Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

О. Л. Виноградов

О НОРМАХ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРАМИ ЯКОБИ–ДАНКЛЯ

В работе получено интегральное представление и улучшена оценка норм операторов обобщенного сдвига, порожденных операторами Якоби–Данкля

$$\Lambda_{\alpha,\beta} f(x) = f'(x) + \frac{A'_{\alpha,\beta}(x)}{A_{\alpha,\beta}(x)} \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

где

$$A_{\alpha,\beta}(x) = (1-\cos x)^{\alpha}(1+\cos x)^{\beta}|\sin x|,$$

в пространствах периодических функций.

§1. Обозначения

В дальнейшем $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$ — множества неотрицательных целых, целых, неотрицательных вещественных, вещественных чисел соответственно; u_c и u_s — четная и нечетная части функции u, то есть

$$u_c(x) = \frac{u(x)+u(-x)}{2}, \quad u_s(x) = \frac{u(x)-u(-x)}{2};$$

тогда $u = u_c + u_s$; функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются по непрерывности. Пространства 2π-периодических функций обозначаются: S – измеримых; C – непрерывных, с равномерной нормой; $L_{p,\alpha,\beta}$ при $p \in [1,+\infty)$ – суммируемых с p-й степенью на $[-\pi,\pi]$ с весом $A_{\alpha,\beta}$, с нормой $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f|^p A_{\alpha,\beta}\right)^{1/p}$; $L_{\infty,\alpha,\beta} = L_\infty$ – измеримых, существенно ограниченных, с vrai sup-нормой. Аналогично определяются пространства

Ключевые слова: многочлены Якоби, оператор обобщенного сдвига, оператор Якоби–Данкля.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Минобрнауки РФ номер 2010-1.1-111-128-033.

$S[0,\pi]$, $C[0,\pi]$, $L_{p,\alpha,\beta}[0,\pi]$. Норма оператора $T\colon L_{p,\alpha,\beta}\to L_{p,\alpha,\beta}$ обозначается через $\|T\|_{p,\alpha,\beta}$. Полагаем

$$\langle f,g\rangle_{\alpha,\beta}=\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\,\overline{g}\,A_{\alpha,\beta},$$

если интеграл существует. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть еще δ_q – δ-мера с носителем в точке q, $(a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$, $\binom{a}{b}=\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-b+1)\Gamma(b+1)}$; при $\lambda\in\mathbb{R}$ положим

$$x_+^\lambda=\begin{cases}x^\lambda, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

§2. Обобщенный сдвиг, порожденный оператором Якоби

При $\alpha,\beta>-1$ многочлены Якоби $P_k^{(\alpha,\beta)}$ ($k\in\mathbb{Z}_+$) ортогональны на $[-1,1]$ с весом $x\mapsto(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ и нормированы равенством

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{k+\alpha}{k}. \tag{2.1}$$

При $\alpha=\beta$ их называют еще ультрасферическими. Многочлены Якоби удовлетворяют соотношениям

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(-x)=(-1)^kP_k^{(\beta,\alpha)}(x), \tag{2.2}$$

$$(P_k^{(\alpha,\beta)})'=\frac{1}{2}(k+\alpha+\beta+1)P_{k-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}. \tag{2.3}$$

Удобно рассматривать тригонометрические многочлены Якоби $\varphi_k=\varphi_k^{(\alpha,\beta)}$, ортогональные на $[0,\pi]$ с весом $A_{\alpha,\beta}$ и нормированные условием $\varphi_k(0)=1$:

$$\varphi_k(t)=\frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(1)}.$$

Индексы α и β у функций φ_k и у некоторых других величин мы будем опускать. Пусть $L=L_{\alpha,\beta}$ – оператор Якоби (это частный случай оператора Штурма–Лиувилля):

$$L_{\alpha,\beta}f = \frac{1}{A_{\alpha,\beta}}(A_{\alpha,\beta}f')' = f'' + \frac{A'_{\alpha,\beta}}{A_{\alpha,\beta}}\, f'.$$

Обозначим

$$\lambda_k = \sqrt{|k|(|k| + \alpha + \beta + 1)}\, \operatorname{sign} k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

При каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $f = \varphi_k$ – решение задачи

$$L_{\alpha,\beta}f = -\lambda_k^2 f, \quad f(0) = 1. \tag{2.5}$$

Эти свойства многочленов Якоби можно найти в [1, 2].

Далее в этом параграфе, а также в §§4 и 5 предполагается, что $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$. Результаты переносятся на случай $\beta > \alpha \geq -\frac{1}{2}$ с помощью соотношения (2.2); при этом надо рассматривать функции $\varphi_k(t) = \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos t)}{P_k^{(\alpha,\beta)}(-1)}$. В классическом случае $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ результаты работы тривиальны; обычно он будет упоминаться для полноты картины и в целях сравнения.

Для многочленов Якоби выполняется формула умножения ([3]; см. также [4] и [2, формула 4.17]):

$$\varphi_k(x)\varphi_k(y) = \int_0^\pi\!\!\int_0^1 \varphi_k(z)\, d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta). \tag{2.6}$$

Здесь аргумент $z = z(x,y,r,\theta) \in [\,0,\pi]$ определяется равенством

$$\cos^2\frac{z}{2} = \Bigl(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\Bigr)^2 + \Bigl(r\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\Bigr)^2 + \frac{1}{2}\sin x\sin y\, r\cos\theta,$$

что равносильно соотношению

$$\begin{aligned}\cos z = {}&\frac{(1+\cos x)(1+\cos y)}{2} + \frac{(1-\cos x)(1-\cos y)}{2}\, r^2\\ &+ \sin x\sin y\, r\cos\theta - 1.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Мера $\mu_{\alpha,\beta}$ задается следующим образом ($r \in [\,0,1]$, $\theta \in [\,0,\pi]$):

$$d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta) = \begin{cases} c_{\alpha,\beta}^{-1}(1-r^2)^{\alpha-\beta-1}r^{2\beta+1}\sin^{2\beta}\theta\, dr\, d\theta, & \alpha > \beta > -\frac{1}{2},\\ d\delta_1(r)\, b_\alpha^{-1}\sin^{2\alpha}\theta\, d\theta, & \alpha = \beta > -\frac{1}{2},\\ a_{\alpha,-1/2}^{-1}(1-r^2)^{\alpha-1/2}\, dr\, \frac{d\delta_0(\theta)+d\delta_\pi(\theta)}{2}, & \alpha > \beta = -\frac{1}{2},\\ d\delta_1(r)\frac{d\delta_0(\theta)+d\delta_\pi(\theta)}{2}, & \alpha = \beta = -\frac{1}{2},\end{cases}$$

где

$$a_{\alpha,\beta} = \int_0^1 r^{2\beta+1}(1-r^2)^{\alpha-\beta-1}\,dr = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha-\beta)}{2\Gamma(\alpha+1)},$$

$$b_\beta = \int_0^\pi \sin^{2\beta}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(\beta+\frac12)\sqrt{\pi}}{\Gamma(\beta+1)},$$

$$c_{\alpha,\beta} = a_{\alpha,\beta}b_\beta = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\beta+\frac12)\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\alpha+1)}.$$

Для ультрасферических многочленов при $\alpha > -\frac12$ формула умножения принимает вид

$$\varphi_k(x)\varphi_k(y) = b_\alpha^{-1}\int_0^\pi \varphi_k(z)\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta,$$

где

$$\cos z = \cos x\cos y + \sin x\sin y\cos\theta,$$

а при $\alpha = -\frac12$ сводится к равенству

$$\cos kx\cos ky = \tfrac12\bigl(\cos k(x-y) + \cos k(x+y)\bigr).$$

При $y = \pi$, $\alpha = \beta$ ввиду формулы (2.2) получаем

$$\varphi_k(x)\varphi_k(\pi) = \varphi_k(\pi - x),$$

и аналогично при $x = \pi$.

Обозначим

$$G_{\alpha,\beta} = \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{2n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}, & \alpha > \beta \ge -\frac12,\\ \mathbb{R}\setminus\{n\pi\}_{n\in\mathbb{Z}}, & \alpha = \beta > -\frac12,\\ \varnothing, & \alpha = \beta = -\frac12. \end{cases} \tag{2.8}$$

В силу четности и 2π-периодичности функций φ_k, при $x \notin G_{\alpha,\beta}$ или $y \notin G_{\alpha,\beta}$ формула умножения имеет вид

$$\varphi_k(x)\varphi_k(y) = \frac{\varphi_k(x-y) + \varphi_k(x+y)}{2}.$$

При $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ формула умножения записывается в интегральном виде

$$\varphi_k(x)\varphi_k(y) = \int\limits_0^\pi \varphi_k(z)\omega(x,y,z)A_{\alpha,\beta}(z)\,dz. \tag{2.9}$$

Хотя равенство (2.9) известно [5], мы покажем, как получить его из (2.6), и выразим функцию $\omega = \omega_{\alpha,\beta}$. Некоторые выкладки понадобятся нам в § 4. В силу четности и 2π-периодичности функций φ_k достаточно рассматривать $x, y \in G_{\alpha,\beta} \cap [\,0,\pi]$.

Пусть $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$. Заменим в (2.6) переменные $(r,\theta) \mapsto (z,\chi)$ по формуле [3]

$$e^{i\chi}\cos\frac{z}{2} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + re^{i\theta}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}, \tag{2.10}$$

$z, \chi \in [\,0,\pi]$. Это соответствует определению z равенством (2.7). Имеем:

$$\begin{aligned} r^2 &= \left|\frac{e^{i\chi}\cos\frac{z}{2} - \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}\right|^2 \\ &= \frac{\cos^2\frac{z}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\cos\chi}{\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

условие $r \in [\,0,1]$ равносильно условию $Q(x,y,z,\chi) \geq 0$, где

$$Q(x,y,z,\chi) = 1 - \cos^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{y}{2} - \cos^2\frac{z}{2} + 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\cos\chi. \tag{2.12}$$

Это условие может выполняться лишь при $\cos\frac{z}{2} \in \left[\cos\frac{x+y}{2}, \cos\frac{x-y}{2}\right]$, то есть $z \in \bigl[|x-y|, \min\{x+y,\pi\}\bigr]$. Положим

$$\sigma_{x,y,z}(\chi) = \frac{\cos\frac{z}{2}\cos\chi - \cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}. \tag{2.13}$$

Тогда

$$r\sin\theta = \frac{\cos\frac{z}{2}\sin\chi}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}, \qquad r\cos\theta = \sigma_{x,y,z}(\chi), \tag{2.14}$$

$$\frac{D(r,\theta)}{D(\chi,z)} = \frac{\sin z}{4r\sin^2\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}}. \tag{2.15}$$

В результате замены получаем равенство (2.9), где

$$\omega(x,y,z)=\frac{|\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}|^{-2\alpha}}{2^{\alpha+\beta+2}\,c_{\alpha,\beta}}\int\limits_0^\pi Q_+^{\alpha-\beta-1}(x,y,z,\chi)\sin^{2\beta}\chi\,d\chi \tag{2.16}$$

(модуль поставлен, чтобы задать четное 2π-периодическое по каждой переменной продолжение ω).

В случаях $\alpha>\beta=-\frac{1}{2}$ и $\alpha=\beta>-\frac{1}{2}$ интеграл по мере $\mu_{\alpha,\beta}$ вырождается в однократный. Равенство (2.9) формально может быть получено той же заменой, но практически проще принять z за новую переменую в однократном интеграле или сделать предельный переход, соответственно при $\beta\to-\frac{1}{2}+$ и $\beta\to\alpha-$. При $\alpha>\beta=-\frac{1}{2}$ получаем

$$\omega(x,y,z)=\frac{|\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}|^{-2\alpha}}{2^{\alpha+3/2}\,a_{\alpha,-1/2}}\,\frac{Q_+^{\alpha-1/2}(x,y,z,0)+Q_+^{\alpha-1/2}(x,y,z,\pi)}{2}, \tag{2.17}$$

а при $\alpha=\beta>-\frac{1}{2}$ –

$$\omega(x,y,z)=\frac{\bigl(1-\cos^2x-\cos^2y-\cos^2z+2\cos x\cos y\cos z\bigr)_+^{\alpha-1/2}}{b_\alpha\,|\sin x\sin y\sin z|^{2\alpha}}. \tag{2.18}$$

Отметим еще, что равенство (2.17) может быть получено из (2.18) с помощью формулы удвоения [2, формула 3.13]

$$\varphi_k^{(\alpha,-1/2)}(t)=\varphi_{2k}^{(\alpha,\alpha)}\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr)$$

и преобразования получившегося интеграла.

Для $x,y\in[\,0,\pi]$ обозначим

$$P_{x,y}=\bigl[|x-y|,\min\{x+y,\pi\}\bigr], \tag{2.19}$$

$$\widetilde{P}_{x,y}=\bigl[|x-y|,\min\{x+y,2\pi-x-y\}\bigr]. \tag{2.20}$$

Из формул (2.16)–(2.18) видно, что если $x,y\in G_{\alpha,\beta}\cap[\,0,\pi]$, то

$$\operatorname{supp}\omega(x,y,\cdot)\cap[\,0,\pi]=\begin{cases}P_{x,y}, & \alpha>\beta\ge-\frac{1}{2},\\ \widetilde{P}_{x,y}, & \alpha=\beta>-\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{2.21}$$

Формула умножения в виде (2.9) установлена Дж. Гаспером [5]. Ей предшествовали давние результаты А. Лежандра ($\alpha=\beta=0$) и Л. Гегенбауэра ($\alpha=\beta>-\frac{1}{2}$). Х. Корнвиндер [7] получил для многочленов

Якоби формулу сложения (см. далее §4), откуда вывел формулу умножения в виде (2.6). Подробнее о формулах сложения и умножения и истории вопроса рассказывается в [2].

Пусть $f \in S[0,\pi]$, g – четное 2π-периодическое продолжение функции f, $x, y \in \mathbb{R}$. Положим

$$T_L f(x,y) = \begin{cases} \int\limits_0^\pi f(z)\omega(x,y,z)A_{\alpha,\beta}(z)\,dz, & x,y \in G_{\alpha,\beta}, \\ \dfrac{g(x-y)+g(x+y)}{2}, & x \notin G_{\alpha,\beta} \text{ или } y \notin G_{\alpha,\beta}, \end{cases} \tag{2.22}$$

если правая часть существует. Наряду с $T_L f(x,y)$ будем писать $T_L^y f(x)$. Оператор T_L^y называют *оператором обобщенного сдвига*, порожденным оператором L.

Известно [5, следствие 1], что формулой (2.22) оператор T_L можно определить для функций $f \in L_{1,\alpha,\beta}[0,\pi]$. При любом $y \in \mathbb{R}$ оператор T_L^y положительный, и его норма как оператора из $L_{p,\alpha,\beta}[0,\pi]$ в $L_{p,\alpha,\beta}[0,\pi]$ при любом $p \in [1,+\infty]$ равна 1. Формула умножения записывается в виде

$$T_L\varphi_k(x,y) = \varphi_k(x)\varphi_k(y), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x,y \in [0,\pi]. \tag{2.23}$$

Гаспер [5, 6] установил, что равенство (2.23) определяет положительный оператор T_L если и только если $\alpha \geq \beta \geq \min\{-\alpha, -\frac{1}{2}\}$ ($\beta > -1$). Однако, если $\beta < -\frac{1}{2}$, то ядро оператора не выражается равенствами (2.16)–(2.18) и неизвестна формула сложения, используемая далее. Поэтому в данной работе рассматривается лишь случай $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$.

§3. Оператор Якоби–Данкля и его собственные функции

Операторы Λ_α, действующие по формуле

$$\Lambda_\alpha f(x) = f'(x) + \frac{2\alpha+1}{x} f_s(x),$$

называются операторами Данкля. Эти операторы (причем в многомерном случае) введены Ч. Данклем в серии работ, из которых укажем на [8]. Для знакомства со свойствами операторов Данкля и библиографией можно рекомендовать обзорную статью [9]. Порожденный оператором Данкля гармонический анализ функций, заданных на $\mathbb{R}$, распространяет гармонический анализ, порожденный оператором Бесселя, с множества четных функций (или, что равносильно, с множества функций, заданных на $\mathbb{R}_+$).

Операторы $\Lambda = \Lambda_A$ вида

$$\Lambda f = f' + \frac{A'}{A} f_s,$$

где A – некоторая функция, называют операторами типа Данкля. Функция f предполагается дифференцируемой. Таким образом, если f четна, то $\Lambda f = f'$, а если f нечетна, то $\Lambda f = f' + \frac{A'}{A} f = \frac{(Af)'}{A}$. Оператор Данкля соответствует функции $A(x) = |x|^{2\alpha+1}$. При $\alpha = -\frac{1}{2}$ он совпадает с оператором дифференцирования.

В данной работе изучается оператор Якоби–Данкля $\Lambda = \Lambda_{\alpha,\beta}$ в пространствах периодических функций. Он порождается функцией $A_{\alpha,\beta}$. При $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ он также совпадает с оператором дифференцирования. В ультрасферическом случае $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$ этот оператор рассматривался Д. В. Чертовой [10].

Отметим некоторые свойства операторов Якоби–Данкля. Если не оговорено противное, в этом параграфе на α и β не накладывается ограничений, кроме $\alpha, \beta > -1$.

Λ1. *Если функция f четна (нечетна), то функция Λf нечетна (четна).*

Это очевидно, так как функция $\frac{A'_{\alpha,\beta}}{A_{\alpha,\beta}}$ нечетна.

Λ2. *Если функция f дважды дифференцируема и четна, то $\Lambda^2 f = Lf$.*

Λ3. *Если $f, g \in C^{(1)}$, то $\langle \Lambda f, g\rangle_{\alpha,\beta} = -\langle f, \Lambda g\rangle_{\alpha,\beta}$.*

Доказательство. Если f и g одной четности, то в силу свойства Λ1 обе части равны нулю. Если f и g разной четности, то равенство легко проверяется интегрированием по частям. Общий случай получается отделением четной и нечетной части от f и g. □

Λ4. Обобщенная теорема Ролля. *Пусть функция f четна или нечетна. Тогда между любыми двумя нулями функции f лежит нуль функции Λf. Если при этом $f(a) = f'(a) = 0$, то $\Lambda f(a) = 0$.*

Доказательство. Если функция f четна, то утверждение представляет собой частный случай теоремы Ролля. Пусть функция f нечетна, $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) = f(b) = 0$. Так как для нечетной 2π-периодической функции справедливо равенство $f(0) = f(\pm\pi) = 0$, достаточно рассмотреть случаи $0 \le a < b \le \pi$ и $-\pi \le b < a \le 0$. Тогда, применяя теорему Ролля к функции $A_{\alpha,\beta}f$ и учитывая, что $A_{\alpha,\beta}(x) \ne 0$ при $\frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, получаем требуемое. Утверждение о кратном корне очевидно. □

Свойство $\Lambda 4$ для операторов типа Данкля ранее не отмечалось и может найти применение при построении ядер, не увеличивающих осцилляцию.

При каждом $k \in \mathbb{Z}$ функция

$$e_k = \varphi_k + \frac{1}{i\lambda_k}\varphi_k' \quad (k \ne 0), \qquad e_0 = 1, \tag{3.1}$$

где λ_k определяются формулой (2.4), есть решение задачи

$$\Lambda f = i\lambda_k f, \quad f(0) = 1.$$

Функции $e_k = e_k^{(\alpha,\beta)}$ являются тригонометрическими многочленами порядка $|k|$. Они служат аналогами комплексных экспонент $x \mapsto e^{ikx}$ и сводятся к последним при $\alpha = \beta = -1/2$.

М. Рёслер [11] исследовала собственные функции оператора Данкля (они выражаются через функции Бесселя) и получила для них формулу умножения. Оператор Якоби–Данкля в непериодическом случае порождается функцией $A(x) = \operatorname{sh}^{2\alpha+1}|x| \operatorname{ch}^{2\beta+1} x$. В [12] авторы изучали этот оператор при $\alpha \ge \beta \ge -\frac{1}{2}$ и получили формулу умножения для его собственных функций. Собственные функции соответствующего оператора Штурма–Лиувилля, называемые функциями Якоби, являются непериодическими аналогами многочленов Якоби. Гармоническому анализу, порожденному операторами типа Данкля общего вида для непериодических функций, посвящены, например, работы [13, 14].

Функции e_k обладают следующими свойствами. В ультрасферическом случае эти свойства установлены в [10].

E1. Формулы типа Эйлера.

$$\frac{e_k + e_{-k}}{2} = \varphi_k, \quad \frac{e_k - e_{-k}}{2i} = -\frac{1}{\lambda_k}\varphi_k'.$$

E2. $e_{-k} = \overline{e_k}, \quad |e_k|^2 = |\varphi_k|^2 + \frac{1}{\lambda_k^2}|\varphi_k'|^2.$

Свойства E1 и E2 очевидны.

E3. *Пусть $\alpha \ge \beta > -1$, $\alpha \ge -\frac{1}{2}$. Тогда при всех $x \in \mathbb{R}$ верно неравенство*

$$|e_k(x)| \le 1,$$

причем для $x \in [-\pi, \pi]$ *равенство имеет место лишь в следующих случаях*: 1) $k = 0$; 2) $x = 0$; 3) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$; 4) $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$, $x = \pm\pi$.

Доказательство. В случаях 1)–3) утверждение тривиально. В силу четности и 2π-периодичности функции $|e_k|$ достаточно рассматривать $x \in [0, \pi]$. При $k \neq 0$ по свойству E2 и формуле (2.5) имеем:

$$\left(|e_k|^2\right)' = 2\varphi_k' \left(\varphi_k + \frac{1}{\lambda_k^2}\varphi_k''\right) = -\frac{2}{\lambda_k^2}\frac{A'_{\alpha,\beta}}{A_{\alpha,\beta}}(\varphi_k')^2,$$
$$\frac{A'_{\alpha,\beta}(x)}{A_{\alpha,\beta}(x)} = \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \left(\beta + \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Определяя знак производной, приходим к следующим выводам. Если $\alpha \geq -\frac{1}{2} \geq \beta > -1$, причем α или β не равно $-\frac{1}{2}$, то функция $|e_k|$ строго убывает на $[0, \pi]$. Если $\alpha \geq \beta > -\frac{1}{2}$, то существует такое число $x' \in (0, \pi)$, что функция $|e_k|$ строго убывает на $[0, x']$ и строго возрастает на $[x', \pi]$. Кроме того, $|e_k(0)| = 1 \geq |e_k(\pi)|$, причем ввиду формулы (2.2) равенство верно лишь при $\alpha = \beta$. $\square$

E4. *Система* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *ортогональна на отрезке* $[-\pi, \pi]$ *с весом* $A_{\alpha,\beta}$ *и полна в* $L_{1,\alpha,\beta}$.

Доказательство. В самом деле, функции e_k ортогональны как собственные функции самосопряженного оператора $i\Lambda$: по свойству $\Lambda 3$

$$i\lambda_k\langle e_k, e_m\rangle_{\alpha,\beta} = \langle \Lambda e_k, e_m\rangle_{\alpha,\beta} = -\langle e_k, \Lambda e_m\rangle_{\alpha,\beta} = i\lambda_m\langle e_k, e_m\rangle_{\alpha,\beta},$$

откуда $\langle e_k, e_m\rangle_{\alpha,\beta} = 0$ при $k \neq m$. Полнота системы $\{e_k\}$ следует из полноты систем тригонометрических многочленов Якоби на $[0, \pi]$ с помощью отделения четной и нечетной части. $\square$

Из свойства E4 следует, что задача

$$\Lambda f = i\lambda f, \quad f(0) = 1$$

не имеет других решений, кроме $\lambda = \lambda_k$, $f = e_k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

§4. Обобщенный сдвиг, порожденный оператором Якоби–Данкля

В этом и следующем параграфах $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$.

Выведем формулу умножения для функций e_k. В ультрасферическом случае это сделано в [10]. Напомним, что множество $G_{\alpha,\beta}$ определяется равенством (2.8). Сразу отметим, что если $x \notin G_{\alpha,\beta}$ или $y \notin G_{\alpha,\beta}$, то по формуле (2.2)

$$e_k(x)e_k(y) = e_k(x+y).$$

В общем случае, дифференцируя равенство (2.6) формально, получаем:

$$\varphi_k'(x)\varphi_k(y) = \int_0^\pi\int_0^1 \varphi_k'(z)\frac{dz}{dx}\,d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta), \tag{4.1}$$

$$\varphi_k(x)\varphi_k'(y) = \int_0^\pi\int_0^1 \varphi_k'(z)\frac{dz}{dy}\,d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta), \tag{4.2}$$

где z определяется соотношением (2.7).

Проверим законность дифференцирования. Если $\sin z \neq 0$, то

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{-1}{\sin z}\frac{d\cos z}{dx}\\ &= \frac{(1-r^2)\sin x + (1+r^2)\sin x\cos y - 2r\cos\theta\cos x\sin y}{2\sin z},\\ \frac{dz}{dy} &= \frac{-1}{\sin z}\frac{d\cos z}{dy}\\ &= \frac{(1-r^2)\sin y + (1+r^2)\sin y\cos x - 2r\cos\theta\sin x\cos y}{2\sin z}.\end{aligned}$$

Докажем оценки $\left|\frac{dz}{dx}\right| \le 1$, $\left|\frac{dz}{dy}\right| \le 1$. Воспользуемся переменными (2.10), и пусть Q и σ определяются посредством формул (2.12) и (2.13). Переходя к половинным аргументам и подставляя выражения для r^2 и $r\cos\theta$ по формулам (2.11) и (2.14), получаем:

$$\frac{dz}{dx} = \sigma_{z,x,y}(\chi), \quad \frac{dz}{dy} = \sigma_{y,z,x}(\chi). \tag{4.3}$$

Далее,

$$|\sigma_{z,x,y}(\chi)| \le \left|\frac{e^{i\chi}\cos\frac{y}{2} - \cos\frac{z}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{z}{2}\sin\frac{x}{2}}\right| \le 1.$$

Здесь левое неравенство очевидно, а правое возведением в квадрат, как в (2.11), приводится к виду $Q(x,y,z,\chi) \ge 0$, то есть $r \le 1$. Аналогично доказывается неравенство для $\sigma_{y,z,x}(\chi)$.

Равенство $\sin z = 0$ равносильно тому, что $|\cos\frac{z}{2}|$ равен нулю или единице, что, как ясно из формулы (2.10), выполнено в следующих случаях ($k, n \in \mathbb{Z}$): 1) $x = 2n\pi$, $y = k\pi$; 2) $x = k\pi$, $y = 2n\pi$; 3) $x = (2n+1)\pi$, $y = (2k+1)\pi$, $r = 1$; 4) $x = (2n+1)\pi$, $r = 0$; 5) $y = (2n+1)\pi$, $r = 0$. Последние два можно не рассматривать, так как они реализуются на множестве нулевой меры $\mu_{\alpha,\beta}$.

Таким образом, если $\frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$ или $\frac{y}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, то дифференцирование законно и равенства (4.1) и (4.2) верны. Если же $\frac{x}{\pi}, \frac{y}{\pi} \in \mathbb{Z}$, доопределим $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{dz}{dy}$ нулем; тогда равенства (4.1) и (4.2) верны для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Для интегрального представления произведения $\frac{\varphi_k'(x)\varphi_k'(y)}{\lambda_k^2}$ воспользуемся формулой сложения ([3]; см. также [2, формула (4.16)]). При $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$ эта формула имеет вид

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos z) = \sum_{m=0}^{k}\sum_{l=0}^{m} a_{k,m,l} F_k^{m,l}(x) F_k^{m,l}(y) p_{m,l}(r,\theta), \tag{4.4}$$

$$a_{k,m,l} = \frac{(m+l+\alpha)(m-l+\beta)(k+\alpha+\beta+1)_m(2\beta+1)_{m-l}(k-l+\beta+1)_l(k-m)!}{2^{2m-1}(m+\alpha)(m-l+2\beta)(\beta+1)_m(\beta+\frac{1}{2})_{m-l}(m+\alpha+1)_{k-m+l}},$$

$$F_k^{m,l}(u) = (1-\cos u)^{\frac{m+l}{2}}(1+\cos u)^{\frac{m-l}{2}} P_{k-m}^{(\alpha+m+l,\beta+m-l)}(\cos u),$$

$$p_{m,l}(r,\theta) = r^{m-l} P_l^{(\alpha-\beta-1,\beta+m-l)}(2r^2-1) P_{m-l}^{(\beta-1/2,\beta-1/2)}(\cos\theta).$$

Функции $p_{m,l}$ ортогональны на $[0,\pi]\times[0,1]$ по мере $\mu_{\alpha,\beta}$. При этом

$$p_{1,0}(r,\theta) = \left(\beta + \tfrac{1}{2}\right) r\cos\theta, \quad a_{k,1,0} = \frac{(k+\alpha+\beta+1)(\alpha+1)}{k(2\beta+1)}\binom{k+\alpha}{k}^{-1}.$$

Умножим обе части равенства (4.4) на $r\cos\theta$ и проинтегрируем его по мере $\mu_{\alpha,\beta}$; тогда в силу ортогональности функций $p_{m,l}$ в правой части останется только слагаемое с номерами $m = 1$, $l = 0$:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1} P_k^{(\alpha,\beta)}(\cos z)\, r\cos\theta\, d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta)$$

$$= a_{k,1,0}\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\sin x\, P_{k-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos x)\,\sin y\, P_{k-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos y)\times$$

$$\times\left(\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin^{2\beta}\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{1}(1-r^2)^{\alpha-\beta-1} r^{2\beta+3}\, dr\right).$$

Вычисляя интегралы

$$\int_0^1 r^{2\beta+3}(1-r^2)^{\alpha-\beta-1}\,dr = a_{\alpha+1,\beta+1} = \frac{\beta+1}{\alpha+1}\,a_{\alpha,\beta},$$

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\sin^{2\beta}\theta\,d\theta = b_\beta - b_{\beta+1} = \frac{1}{2(\beta+1)}\,b_\beta$$

и учитывая еще формулы (2.1) и (2.3), получаем:

$$\frac{1}{\lambda_k^2}\varphi_k'(x)\varphi_k'(y) = \int_0^\pi\int_0^1 \varphi_k(z)\,r\cos\theta\,d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta). \tag{4.5}$$

По непрерывности равенство (4.5) верно и в предельных случаях, то есть при $\alpha \ge \beta \ge -\frac{1}{2}$.

Сопоставляя формулы (3.1), (2.6), (4.1), (4.2) и (4.5), находим:

$$\begin{aligned} e_k(x)e_k(y) &= \varphi_k(x)\varphi_k(y) \\ &\quad + \frac{1}{i\lambda_k}\big(\varphi_k(x)\varphi_k'(y) + \varphi_k'(x)\varphi_k(y)\big) - \frac{1}{\lambda_k^2}\varphi_k'(x)\varphi_k'(y) \qquad (4.6) \\ &= \int_0^\pi\int_0^1 \varphi_k(z)\,d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta) - \int_0^\pi\int_0^1 \varphi_k(z)\,r\cos\theta\,d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta) \\ &\quad + \int_0^\pi\int_0^1 \frac{1}{i\lambda_k}\varphi_k'(z)\left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\right)d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta). \end{aligned}$$

Сложение дает

$$\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy} = \frac{(1-r^2)(\sin x+\sin y) + (1-2r\cos\theta+r^2)\sin(x+y)}{2\sin z}.$$

Полагая

$$d\mu^1_{\alpha,\beta}(r,\theta) = (1-r\cos\theta)\,d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta),$$
$$d\mu^2_{\alpha,\beta}(r,\theta) = \left(\frac{dz}{dx}+\frac{dz}{dy}\right)d\mu_{\alpha,\beta}(r,\theta)$$

(вообще говоря, $\mu^2_{\alpha,\beta}$ – заряд, зависящий еще от x и y), равенство (4.6) можно переписать в виде

$$e_k(x)e_k(y) = \int_0^\pi\int_0^1 (e_k)_c(z)\,d\mu^1_{\alpha,\beta}(r,\theta) + \int_0^\pi\int_0^1 (e_k)_s(z)\,d\mu^2_{\alpha,\beta}(r,\theta)$$
$$= \int_0^\pi\int_0^1 e_k(z)\,d\,\frac{\mu^1_{\alpha,\beta}+\mu^2_{\alpha,\beta}}{2}(r,\theta) + \int_0^\pi\int_0^1 e_k(-z)\,d\,\frac{\mu^1_{\alpha,\beta}-\mu^2_{\alpha,\beta}}{2}(r,\theta).$$

При $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ сделаем в двух последних интегралах замену (2.10) и поменяем во втором знак у z. Учитывая равенства (2.14), (2.15), (4.3), четность функции Q, нечетность функции σ по первому и второму индексам и четность по третьему, получим формулу умножения в виде

$$e_k(x)e_k(y) = \int_{-\pi}^{\pi} e_k(z)W(x,y,z)A_{\alpha,\beta}(z)\,dz,$$

где при $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$

$$W(x,y,z) = \frac{|\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}|^{-2\alpha}}{2^{\alpha+\beta+3}\,c_{\alpha,\beta}} \times \int_0^\pi (1-\sigma_{x,y,z}+\sigma_{z,x,y}+\sigma_{y,z,x})(\chi)Q_+^{\alpha-\beta-1}(x,y,z,\chi)\sin^{2\beta}\chi\,d\chi, \tag{4.7}$$

Q и σ определены формулами (2.12) и (2.13). В предельных случаях аналогично выводу формулы для ядра ω получаем:

$$W(x,y,z) = \frac{|\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}|^{-2\alpha}}{2^{\alpha+5/2}\,a_{\alpha,-1/2}} \times \frac{\begin{array}{c}(1-\sigma_{x,y,z}+\sigma_{z,x,y}+\sigma_{y,z,x})(0)Q_+^{\alpha-1/2}(x,y,z,0)+\\ +(1-\sigma_{x,y,z}+\sigma_{z,x,y}+\sigma_{y,z,x})(\pi)Q_+^{\alpha-1/2}(x,y,z,\pi)\end{array}}{2} \tag{4.8}$$

при $\alpha > \beta = -\frac{1}{2}$,

$$W(x,y,z) = \frac{\bigl(1-\cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x\cos y\cos z\bigr)_+^{\alpha-1/2}}{2b_\alpha\,|\sin x\sin y\sin z|^{2\alpha}} \times \left(1+\frac{\sin(x+y)}{\sin z}\right)\left(1-\frac{\cos z-\cos x\cos y}{\sin x\sin y}\right) \tag{4.9}$$

при $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$.

Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}$, $x, y \in G_{\alpha,\beta}$. *Тогда*

$$e_k(x)e_k(y) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e_k(z)W(x,y,z)A_{\alpha,\beta}(z)\,dz.$$

Пусть $f \in S$, $x, y \in \mathbb{R}$. Положим

$$T_\Lambda f(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z)W(x,y,z)A_{\alpha,\beta}(z)\,dz, & x,y \in G_{\alpha,\beta}, \\ f(x+y), & x \notin G_{\alpha,\beta} \ \text{ или } \ y \notin G_{\alpha,\beta}, \end{cases} \tag{4.10}$$

если правая часть существует. Наряду с $T_\Lambda f(x,y)$ будем писать $T_\Lambda^y f(x)$. Оператор T_Λ^y назовем *оператором обобщенного сдвига,* порожденным оператором Λ.

Согласно лемме 1,

$$T_\Lambda e_k(x,y) = e_k(x)e_k(y), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Из определения вытекает, что если $f \in L_\infty$, $x, y \in G_{\alpha,\beta}$, то выражение $T_\Lambda f(x,y)$ существует и конечно. Далее будет показано, что формулой (4.10) оператор T_Λ можно определить для функций $f \in L_{1,\alpha,\beta}$.

С помощью замены переменной (2.10) получаем другие формы записи оператора T_Λ:

$$\begin{aligned} T_\Lambda f(x,y) &= \int\limits_0^\pi\!\!\int\limits_0^1 f_c(z)\,d\mu^1_{\alpha,\beta}(r,\theta) + \int\limits_0^\pi\!\!\int\limits_0^1 f_s(z)\,d\mu^2_{\alpha,\beta}(r,\theta) \\ &= \int\limits_0^\pi\!\!\int\limits_0^1 f(z)\,d\,\tfrac{\mu^1_{\alpha,\beta}+\mu^2_{\alpha,\beta}}{2}(r,\theta) + \int\limits_0^\pi\!\!\int\limits_0^1 f(-z)\,d\,\tfrac{\mu^1_{\alpha,\beta}-\mu^2_{\alpha,\beta}}{2}(r,\theta), \end{aligned} \tag{4.11}$$

верные при всех $x, y \in \mathbb{R}$, если интегралы существуют.

Исследуем дальнейшие свойства ядра W. Положим

$$\varrho(x,y,z) = \frac{-|\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}|^{-2\alpha}}{2^{\alpha+\beta+2}\,c_{\alpha,\beta}} \times \int_0^\pi \sigma_{x,y,z}(\chi) Q_+^{\alpha-\beta-1}(x,y,z,\chi)\sin^{2\beta}\chi\,d\chi$$

при $\alpha > \beta > -\frac{1}{2}$,

$$\varrho(x,y,z) = \frac{-|\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}|^{-2\alpha}}{2^{\alpha+\beta+2}\,a_{\alpha,-1/2}} \times \frac{\sigma_{x,y,z}(0)Q_+^{\alpha-1/2}(x,y,z,0) + \sigma_{x,y,z}(\pi)Q_+^{\alpha-1/2}(x,y,z,\pi)}{2}$$

при $\alpha > \beta = -\frac{1}{2}$,

$$\varrho(x,y,z) = \frac{\bigl(1-\cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x\cos y\cos z\bigr)_+^{\alpha-1/2}}{b_\alpha\,|\sin x\sin y\sin z|^{2\alpha}} \times \frac{\cos x\cos y - \cos z}{\sin x\sin y}$$

при $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$.

Лемма 2. 1. *Функция ϱ симметрична по первой паре аргументов, четна по третьему и нечетна по первому и второму аргументам.*

2.

$$2W(x,y,-z) = \omega(x,y,z) + \varrho(x,y,z) + \varrho(z,x,y) + \varrho(y,z,x), \tag{4.12}$$

$$W(x,y,z) + W(x,y,-z) = \omega(x,y,z) + \varrho(x,y,z), \tag{4.13}$$

$$W(x,y,z) - W(x,y,-z) = -\varrho(z,x,y) - \varrho(y,z,x) \tag{4.14}$$

3. *Ядро $W(x,y,-z)$ симметрично по трем аргументам и четно по их совокупности, то есть*

$$W(-x,-y,z) = W(x,y,-z).$$

4. *Если $\alpha > \beta \ge -\frac{1}{2}$, $x,y \in G_{\alpha,\beta} \cap [-\pi,\pi]$, то*

$$\operatorname{supp} W(x,y,\cdot) \cap [-\pi,\pi] = (-P_{|x|,|y|}) \cup P_{|x|,|y|},$$

где $P_{x,y}$ определяется равенством (2.19).

Напомним, что функция ω определена равенствами (2.16)–(2.18).

Доказательство. 1. Утверждение очевидно из определения функции ϱ, аналогичных свойств функции σ и четности функции Q.

2. Равенство (4.12) следует из определений функций W, ω и ϱ и утверждения 1. Равенства (4.13) и (4.14) получаются из равенства (4.12) отделением четной и нечетной части по z.

3. Утверждение вытекает из равенства (4.12) и свойств симметрии функций ω и ϱ.

4. Это свойство следует из аналогичного свойства (2.21) для ω. $\square$

Замечание 1. Как отмечено в [10], при $\alpha = \beta > -\frac{1}{2}$ носитель меньше: если $x, y \in G_{\alpha,\beta} \cap [-\pi, \pi]$, то

$$\operatorname{supp} W(x, y, \cdot) \cap [-\pi, \pi] = (-\widetilde{P}_{|x|,|y|}) \cup \widetilde{P}_{|x|,|y|},$$

где $\widetilde{P}_{x,y}$ определяется равенством (2.20).

Лемма 3. *При фиксированных двух из трех переменных x, y, z из $G_{\alpha,\beta}$ почти всюду по третьей выполняются неравенства*

$$W(x, y, z) + W(x, y, -z) \geq 0, \tag{4.15}$$

$$|\varrho(x, y, z)| \leq \omega(x, y, z). \tag{4.16}$$

Доказательство. Неравенство (4.15) следует из формул (4.7)–(4.9) отделением четной части, так как $|\sigma_{x,y,z}(\chi)| = |r\cos\theta| \leq 1$ в силу (2.14), а $\sigma_{z,x,y}(\chi)$ и $\sigma_{y,z,x}(\chi)$ нечетны по z. Неравенство (4.16) равносильно неравенству (4.15) в силу формулы (4.13) и нечетности (соответственно, четности) функций ϱ и ω по первому аргументу. $\square$

Известно, что на множестве четных функций оператор сдвига Данкля положителен. Это утверждение и его обобщение на множество радиальных функций в многомерном случае содержатся в [9]; см. также [15]. В случае ультрасферических многочленов аналогичное утверждение доказано в [10].

Следствие 1. *Если функция f лежит в C и четна, $x, y \in [-\pi, \pi]$, $f(z) \geq 0$ при всех $z \in P_{x,y}$, то $T_\Lambda f(x, y) \geq 0$.*

Доказательство. При $x \notin G_{\alpha,\beta}$ или $y \notin G_{\alpha,\beta}$ утверждение тривиально, а при $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ вытекает из леммы 3 или первого равенства в (4.11). $\square$

Если $f \in C$, то при $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ имеем

$$\big(T_\Lambda^y + T_\Lambda^{-y}\big) f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\big(W(x,y,z) + W(x,-y,z)\big) A_{\alpha,\beta}(z)\, dz. \quad (4.17)$$

Для $f \in S$, $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ обозначим через $\tau^y f(x)$ интеграл в правой части формулы (4.17), если он существует. При $x \notin G_{\alpha,\beta}$ или $y \notin G_{\alpha,\beta}$ положим $\tau^y f(x) = f(x+y) + f(x-y)$, если правая часть определена.

Следствие 2. *Если $f \in C$, $x, y \in [-\pi, \pi]$, $f(z) \geq 0$ при всех $z \in (-P_{|x|,|y|}) \cup P_{|x|,|y|}$, то $T_\Lambda f(x,y) + T_\Lambda f(x,-y) \geq 0$.*

Таким образом, при любом $y \in \mathbb{R}$ оператор $T_\Lambda^y + T_\Lambda^{-y}$ положительный.

Доказательство. При $x \notin G_{\alpha,\beta}$ или $y \notin G_{\alpha,\beta}$ утверждение тривиально. Пусть $x, y \in G_{\alpha,\beta}$. Тогда по симметрии функции W и лемме 3

$$T_\Lambda^y f(x) + T_\Lambda^{-y} f(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z)\big(W(x,y,z) + W(x,-y,z)\big) A_{\alpha,\beta}(z)\, dz$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(z)\big(W(x,-z,-y) + W(x,-z,y)\big) A_{\alpha,\beta}(z)\, dz \geq 0.$$

□

Замечание 2. Согласно замечанию 1, при $\alpha = \beta$ в формулировках следствий 1 и 2 можно заменить P на $\widetilde{P}$.

§5. Оценки норм операторов

Доказательство следующей теоремы стандартно.

Теорема 1. *Пусть $y \in \mathbb{R}$.*

1. *Если $f \in L_{1,\alpha,\beta}$, то выражение $\tau^y f(x)$ существует и конечно при почти всех $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Если $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, то $\tau^y f \in L_{p,\alpha,\beta}$ и*

$$\|\tau^y f\|_{p,\alpha,\beta} \leq 2\|f\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Если $y \notin G_{\alpha,\beta}$, то утверждения тривиальны. Пусть $y \in G_{\alpha,\beta}$.

1. Пусть $p = \infty$, $f \in L_\infty$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\|f\|_\infty \le 1$. Тогда при всех $x \in G_{\alpha,\beta}$ верна оценка

$$|\tau^y f(x)| \le \int_{-\pi}^{\pi} \big(W(x,y,z) + W(x,-y,z)\big)\, A_{\alpha,\beta}(z)\, dz = 2.$$

2. Для любой функции f из S положим $\Phi^y f(x) = \tau^y |f|(x)$. Тогда $\Phi^y f(x) \in [\,0,+\infty]$ и функция $\Phi^y f$ измерима по теореме Тонелли.

Пусть $p = 1$, $f \in L_{1,\alpha,\beta}$, $\|f\|_{1,\alpha,\beta} \le 1$. Меняя порядок интегрирования по теореме Тонелли, получаем:

$$\|\Phi^y f\|_{1,\alpha,\beta} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)| \int_{-\pi}^{\pi} \big(W(x,y,z) + W(x,-y,z)\big)\, A_{\alpha,\beta}(x)\, dx\, A_{\alpha,\beta}(z)\, dz.$$

По симметрии ядра W

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big(W(x,y,z) + W(x,-y,z)\big)\, A_{\alpha,\beta}(x)\, dx$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \big(W(-z,y,-x) + W(-z,-y,-x)\big)\, A_{\alpha,\beta}(x)\, dx = 2.$$

Поэтому $\|\Phi^y f\|_{1,\alpha,\beta} = 2\|f\|_{1,\alpha,\beta} \le 2$ и, следовательно, $\Phi^y f(x) < +\infty$ при почти всех x. Тем более, интеграл в правой части формулы (4.17) существует и конечен при почти всех x, и $\|\tau^y f\|_{1,\alpha,\beta} \le 2$.

3. Пусть $p \in (1,+\infty)$. По доказанному для $p = 1, \infty$ и интерполяционнной теореме Рисса—Торина (см., например, [16, §13.4]) для всех простых функций g справедливо неравенство

$$\|\Phi^y g\|_{p,\alpha,\beta} \le 2\|g\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Пусть $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, $\|f\|_{p,\alpha,\beta} \le 1$. Возьмем последовательность $\{g_n\}$ простых функций со свойствами: $\|g_n - f\|_{p,\alpha,\beta} \to 0$, $|g_n| \le |f|$. По теореме Фату $\|\Phi^y f\|_{p,\alpha,\beta} \le 2$. Тем более, $\|\tau^y f\|_{p,\alpha,\beta} \le 2$.

Оценка при $p \in (1,+\infty)$ может быть получена и без ссылки на интерполяционную теорему, применением неравенства Гёльдера. $\square$

Если $f \in C$, то при $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ верна формула

$$\big(T_\Lambda^y - T_\Lambda^{-y}\big) f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)\big(W(x,y,z) - W(x,-y,z)\big) A_{\alpha,\beta}(z)\, dz. \quad (5.1)$$

Для $f \in S$, $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ обозначим через $\eta^y f(x)$ интеграл в правой части формулы (5.1), если он существует. При $x \notin G_{\alpha,\beta}$ или $y \notin G_{\alpha,\beta}$ положим $\eta^y f(x) = f(x+y) - f(x-y)$, если правая часть определена.

Ясно, что в силу периодичности оператор $\eta^{n\pi}$ – нулевой при $n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2. *Пусть $y \in \mathbb{R}$.*

1. *Если $f \in L_{1,\alpha,\beta}$, то выражение $\eta^y f(x)$ существует и конечно при почти всех $x \in \mathbb{R}$.*

2. *Если $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, то $\eta^y f \in L_{p,\alpha,\beta}$ и*

$$\|\eta^y f\|_{p,\alpha,\beta} \le 2\|f\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Если $y \notin G_{\alpha,\beta}$, то утверждения тривиальны. Пусть $y \in G_{\alpha,\beta}$. Для любой функции f из S положим

$$\Psi^y f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)| \big|W(x,y,z) - W(x,-y,z)\big| A_{\alpha,\beta}(z)\,dz.$$

Пусть $f \in L_\infty$, $\|f\|_\infty \le 1$. Тогда при всех $x \in G_{\alpha,\beta}$ справедливо неравенство

$$\Psi^y f(x) \le \int_0^{\pi} \Big(\big|W(x,y,z) - W(x,-y,z)\big| \\ + \big|W(x,y,-z) - W(x,-y,-z)\big| \Big) A_{\alpha,\beta}(z)\,dz.$$

Учитывая, что

$$|a| + |b| = \max\{|a+b|, |a-b|\},$$

по формуле (4.14) и лемме 3 при почти всех z находим

$$\big|W(x,y,z) - W(x,-y,z)\big| + \big|W(x,y,-z) - W(x,-y,-z)\big| \\ = 2\max\big\{|\varrho(x,y,z)|, |\varrho(z,y,x)|\big\} \le 2\omega(x,y,z).$$

Поэтому

$$|\eta^y f(x)| \le \Psi^y f(x) \le 2\int_0^{\pi} \omega(x,y,z) A_{\alpha,\beta}(z)\,dz = 2.$$

Оставшаяся часть доказательства проводится так же, как в теореме 1. $\square$

Теорема 3. *Пусть* $y \in \mathbb{R}$.

1. *Если* $f \in L_{1,\alpha,\beta}$, *то выражение* $T_\Lambda^y f(x)$ *существует и конечно при почти всех* $x \in \mathbb{R}$.

2. *Если* $p \in [1, +\infty]$, $f \in L_{p,\alpha,\beta}$, *то* $T_\Lambda^y f \in L_{p,\alpha,\beta}$ *и*

$$\|T_\Lambda^y f\|_{p,\alpha,\beta} \le 2^{|1-\frac{2}{p}|} \|f\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Доказательство. Из теорем 1 и 2 вытекают существование интеграла в (4.10), соотношение $T_\Lambda^y f \in L_{p,\alpha,\beta}$ и оценка

$$\|T_\Lambda^y\|_{p,\alpha,\beta} \le \frac{\|T_\Lambda^y + T_\Lambda^{-y}\|_{p,\alpha,\beta}}{2} + \frac{\|T_\Lambda^y - T_\Lambda^{-y}\|_{p,\alpha,\beta}}{2} \le 2.$$

С другой стороны, $\|T_\Lambda^y\|_{2,\alpha,\beta} = 1$, поскольку $|e_k(y)| = e_k(0) \le 1$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$. Остается применить интерполяционную теорему для пространств $L_{p,\alpha,\beta}$ при $p = 1$, $p = 2$ и при $p = 2$, $p = \infty$. □

Замечание 3. Если $f \in C$, то функция $T_\Lambda f$ непрерывна на $\mathbb{R}^2$ и $|T_\Lambda f(x,y)| \le 2\|f\|_\infty$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$. В частности, при всех $y \in \mathbb{R}$ верно, что $T_\Lambda^y f \in C$ и $\|T_\Lambda^y f\|_\infty \le 2\|f\|_\infty$.

Доказательство. Как показывают доказательства теорем 1 и 2, если $f \in C$, то $|\tau^y f(x)| \le 2\|f\|_\infty$ и $|\eta^y f(x)| \le 2\|f\|_\infty$ для всех, а не только почти всех $x, y \in \mathbb{R}$. Поэтому и $|T_\Lambda f(x,y)| \le 2\|f\|_\infty$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Возьмем последовательность тригонометрических многочленов $\{p_n\}$, равномерно стремящуюся к f; тогда $\{T_\Lambda p_n\}$ – последовательность тригонометрических многочленов от двух переменных. При всех $x, y \in \mathbb{R}$ имеем

$$|T_\Lambda p_n(x,y) - T_\Lambda f(x,y)| \le 2\|p_n - f\|_\infty.$$

Поэтому $T_\Lambda p_n \to T_\Lambda f$ равномерно на $\mathbb{R}^2$, откуда следует, что функция $T_\Lambda f$ непрерывна. □

Для $f \in L_{1,\alpha,\beta}$ обозначим через $c_k(f)$ коэффициенты Фурье функции f по системе $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Замечание 4. Если $f \in L_{1,\alpha,\beta}$, $y \in \mathbb{R}$, то

$$c_k(T_\Lambda^y f) = e_k(y) c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, для тригонометрических многочленов это верно по формуле умножения, а для произвольной функции f из $L_{1,\alpha,\beta}$ – по непрерывности операторов T_Λ^y и функционалов c_k.

Замечание 5. По формуле умножения при $x, y \in G_{\alpha,\beta}$ разложение функции $W(x, y, -\cdot)$ в ряд Фурье по системе e_k имеет вид

$$W(x, y, -z) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{e_k(x)e_k(y)e_k(z)}{\|e_k\|^2_{2,\alpha,\beta}}. \tag{5.2}$$

Равенство в (5.2) верно по крайней мере при всех $x, y, z \in G_{\alpha,\beta}$, $z \neq \pm(x+y)$, $z \neq \pm(x-y) \pmod{2\pi}$. Сходимость ряда к функции легко доказать, убедившись в ее дифференцируемости в этих точках. В [5] аналогичное разложение доказано для ядра ω.

Замечание 6. Оператор η^y можно назвать *оператором обобщенной центральной разности,* а его r-ю степень $(\eta^y)^r$ – *оператором обобщенной центральной разности порядка* r с шагом $2y$. В классическом случае $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ эти операторы обозначают через δ_{2y}, δ^r_{2y}. По доказанному при всех $p \in [1, +\infty]$, $y \in \mathbb{R}$ оператор η^y действует из $L_{p,\alpha,\beta}$ в $L_{p,\alpha,\beta}$ и

$$\|\eta^y\|_{p,\alpha,\beta} \le 2. \tag{5.3}$$

По индукции можно заключить, что при всех $r \in \mathbb{N}$ оператор $(\eta^y)^r$ действует из $L_{p,\alpha,\beta}$ в $L_{p,\alpha,\beta}$ и $\|(\eta^y)^r\|_{p,\alpha,\beta} \le 2^r$.

Замечание 7. В теореме 2 существенно, что речь идет именно о центральных разностях. Для разности вперед $\Delta_y f = T^y_\Lambda f - f$, в отличие от случая обычного сдвига, при $p \neq 2$ мы не можем утверждать, что $\|\Delta_y\|_{p,\alpha,\beta} \le 2$. Теорема 2 может найти применение при построении обобщенных модулей непрерывности на основе обобщенных центральных разностей.

Замечание 8. Если $\frac{y}{\pi} \notin \mathbb{Z}$, то при $p = 1$ и $p = \infty$ неравенство (5.3) обращается в равенство.

Доказательство. При $p = \infty$ равенство очевидно, так как для $f \in C$ справедливо соотношение

$$\eta^y f(0) = T^y_\Lambda f(0) - T^{-y}_\Lambda f(0) = f(y) - f(-y).$$

При $p = 1$ равенство получается из соотношений двойственности (см., например, [17, §1.4]):

$$\|\eta^y\|_{1,\alpha,\beta} = \sup_{\|f\|_{1,\alpha,\beta}\le 1} \|\eta^y f\|_{1,\alpha,\beta} = \sup_{\|f\|_{1,\alpha,\beta}\le 1} \sup_{\|g\|_\infty \le 1} |\langle \eta^y f, g\rangle_{\alpha,\beta}|$$
$$= \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \sup_{\|f\|_{1,\alpha,\beta}\le 1} |\langle -f, \eta^y g\rangle_{\alpha,\beta}| = \sup_{\|g\|_\infty \le 1} \|\eta^y g\|_\infty = 2.$$

□

Замечание 9. Из положительности оператора T_L^y следует, что его норма равна 1. Операторы T_Λ^y при $y \notin G_{\alpha,\beta}$ не являются положительными. В [10] получена оценка $\|T_\Lambda^y\|_{p,\alpha,\alpha} \leq 4$. Аналогичные оценки с константой 4 для операторов обобщенного сдвига Данкля и Якоби – Данкля в непериодическом случае содержатся в [11] и [12]. В [15, теорема 7.1] приведена оценка нормы оператора обобщенного сдвига Данкля с константой 3.

Литература

1. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены.* ГИФМЛ, М. (1962).
2. R. Askey, *Orthogonal polynomials and special functions.* SIAM, Philadelphia (1975).
3. T. Koornwinder, *Jacobi polynomials.* II. *An analytic proof of the product formula.* — SIAM J. Math. Anal. **5**, No. 1 (1974), 125–137.
4. G. Gasper, W. Trebels, *Multiplier criteria of Marcienkiewicz type for Jacobi expansions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **231**, No. 1 (1977), 117–132.
5. G. Gasper, *Positivity and the convolution structure for Jacobi series.* — Ann. Math. **93**, No. 1 (1971), 112–118.
6. G. Gasper, *Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel.* — Ann. Math. **95**, No. 2 (1972), 261–280.
7. T. Koornwinder, *The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics.* — SIAM J. Appl. Math. **25**, No. 2 (1973), 236–246.
8. C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **311**, No. 1 (1989), 167–183.
9. M. Rösler, *Dunkl operators: theory and applications.* — In: Lecture notes in math. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg **1817** (2003), 93–135.
10. Д. В. Чертова, *Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1 \leq p \leq 2$ с периодическим весом Якоби.* — Изв. Тульского гос. ун-та. Естественные науки, No. 1 (2009), 5–27.
11. M. Rösler, *Bessel-type signed hypergroups on* $\mathbb{R}$. — In: Probability measures on groups and related structures (Proc. Conf., Oberwolfach, 1994, eds.: H. Heyer and A. Mukherjea) World Scientific (1995), 292–304.
12. N. Ben Salem, A. Ould Ahmed Salem, *Convolution structure associated with the Jacobi – Dunkl operator on* $\mathbb{R}$. — Ramanujan Journal **12** (2006), 359–378.
13. M. A. Mourou, K. Trimèche, *Transmutation operators and Paley – Wiener theorem associated with a singular differential-difference operator on the real line.* — Anal. Appl. **1**, No. 1 (2003), 43–70.
14. M. A. Mourou, *Transmutation operators associated with a Dunkl-type differential-difference operator on the real line and certain of their applications.* — Integral Transforms and Special Functions **12**, No. 1 (2001), 77–88.
15. S. Thangavelu, Y. Xu, *Convolution operator and maximal function for the Dunkl transform.* — J. Anal. Math. **97** (2005), 25–55.

16. Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении.* Т. 2. Мир, М. (1985).
17. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* Наука, М. (1987).

Vinogradov O. L. On the norms of generalized translation operators generated by Jacobi–Dunkl operators.

We establish an integral representation and improve the norm estimate for the generalized translation operators generated by Jacobi–Dunkl operators

$$\Lambda_{\alpha,\beta}f(x) = f'(x) + \frac{A'_{\alpha,\beta}(x)}{A_{\alpha,\beta}(x)}\,\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

where

$$A_{\alpha,\beta}(x) = (1-\cos x)^{\alpha}(1+\cos x)^{\beta}|\sin x|,$$

in the spaces $L_p[-\pi,\pi]$ with the weight $A_{\alpha,\beta}$. For $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$ we prove that these norms do not exceed 2.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 11 мая 2011 г.