, K_2 – компактные множества в $\mathbb{R}^3$, V_1, V_2 – открытые множества, $K_j \subset V_j$ и ψ – диффеоморфизм множества V_1 на V_2, $\psi(K_1) = K_2$. Если K_2 обладает свойством безвихревой аппроксимации, то и K_1 им обладает. Кроме того, если K_2 обладает свойством почти безвихревой аппроксимации, то и K_1 им обладает.*

Строгое доказательство этого утверждения можно получить из следующих соображений. Безвихревое поле локально есть градиент. Градиенты преобразуются при диффеоморфизмах следующим образом: $\nabla(\varphi(\psi))(p) = D^T\psi(p) \cdot \nabla\varphi(\psi(p))$; по такому же правилу преобразуются и поля, *локально* являющиеся градиентами. Поэтому если мы хотим доставить безвихревое приближение на K_1 для поля $\vec{f}_1 \in \vec{C}(K_1)$, нужно приблизить безвихревыми полями поле $\vec{f}_2(q) = (D\psi^{-1})^T(q)\,\vec{f}_1(\psi^{-1}(q))$ $(q \in K_2)$ на множестве K_2, а затем "пересадить" приближающие поля обратно на K_1 естественным образом. Рассуждение для почти безвихревых приближений основывается на той же идее.

Наконец, отметим, что свойство гармонической аппроксимации для множеств нулевого объёма также сохраняется при диффеоморфизмах. Это следует из предложений 5.4 и 3.4.

§6. Плоское компактное множество в трёхмерном пространстве

В случае, когда компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ содержится в двумерной плоскости, задачи аппроксимации на K упрощаются (множества K такого типа мы будем называть плоскими). Это связано, во-первых, с тем, что система уравнений (6) для плоских множеств K упрощается в алгебраическом смысле, во-вторых, с тем, что для

плоских множеств K, грубо говоря, удаётся оценить вклад второго слагаемого в формуле Коши–Грина (11), в-третьих, с тем, что для таких множеств, грубо говоря, имеет место теорема вложения $W_1^1(K^c) \to L^1(\partial K)$ (W_1^1 – пространство Соболева). Мы приведём критерии аппроксимации для плоских множеств. Оказывается, что для них задачи гармонической, почти гармонической, безвихревой и почти безвихревой аппроксимаций равносильны, и свойства соответствующих аппроксимаций локальны. То же самое верно и в случае, когда K является компактным подмножеством достаточно гладкого двумерного многообразия: комбинация утверждений 6.1 и 5.4 позволяет устанавливать, обладает ли такое "двумерное" множество свойством гармонической аппроксимации и тремя остальными равносильными ему свойствами.

Зафиксируем систему координат в $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим плоское компактное множество K в $\mathbb{R}^3$, содержащееся, скажем, в координатной плоскости Oxy. Так как $\lambda_3(K) = 0$, то задача гармонического приближения на K равносильна задаче безвихревого приближения (предложение 3.4).

Для вектора $\vec{f}$ обозначим через f_x, f_y и f_z его проекции на оси Ox, Oy, Oz соответственно. Если функция φ определена в плоскости Oxy, то её двумерный градиент определяется так: $\nabla_2\varphi = (\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y})$. Аналогично можно определить оператор ∇_2 на зарядах с носителем в Oxy.

Предложение 6.1. *Поле $\vec{f} \in \vec{C}^1(\mathbb{R}^3)$ допускает на компактном множестве $K \subset Oxy$ приближение гармоническими векторными полями в том и только в том случае, если $(\operatorname{rot}\vec{f})_z = 0$ $\|\nu\|$-почти всюду для любого скалярного заряда $\nu \in M(K)$ такого, что*

$$\nabla_2\nu \text{ есть векторный заряд.} \tag{15}$$

Любое векторное поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает гармоническую аппроксимацию в том и только в том случае, если не существует ненулевого скалярного заряда $\nu \in M(K)$, удовлетворяющего условию (15).

Заряды, обладающие свойством (15), абсолютно непрерывны относительно двумерной меры Лебега. Напомним, что функция $\rho \in L^1$ называется функцией ограниченной вариации (или BV-функцией), если

$\nabla\rho$ есть заряд (см. [7]). Таким образом, плоское компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ обладает свойством гармонической аппроксимации тогда и только тогда, когда на плоскости Oxy не существует ненулевой функции ограниченной вариации с носителем на K.

Выведем следствие, увязывающее полученное условие с условием Витушкина, характеризующим равномерную аналитическую аппроксимацию на комплексной плоскости. Напомним, что компактное множество $K \subset \mathbb{C}$ обладает свойством аналитической аппроксимации в том и только в том случае, когда $\gamma(V \setminus K) = \gamma(V)$ для всякого открытого множества $V \subset \mathbb{C}$; здесь γ – аналитическая ёмкость, подробнее см. [4] или [5].

Следствие 6.2. *Если компактное множество $K \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условию Витушкина, то не существует ненулевой функции ограниченной вариации с носителем на K.*

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить, что всякое непрерывное векторное поле, заданное на K, рассматриваемом как подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, допускает безвихревую аппроксимацию; аппроксимирующие поля строятся исходя из некоторых фактов, относящихся к аналитической аппроксимации на K как на подмножестве комплексной плоскости.

Приведём условие, достаточное для равносильности задач безвихревой и почти безвихревой аппроксимаций в трёхмерном пространстве.

Предложение 6.3. *Предположим, что компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ обладает следующим свойством: для любой скалярной функции $\varphi \in C^\infty(K^c)$ такой, что $\int\limits_{K^c} |\nabla\varphi| d\lambda_3 < \infty$, найдётся семейство открытых множеств V_n с правильными границами, $V_{n+1} \subset V_n$, $\cap_{n=0}^{\infty} V_n = K$, такое, что $\sup\limits_n \int\limits_{\partial V_n} |\varphi|\, dS < \infty$. Тогда на K задача приближения почти безвихревыми полями равносильна задаче приближения безвихревыми полями.*

Укажем два класса компактных множеств, для которых выполнены условия последнего предложения: 1) гладкие трёхмерные подмногообразия в $\mathbb{R}^3$ с краем; 2) плоские компактные множества. Таким образом, на плоских компактных множествах все четыре задачи безвихревой, почти безвихревой, гармонической и почти гармонической аппроксимаций равносильны.

Благодарность. Автор выражает благодарность В. П. Хавину за постоянную поддержку в ходе работы над задачей и помощь в подготовке публикации.

Литература

1. А. Преса Саге, В. П. Хавин, *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами в евклидовом пространстве.* — Алгебра и анализ **7**, No. 6 (1995), 104–152.
2. V. P. Khavin, S. K. Smirnov, *Approximation and extension problems for some classes of vector fields.* — St. Petersburg Math. J. **10**, No. 3 (1999), 507–528; Алгебра и анализ **10**, No. 3 (1998), 133–162.
3. С. К. Смирнов, *Разложение соленоидальных векторных зарядов на элементарные соленоиды и структура нормальных одномерных потоков.* — Алгебра и анализ **5**, No. 4 (1993), 206–238.
4. Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области.* Мир, М., 1986.
5. Т. Гамелин, *Равномерные алгебры.* Мир, М., 1973.
6. E. V. Malinnikova, V. P. Khavin, *Uniform approximation by harmonic differential forms. A constructive approach*, St. Petersburg Math. J. **9**, No. 6 (1998); Алгебра и анализ **9**, No. 6 (1997), 156–196.
7. Э. Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации*, Мир, М., 1989.

Dubashinskiy M. B. On the uniform approximation by harmonic and almost harmonic vector fields.

Three-dimensional analogs of rational uniform approximation in $\mathbb{C}$ are considered. These analogs are related to approximation properties of harmonic (i.e., curl-free and solenoidal) vector fields. The usual uniform approximation by fields harmonic near a given compact set $K \subset \mathbb{R}^3$ is compared with the uniform aproximation by smooth fields whose curls and divergences tend to zero uniformly on K. A similar two-dimensional modification of the uniform approximation by functions f complex analytic near a given compact set $K \subset \mathbb{C}$ (when f is assumed to be in C^1 with $\bar\partial f$ small on K) results in a problem equivalent to the original one. In the three-dimensional setting, the two problems (of harmonic and of almost harmonic approximation) are different. The first is nonlocal whereas the second is local (i.e., an analog of the Bishop theorem on the locality of

$R(K)$ is still valid for almost harmonic approximation). Almost curl-free approximation is also considered.

СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева,
14 линия В.О., д. 29Б,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mikhail.dubashinskiy@gmail.com

Поступило 13 мая 2011 года