Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

С. В. Быков

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРДИ–ЛИТТЛВУДА

Пусть $D = \{z \in C : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости C, $H(D)$ – множество всех голоморфных в D функций, $0 < p < +\infty$, H^p – класс Харди в D. Следующая теорема установлена в работе [1].

Теорема А. *Пусть $f \in H(D)$. Тогда если*

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\beta}}\right), \tag{1}$$

то

$$M_p(r,f') = O\left(\frac{1}{(1-r)^{\beta+1}}\right). \tag{2}$$

Справедливо и обратное утверждение, то есть из оценки (2) следует оценка (1).

Естественно, возникает вопрос, какой вид примут оценки (1) и (2), если вместо степенного веса $\varphi(r) = \frac{1}{(1-r)^{\beta}}$ поставить веса более общего вида, например,

$$\varphi(r) = \frac{1}{(1-r)^{\beta}}\Big(\underbrace{\ln\ldots\ln}_{n}\frac{A}{1-r}\Big)^{j},$$

где $0 < \beta < +\infty$, $A > 0$, $0 < r < 1$, $-\infty < j < +\infty$ или веса вида

$$\varphi(r) = \exp\frac{1}{(1-r)^{\alpha}}, \quad \varphi(r) = \underbrace{\exp\ldots\exp}_{n}\frac{1}{(1-r)^{\alpha}},$$

где $\alpha > 0$, $0 < r < 1$.

В этой статье мы докажем аналог теоремы Харди–Литтлвуда для класса весов, охватывающих все указанные случаи.

Ключевые слова: аналитическая функция, единичный круг, теорема Харди–Литтлвуда.

Теорема 1. *Пусть* $f \in H(D), M_p(r,f) \le \varphi(r), 0 < p < +\infty, 0 < r < 1$, *при этом существует предел*

$$\alpha_\varphi = \lim_{r\to 1-0} \frac{\varphi'(r)(1-r)}{\varphi(r)}.$$

Тогда

1) *если* $0 \le \alpha_\varphi < +\infty$, *то* $M_p(r,f') = O\left(\frac{\varphi(r)}{1-r}\right)$ *при* $r \to 1-0$;

2) *если* $\alpha_\varphi = +\infty$, *при этом функция* $\psi(x) = \ln\varphi(1-e^{-x})$ *является выпуклой и удовлетворяет условию*

$$\frac{\psi''(x)}{\psi'^2(x)} = O(1)$$

при $x \to +\infty$, *то в случае* $1 \le p < +\infty$ *верно соотношение*

$$M_p(r,f') = O(\varphi'(r))$$

при $r \to 1-0$. *Если же* $0 < p < 1$, *то*

$$M_p(r^2,f') = O(\varphi'(r))$$

при $r \to 1-0$.

Доказательству теоремы предпошлём следующие утверждения.

Теорема Б (см. [2, стр. 79]). *Пусть* $f \in H^p$, $0 < p < +\infty$, *тогда функцию* f *можно представить в виде*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где $f_j(z) \ne 0$, $z \in D$, $j = 1,2$, $f_1, f_2 \in H^p$, *при этом справедлива оценка*

$$||f_j||_{H^p} \le 2||f||_{H^p}, \quad j = 1,2.$$

Лемма. *Пусть* φ – *монотонно возрастающая положительная функция на* $[0,1)$, *причём* $\varphi \in C^{(1)}[0,1)$ *и* $0 < \alpha_\varphi < +\infty$. *Тогда для любого* $r \in [0,1)$ *справедлива оценка*

$$\varphi\left(\frac{1+r}{2}\right) \le C\varphi(r), \quad \varphi\left(\frac{1+\sqrt{r}}{2}\right) \le C\varphi(r), \tag{3}$$

здесь и в дальнейшем C *будет означать произвольную константу, значение которой не играет особой роли.*

Доказательство. Учитывая условие теоремы, имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho_0 = \rho_0(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)}(1-\rho) < (\alpha_\varphi + \varepsilon), \quad \rho_0 < \rho < 1.$$

Проинтегрировав указанное неравенство по отрезку $[r, \frac{r+1}{2}]$, $\rho_0 < r < 1$, получим:

$$\ln \frac{\varphi(\frac{1+r}{2})}{\varphi(r)} < (\alpha_\varphi + \varepsilon) \ln 2,$$

откуда и получаем, что

$$\varphi(\frac{1+r}{2}) < 2^{\alpha_\varphi + \varepsilon} \varphi(r).$$

Это доказывает первую оценку в (3). Вторая оценка устанавливается аналогичным образом. Лемма доказана. □

Приступим теперь к доказательству теоремы 1.

Сначала предположим, что $1 \le p \le +\infty$.

Пусть $0 < r < \rho < 1$. Используя формулу Коши, получим:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Поэтому

$$|f'(re^{i\varphi})| \le \frac{\rho}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i\theta})|}{|\rho e^{i\theta} - re^{i\varphi}|^2} d\theta = \frac{\rho}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\rho e^{i(t+\varphi)})|}{\rho^2 - 2r\rho\cos t + r^2} dt. \quad (4)$$

Применяя неравенство Минковского, получаем:

$$M_p(r, f') \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{|(f(\rho e^{i(t+\varphi)})|^p}{|\rho^2 - 2r\rho\cos t + r^2|^p} d\varphi \Big)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Отсюда приходим к оценке

$$M_p(r, f') \le \frac{M_p(\rho, f)}{\rho^2 - r^2} \quad (5)$$

для произвольных $0 \le r < \rho < 1$.

Теперь используем условие теоремы, согласно которому

$$M_p(\rho, f) \le \varphi(\rho), \ 0 < \rho < 1.$$

В дальнейшем, не ограничивая общности, будем предполагать, что $\frac{1}{2} \le r < \rho < 1$. Из оценки (5) получим

$$M_p(r, f') \le C \inf_{\frac{1}{2} \le r < \rho < 1} \left(\frac{\varphi(\rho)}{\rho - r} \right). \tag{6}$$

Перейдём к вычислению последнего инфимума.

Сначала рассмотрим случай 1), то есть, когда $0 \le \alpha_\varphi < +\infty$. По лемме имеем:

$$\varphi\left(\frac{1+r}{2}\right) \le C\varphi(r).$$

Положив $\rho = \frac{1+r}{2}$ и использовав оценку (6), получаем:

$$M_p(r, f') \le C \frac{\varphi(\frac{1+r}{2})}{1-r} \le C_1 \frac{\varphi(r)}{1-r}, \quad \frac{1}{2} < r < 1.$$

Таким образом, теорема доказана при $1 \le p \le +\infty$, $0 \le \alpha_\varphi < +\infty$.

Перейдём к доказательству теоремы в случае 2). Сначала рассмотрим случай $1 \le p \le +\infty$, здесь мы используем метод работы [3]. Учтём оценку (6) и вычислим указанный инфимум другим способом. Пусть

$$\rho = 1 - e^{-(x+\varepsilon)},\ r = 1 - e^{-x}, \quad x > 0,\ \varepsilon > 0.$$

Напомним, что

$$\psi(x) = \ln \varphi(1 - e^{-x}), \quad x > 0;$$

имеем:

$$\frac{\varphi(\rho)}{\rho - r} = e^x \frac{e^{\psi(x+\varepsilon)}}{(1 - e^{-\varepsilon})}, \quad x > 0. \tag{7}$$

Тогда оценка (6) сводится к вычислению величины

$$e^x \inf_{\varepsilon > 0} \left(\frac{e^{\psi(x+\varepsilon)}}{1 - e^{-\varepsilon}} \right).$$

Вычислим последнее выражение стандартным образом.

Пусть $\varepsilon_x > 0$ – решение уравнения

$$e^{\psi(x+\varepsilon)} \left(\frac{\psi'(x+\varepsilon)}{1 - e^{-\varepsilon}} - \frac{e^{-\varepsilon}}{(1 - e^{-\varepsilon})^2} \right) = 0,$$

то есть

$$(1 - e^{-\varepsilon_x})\psi'(x + \varepsilon_x) - e^{-\varepsilon_x} = 0$$

или

$$\varepsilon_x = \ln\left(1 + \frac{1}{\psi'(x + \varepsilon_x)}\right).$$

Используя теорему Лагранжа о среднем, получим:

$$\psi(x+\varepsilon_x)=\psi(x)+\varepsilon_x\psi'(\xi), \tag{8}$$

где $x\le\xi\le x+\varepsilon_x$. Поэтому

$$\inf_{\varepsilon>0}\left(\frac{e^{\psi(x+\varepsilon)}}{1-e^{-\varepsilon}}\right)=\frac{e^{\psi(x+\varepsilon_x)}}{1-e^{-\varepsilon_x}}=e^{\psi(x)}e^{\varepsilon_x\psi'(\xi)}(\psi'(x+\varepsilon_x)+1).$$

Учитывая (5), имеем:

$$M_p(r,f')\le e^{\psi(x)}e^{x}e^{\varepsilon_x\psi'(\xi)}(\psi'(x+\varepsilon_x)+1),$$

то есть

$$M_p(r,f')\le e^{\psi(x)}e^{x}\psi'(x)\left[\frac{e^{\varepsilon_x\psi'(\xi)}(\psi'(x+\varepsilon_x)+1)}{\psi'(x)}\right]. \tag{9}$$

Докажем, что в условиях теоремы выполняется соотношение

$$A(x)=\frac{e^{\varepsilon_x\psi'(\xi)}(\psi'(x+\varepsilon_x)+1)}{\psi'(x)}=O(1)$$

при $x\to+\infty$. Сначала заметим, что $\varepsilon_x\psi'(\xi)=O(1)$ при $x\to+\infty$.

Действительно, учитывая выпуклость функции ψ, имеем:

$$\varepsilon_x\psi'(\xi)\le\varepsilon_x\psi'(x+\varepsilon_x).$$

Пользуясь тем, что $\psi'(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$ (поскольку $\alpha_\varphi=+\infty$), получим:

$$\varepsilon_x\psi'(x+\varepsilon_x)=\psi'(x+\varepsilon_x)\ln\left(1+\frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right)=O(1) \tag{10}$$

при $x\to+\infty$. Остаётся оценить частное $\frac{\psi'(x+\varepsilon_x)}{\psi'(x)}$. С этой целью введём в рассмотрение функцию $\chi(t)=\frac{1}{\psi'(t)}$, $t>0$. Тогда

$$\frac{\psi'(x+\varepsilon_x)}{\psi'(x)}=\frac{\chi(x)}{\chi(x+\varepsilon_x)}.$$

Применяя теорему Лагранжа о средних значениях, получим:

$$\frac{\chi(x)}{\chi(x+\varepsilon_x)}=\frac{\chi(x)}{\chi(x)+\chi'(\xi)\varepsilon_x}=\frac{1}{1+\frac{\chi'(\xi)\varepsilon_x}{\chi(x)}}, \tag{11}$$

где $x\le\xi\le x+\varepsilon_x$. Теперь вспомним, что

$$\varepsilon_x=\ln\left(1+\frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right).$$

Тогда из равенства (11) выводим:

$$\frac{\chi(x)}{\chi(x+\varepsilon_x)} = \frac{1}{1 - \frac{\psi''(\xi)\psi'(x)}{(\psi'(\xi))^2}\ln(1+\frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)})}.$$

Но по условию теоремы $\frac{\psi''(\xi)}{(\psi'(\xi))^2} \to 0$ при $x \to +\infty$, в то же время

$$\psi'(x)\ln\left(1+\frac{1}{\psi'(x+\varepsilon_x)}\right) \leq \psi'(x)\ln\left(1+\frac{1}{\psi'(x)}\right) = O(1).$$

В итоге получаем, что

$$\frac{\chi(x)}{\chi(x+\varepsilon_x)} = O(1)$$

при $x \to +\infty$. Учитывая формулу (9), окончательно получим:

$$M_p(r, f') \leq Ce^{\psi(x)}e^x\psi'(x).$$

Но так как $\psi(x) = \ln\varphi(1-e^{-x}), x > 0$, то из последней оценки следует, что

$$M_p(r, f') \leq C_1\varphi'(r).$$

Теорема доказана при $1 \leq p \leq +\infty$.

Перейдём к доказательству теоремы при $0 < p < 1$.

Сначала докажем теорему при таких p и при условии, что $f(z) \neq 0$, $z \in D$, тогда положим

$$F(z) = (f(z))^p = \exp(p\ln f(z)), \quad z \in D,$$

где выбрана главная ветвь логарифма и, используя первую часть теоремы (то есть случай, когда показатель суммируемости находится между 1 и $+\infty$), получаем, что

$$M_1(r, F) = (M_p(r, f))^p \leq C^p\varphi^p(r) = C^p\varphi_1(r), \ \frac{1}{2} \leq r < 1,$$

где $\varphi_1(r) = (\varphi(r))^p$, $r \in (0, +\infty)$. Тогда

$$|f'(z)| = \frac{1}{p}|F(z)|^{\frac{1}{p}-1}|F'(z)|,$$

$$|f'(z)|^p = (\frac{1}{p})^p|F(z)|^{1-p}|F'(z)|^p,$$

то есть

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|^{1-p}|F'(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Гёльдера с показателем степени $p' = \frac{1}{1-p} > 1$ и $q' = \frac{1}{p}$, приходим к оценке

$$M_p(r, f') \leq \frac{1}{p}(M_1(r, F))^{\frac{1}{p}-1} M_1(r, F'). \tag{12}$$

Теперь оценим величину $M_1(r, F')$.

Справедливо неравенство $M_1(r, F) \leq C_1\varphi_1(r)$, где $\varphi_1(r) = (\varphi(r))^p$; при этом $\alpha_{\varphi_1} = p\alpha_\varphi$. Значит, все условия теоремы выполняются для мажоранты $\varphi_1(r)$, причем

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{\varphi_1'(r)\,(1-r)}{\varphi_1(r)} = \alpha_{\varphi_1}, \quad 0 \leq \alpha_{\varphi_1} < +\infty. \tag{13}$$

Следовательно, $M_1(r, F') \leq C\frac{\varphi_1(r)}{1-r}$, то есть из (12) следует, что

$$M_p(r, f') \leq \frac{C_1}{p}(\varphi_1(r))^{\frac{1}{p}-1}\frac{\varphi_1(r)}{1-r},$$

$$M_p(r, f') \leq C_2(\varphi^p(r))^{\frac{1}{p}-1}\frac{(\varphi(r))^p}{1-r}$$

или

$$M_p(r, f') \leq C_2\frac{\varphi(r)}{1-r},\ 0 \leq r < 1.$$

Теорема доказана при условии, что $f(z) \neq 0$, $z \in D$, $0 \leq \alpha_\varphi < +\infty$.

Предположим теперь, что $\alpha_\varphi = +\infty$. Вновь используем первую часть доказательства теоремы, получаем:

$$M_1(r, F') \leq C_3\varphi_1'(r). \tag{14}$$

Учитывая также оценку (12), имеем:

$$M_p(r, f') \leq \frac{C}{p}(\varphi^p(r))^{\frac{1}{p}-1}(\varphi(r))^{p-1}\varphi'(r)p$$

или

$$M_p(r, f') \leq C_2(\varphi(r))^{1-p}(\varphi(r))^{p-1}\varphi'(r),$$

то есть

$$M_p(r, f') \leq C_2\varphi'(r). \tag{15}$$

Таким образом, теорема доказана при всех $1 \leq p \leq +\infty$ и $0 < p < 1$, в последнем случае при условии, что $f(z) \neq 0$, $z \in D$.

Теперь перейдём к доказательству теоремы в этом случае, когда f – произвольная функция из $H(D)$. С этой целью зафиксируем $0 < \rho < 1$ и положим $f_\rho(z) = f(\rho z)$. Функция $f_\rho(z)$ голоморфна в круге

$D_{\frac{1}{\rho}} = \{z \in C : |z| < \frac{1}{\rho}\}$. Тогда по теореме Б функцию $f_\rho(z)$ можно представить в виде $f_\rho(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z)$, $z \in D$, где $\psi_j(z) \neq 0, j = 1, 2, z \in D$, причём

$$M_p(r, \psi_j) \leq 2\|f_\rho\|_{H^p} = 2M_p(\rho, f) \leq 2\varphi(\rho) \tag{16}$$

при всех $\frac{1}{2} \leq r < 1$.

Рассмотрим случай $0 \leq \alpha_\varphi < +\infty$. Тогда из вышеуказанного представления и из условия $0 < p < 1$ вытекает, что

$$M_p(r, f'_\rho) \leq \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi'_1(re^{i\theta})|^p d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\psi'_2(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}$$

(мы воспользовались элементарной оценкой $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 < p \leq 1$). Следовательно,

$$M_p(r, f'_\rho) \leq 2^{\frac{1}{p}}(M_p(r, \psi'_1) + M_p(r, \psi'_2)), \quad \frac{1}{2} \leq r < 1. \tag{17}$$

Но утверждение теоремы уже установлено при $0 < p < 1$ и при условии, что $\psi_j(z) \neq 0$, $j = 1, 2$, $z \in D$, поэтому из неравенств (16) и (17) получаем, что:

$$\rho\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(\rho re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C(M_p(r, \psi'_1) + M_p(r, \psi'_2))$$
$$\leq \frac{C}{1-r}(M_p(r, \psi_1) + M_p(r, \psi_2)) \leq C\frac{\varphi(\rho)}{1-r}, \quad \frac{1}{2} \leq r, \rho < 1.$$

Так как функция $(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \rho|f'(\rho re^{i\theta})|^p d\theta)^{\frac{1}{p}}$ – монотонно возрастающая функция от r на [0,1), то из этой оценки получаем:

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(r^2 e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \leq C\frac{\varphi(\rho)}{1-r}, \quad \frac{1}{2} \leq r < \rho < 1,$$

или

$$M_p(r, f') \leq C\frac{\varphi(\rho)}{1-\sqrt{r}} \leq 2C\frac{\varphi(\rho)}{1-r}, \quad \text{если} \quad \frac{1}{2} \leq \sqrt{r} < \rho < 1.$$

Если $0 \leq \alpha_\varphi < +\infty$, то выбрав $\rho = \frac{1+\sqrt{r}}{2}$ и используя лемму, получим доказательство теоремы и в этом случае.

Теперь предположим, что $\alpha_\varphi = +\infty$. Очевидно, что

$$\frac{\varphi(\rho)}{1-r} \le \frac{\varphi(\rho)}{1-\rho}, \quad \frac{1}{2} \le r < \rho < 1.$$

Из предыдущей оценки получим:

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f'(r^2e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \le \inf_{\frac{1}{2}\le r<\rho<1}\Big(\frac{\varphi(\rho)}{1-\rho}\Big).$$

Проводя такие же рассуждения, как и ранее, окончательно получим:

$$\rho\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f'(r^2e^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \le C_1\varphi'(r).$$

Предполагая, что $\frac{1}{2} \le \rho < 1$, получим нужную оценку. Теорема 1 доказана. □

Приведём пример, показывающий точность теоремы 1. Точность теоремы при условии $0 < \alpha_\varphi < +\infty$, где $\alpha_\varphi = \lim\limits_{r\to 1-0}\frac{\varphi'(r)(1-r)}{\varphi(r)}$, показывает пример

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^\beta}, \quad z \in D, \quad \varphi(r) = \frac{1}{(1-r)^\alpha}, \quad \alpha > 0,\ \beta = \alpha + \frac{1}{p}.$$

Приведём пример, показывающий точность теоремы при условии $\alpha_\varphi = +\infty$.

Для этого положим $f(z) = \exp\frac{1}{1-z}$, $z \in D$, $\varphi(r) = e^{\frac{1}{1-r}}(1-r)^{\frac{3}{2p}}$. Тогда

$$|f(re^{i\theta})| = \exp\operatorname{Re}\frac{1}{(1-re^{i\theta})} = \exp\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2},$$

$$M_p(r,f) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp p\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Положим $h(r,\theta) = p\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$, тогда, учитывая, что

$$\max_{|\theta|<\pi}h(r,\theta) = p\frac{1-r}{1-2r+r^2} = p\frac{1-r}{(1-r)^2} = \frac{p}{1-r}$$

и

$$h''_{\theta^2}(r,\theta) = -p\frac{(1+r)r}{(1-r)^6} < 0$$

для всех $0 < r < 1$, и используя асимптотику интегралов вышеуказанного типа (см. [4, стр. 19]), получим:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp p \frac{1 - r\cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2} d\theta \sim e^{h(r,\theta)} \sqrt{\frac{2\pi}{h''_{\theta^2}(r,\theta)}}$$
$$= Ce^{\frac{p}{1-r}} \frac{1}{(1-r)^{-\frac{3}{2}}} = Ce^{\frac{p}{1-r}} (1-r)^{\frac{3}{2}}, \quad r \to 1-0.$$

В то же время

$$\varphi'(r) \sim e^{\frac{1}{1-r}} (1-r)^{\frac{3}{2p}-2} = e^{\frac{1}{1-r}} \frac{(1-r)^{\frac{3}{2p}}}{(1-r)^2}.$$

Очевидно, что

$$\alpha_\varphi = \lim_{r\to 1-0} \frac{\varphi'(r)(1-r)}{\varphi(r)} = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{1-r} = +\infty,$$

при этом

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} = C\varphi(r).$$

В тоже время

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{\frac{1}{p}} \sim \varphi'(r)$$

при $r \to 1-0$. Так что установленное утверждение точно при всех $0 \le \alpha_\varphi \le +\infty$. Точность этой теоремы вытекает также из следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $f \in H(D)$, φ удовлетворяет условиям теоремы 1, $1 \le p \le +\infty$. Тогда если $0 < \alpha_\varphi < +\infty$, при этом*

$$M_p(r, f') \le C\frac{\varphi(r)}{1-r}, \ 0 \le r < 1, \tag{18}$$

или при $\alpha_\varphi = +\infty$

$$M_p(r, f') \le C\varphi'(r), \ 0 \le r < 1,$$

то функция f удовлетворяет оценке

$$M_p(r, f) \le C\varphi(r), \ 0 \le r < 1. \tag{19}$$

Доказательство. Приведём сначала доказательство теоремы для случая $0 < \alpha_\varphi < +\infty$. Используем элементарное равенство:

$$f(z) = f(0) + \int\limits_0^r f'(\rho e^{i\theta}) e^{i\theta} d\rho,\ z = re^{i\theta}.$$

Тогда

$$|f(z)| \le |f(0)| + \int\limits_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho$$

или

$$|f(z)|^p \le \Big(|f(0)| + \int\limits_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho\Big)^p,$$

откуда получим:

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} \le 2\Big(|f(0)| + \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\int\limits_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho\Big)^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}}\Big).$$

Применяя неравенство Минковского, имеем:

$$M_p(r, f) \le 2\Big(|f(0)| + \int\limits_0^r M_p(\rho, f') d\rho\Big).$$

Используя условие теоремы, оценим последний интеграл:

$$\int\limits_0^r M_p(\rho, f') d\rho \le C \int\limits_0^r \frac{\varphi(t)}{1-t} dt.$$

Установим асимптотику последнего интеграла, для этого воспользуемся правилом Лопиталя и вычислим предел

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{\int\limits_0^r \frac{\varphi(t)}{1-t} dt}{\varphi(r)} = \lim_{r\to 1-0} \frac{\frac{\varphi(r)}{1-r}}{\varphi'(r)} = \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{\frac{\varphi'(r)(1-r)}{\varphi(r)}} = \frac{1}{\alpha_\varphi} < +\infty,$$

таким образом, получаем:

$$\int\limits_0^r \frac{\varphi(t)}{1-t} dt \le C\varphi(r). \tag{20}$$

Теперь, в силу (20), имеем:

$$M_p(r,f) \le C_1\varphi(r), \quad \frac{1}{2} \le r < 1.$$

Таким образом, теорема доказана при $0 < \alpha_\varphi < +\infty$, $1 \le p \le +\infty$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha_\varphi = +\infty$. Тогда, как и выше, используя условие теоремы, имеем:

$$M_p(r,f) \le 2|f(0)| + C\int_0^r \varphi'(\rho)d\rho,$$

то есть

$$M_p(r,f) \le C\varphi(r).$$

Теорема 2 доказана. □

Следующая теорема доказывается аналогичным образом.

Теорема 3. *Пусть* $f \in H(D)$ *и* $1 \le p < q \le +\infty$. *Тогда если*

$$M_p(r,f) \le C\varphi(r)$$

и при этом $0 \le \alpha_\varphi < +\infty$, *то*

$$M_q(r,f) \le C\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}},\ 1 \le p \le q < +\infty.$$

Если же $\alpha_\varphi = +\infty$, *то*

$$M_q(r,f) \le C(\varphi(r))^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(\varphi'(r))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},\ 1 \le p \le q < +\infty.$$

В заключении автор искренне благодарит рецензента за внимательное изучение рукописи и сделанные полезные замечания.

Литература

1. G. H. Hardy and I. E. Littlewood, *Some properties of fractional II integrals.* — Math. Zeitschrift. **28** (1928), 612–634.
2. P. L. Duren, *Theory of H^p spaces.* Academic Press, New York and London (1970).
3. Н. К. Никольский, *Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа.* Тр. МИАН СССР им. В.А. Стеклова. **120** М. (1974).
4. М. А. Евграфов, *Асимптотические оценки и целые функции.* Физматлит., М. (1962).

Bykov S. V. Extension of a theorem by Hardy and Littlewood.

We give the following extension of a theorem by Hardy and Littlewood. *Suppose f is a holomorphic function in the unit disk and*

$$M_p(r,f) = \Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\Big)^{\frac{1}{p}} = O(\varphi(r)), \quad r \to 1-0,$$

where φ is a monotone increasing function on $(0,1)$ and

$$\alpha_\varphi = \lim_{r\to 1-0} \frac{\varphi'(r)\,(1-r)}{\varphi(r)}.$$

1) *If* $0 \le \alpha_\varphi < +\infty$, *then* $M_p(r,f') = O(\frac{\varphi(r)}{1-r})$, $r \to 1-0$;

2) *if* $\alpha_\varphi = +\infty$, *then* $M_p(r,f') = O(\varphi'(r))$, $r \to 1-0$.

Брянский
государственный университет
им. акад. И. Г. Петровского,
241036 Брянск, ул. Бежицкая, д. 14
E-mail: b_serecha@mail.ru

Поступило 24 июня 2011 г.