Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

Р. В. Бессонов

ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПРОШЛОГО И БУДУЩЕГО НА СИНГУЛЯРНОМ СПЕКТРЕ

§1. Введение

Рассмотрим унитарные операторы U_1, U_2 и ограниченный оператор A,

$$U_1 : H_1 \to H_1, \quad U_2 : H_2 \to H_2, \quad A : H_1 \to H_2,$$

где H_1, H_2 – гильбертовы пространства. Определим волновые операторы прошлого и будущего W_-, W_+ как пределы последовательности $\{U_2^{-n} A U_1^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ при $n \to -\infty$, $n \to +\infty$, соответственно. В случае, когда рассматриваемые пределы существуют в сильной (слабой) операторной топологии, говорят о существовании сильных (слабых) волновых операторов $W_\pm$.

Следующая теорема, формулируемая здесь для систем с дискретным временем, является одним из ключевых результатов классической теории рассеяния [1].

Теорема (Като, Розенблюм; Пирсон). *Пусть спектральные меры унитарных операторов U_1, U_2 абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Предположим, что коммутатор $AU_1 - U_2 A$ является ядерным оператором. Тогда существуют сильные волновые операторы $W_\pm = \lim\limits_{n \to \pm\infty} U_2^{-n} A U_1^n$.*

Хорошо известно, что в теореме Като–Розенблюма–Пирсона существенна абсолютная непрерывность спектральных мер операторов U_1, U_2. Простой пример, показывающий важность этого условия, можно построить следующим образом: в качестве пространств H_1, H_2 возьмем одномерное пространство, то есть поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, операторы U_1, U_2, A зададим формулами

$$U_1 = \omega I, \quad U_2 = A = I,$$

Ключевые слова: волновой оператор, метод суммирования, сингулярная спектральная мера.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 11-01-00584-а; фонда “Рохлинские стипендии”; лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

где I обозначает единичный оператор, а число $\omega \in \mathbb{C}$ такое, что $|\omega| = 1$, $\omega \neq 1$. Нетрудно видеть, что в этом примере волновые операторы прошлого и будущего не существуют, поскольку $U_2^{-n} A U_1^n I = \omega^n I$.

С другой стороны, средние арифметические последовательности $\{\omega^n I\}$ стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$, поэтому существуют *усредненные* волновые операторы $W_\pm = 0$. Возникает общий вопрос о сходимости средних арифметических $\frac{1}{n+1} \sum_0^n U_2^{-k} A U_1^k$ для случая, когда спектральные меры унитарных операторов U_1, U_2 не обязательно абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Также представляет интерес сходимость усреднений последовательности $\{U_2^{-n} A U_1^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ при использовании других методов суммирования, в частности, метода Абеля.

Дадим строгие определения понятий "метод суммирования" и "усредненный волновой оператор".

Пусть пара $(E, \prec)$ обозначает некоторое вполне упорядоченное множество, а символ $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел. Семейство неотрицательных чисел $\{p_{r,n}\}_{r \in E, n \in \mathbb{Z}_+}$ определяет s-регулярный метод суммирования, если выполняются следующие условия:

a) $\sum\limits_n p_{r,n} = 1$ для любого элемента $r \in E$,

b) $\lim\limits_r \sum\limits_n |p_{r,n} - p_{r,n+1}| = 0$,

c) $\lim\limits_r p_{r,n} = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Из условий a)–c) несложно выводится следующее важное свойство s-регулярных усреднений:

d) $\lim\limits_r \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{r,n} z^n = 0$ для любого числа $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $|z| = 1$.

Методы суммирования Чезаро и Абеля определяются следующим образом:

$$\text{метод Чезаро:} \qquad E = (\mathbb{Z}_+, \leqslant), \qquad p_{r,n} = \begin{cases} \frac{1}{r+1}, & \text{если } n \leqslant r; \\ 0, & \text{если } n > r, \end{cases}$$

$$\text{метод Абеля:} \qquad E = ((0,1), \leqslant), \qquad p_{r,n} = (1-r) r^n.$$

Нетрудно видеть, что эти методы s-регулярны.

Зафиксируем произвольный s-регулярный метод суммирования, то есть набор чисел $\{p_{r,n}\}$. Всюду далее в этой статье, при употреблении терминов, связанных с усреднением, будет подразумеваться использование данного метода.

Определение. *Обозначим через* $W_-(r)$, $W_+(r)$ *усреднения последовательностей* $\{U_2^n A U_1^{-n}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ *и* $\{U_2^{-n} A U_1^{n}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$*:*

$$W_-(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{r,n} U_2^n A U_1^{-n}, \qquad W_+(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{r,n} U_2^{-n} A U_1^{n}. \qquad (1)$$

Слабым усредненным волновым оператором прошлого будем называть предел $W_- = \lim_r W_-(r)$ *в слабой операторной топологии, если этот предел существует. Аналогично, слабым усредненным волновым оператором будущего будем называть предел* $W_+ = \lim_r W_+(r)$.

Термин "волновой оператор" заимствован из классической теории рассеяния, в которой изучается случай абсолютно непрерывного спектра. Если существует слабый волновой оператор, понимаемый в классическом смысле, то существует и слабый усредненный волновой оператор, причем они совпадают.

Если имеет место соотношение $AU_1 = U_2 A$, то $U_2^{-n} A U_1^n = A$, поэтому операторы $W_\pm$ существуют и равны A. Пусть спектр хотя бы одного из унитарных операторов U_1, U_2 имеет сингулярную часть. Естественно рассмотреть вопрос существования усредненных волновых операторов $W_\pm$ для оператора A с "малым" коммутатором $AU_1 - U_2 A$. В случае, когда коммутатор $AU_1 - U_2A$ является оператором ранга 1, существование усредненных волновых операторов фактически было проверено в статье [2], более подробное изложение можно найти в статье [3]. Настоящая работа посвящена случаю, когда $\operatorname{rank}(AU_1 - U_2A) = 2$.

Предположение 1. *Если оператор* $AU_1 - U_2A$ *имеет ранг 2, то усредненные волновые операторы прошлого и будущего существуют для метода суммирования Абеля*[1]*.*

Усредненные волновые операторы прошлого и будущего, соответствующие унитарным операторам U_1, U_2 со взаимно сингулярными

[1]Совсем недавно это предположение было опровергнуто в статье [5], см. примечание при корректуре в конце этого параграфа.

спектральными мерами, существуют и равны нулю, см., например, теорему 5.1 в статье [3]. Случай операторов U_1, U_2 с абсолютно непрерывными спектральными мерами разобран в теореме Като–Розенблюма–Пирсона. Таким образом, остается рассмотреть случай сингулярных унитарных операторов.

Теорема 1. *Пусть спектральные меры операторов U_1, U_2 сингулярны относительно меры Лебега. Предположим, что* $\operatorname{rank}(AU_1 - U_2A) \leqslant 2$. *Тогда слабый предел $\lim\limits_{r}(W_+(r) - W_-(r))$ существует и равен нулю. В частности, слабые усредненные волновые операторы $W_\pm$ существуют или нет одновременно, и если существуют, то совпадают.*

Таким образом, для случая коммутаторов ранга 2 доказано предположение 1.2 из статьи [3]. Отметим, что если спектральные меры операторов U_1, U_2 абсолютно непрерывны относительно меры Лебега, то волновые операторы прошлого и будущего совпадают только в вырожденных ситуациях.

Теорема 1 не доказывает предположение 1. В статье [3] показано, что это предположение верно в общем случае тогда и только тогда, когда оно верно для всех операторов U_1, U_2, A, обладающих следующими свойствами:

1) $H_1 = H_2 = L^2(\mu)$, где μ – борелевская сингулярная мера на единичной окружности $\mathbb{T}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем мера μ не имеет точечных нагрузок;
2) $U_1 = U_2 = U$ является оператором умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(\mu)$;
3) $AU - UA = (\cdot, \varphi)1 - (\cdot, 1)\varphi$; для некоторой вещественнозначной функции $\varphi \in L^2(\mu)$; при выполнении этого условия будем говорить, что пара U, A соответствует функции φ.

Можно показать, что в этой ситуации существование усредненных волновых операторов $W_\pm$ полностью определяется свойствами функции φ из пункта 3). Например, если функция φ непрерывно дифференцируема, то усредненные волновые операторы прошлого и будущего существуют. Другое условие приводится в теореме 4.2 статьи [4]. Оно формулируется на языке псевдопродолжимых функций и заключается в следующем: *если μ является мерой Кларка σ_1 внутренней функции θ и φ совпадает μ-почти всюду со следом некоторой функции*

$h \in K_\theta$, имеющей непрерывный след φ_α σ_α-почти всюду для некоторого $\alpha \in \mathbb{T}$, $\alpha \neq 1$, то сильные усредненные волновые операторы $W_\pm$ существуют. Соответствующие определения будут даны в §5, где обсуждаются результаты, связанные с этой теоремой.

Итак, класс гладкости можно понизить до непрерывности, если рассматривать "пересадку" φ_α функции φ. Так как $\varphi_1 = \varphi$, естественно изучить вопрос существования волновых операторов для пар U, A, соответствующих непрерывным функциям φ. Для класса непрерывных функций на единичной окружности $\mathbb{T}$ введем стандартное обозначение $C(\mathbb{T})$.

Теорема 2. *Предположим, что усредненные волновые операторы $W_\pm$ существуют для всех пар U, A, соответствующих функциям $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Тогда операторы $W_\pm$ существуют для всех операторов U_1, U_2, A со свойством* $\operatorname{rank}(AU_1 - U_2A) = 2$.

Этот результат означает, что предположение 1 истинно в том и только в том случае, когда можно опустить условие $\alpha \neq 1$ в посылке цитированной выше теоремы 4.2 статьи [4], сохранив справедливость ее заключения[2].

Теорема 2 позволяет проверять предположение 1 только для пар U, A, соответствующих непрерывным функциям φ. Оказывается, что не каждой функции $\varphi \in C(\mathbb{T})$ соответствует некоторая пара операторов U, A. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Существуют функция $\varphi \in C(\mathbb{T})$ и сингулярная мера μ на единичной окружности, не имеющая точечных нагрузок, такие, что оператор $(\cdot, \varphi)1 - (\cdot, 1)\varphi$, действующий в пространстве $L^2(\mu)$, не может быть представлен в виде коммутатора $AU - UA$, где A – ограниченный оператор в пространстве $L^2(\mu)$.*

Из доказательства теоремы 3 вытекают некоторые следствия, касающиеся граничного поведения интегралов типа Коши. Эти следствия обсуждаются в §5.

Примечание при корректуре. Пока эта статья готовилась к печати, В. В. Капустин опроверг предположение 1, см. [5]. Приводимое им доказательство неконструктивно. Теорема 2 показывает, что контрпример к предположению 1 можно искать среди операторов

[2]См. примечание при корректуре в конце этого параграфа.

U_1, U_2, A, обладающих свойствами 1)–3) и соответствующих непрерывным функциям φ. Из теоремы 3 следует, что не всем функциям $\varphi \in C(\mathbb{T})$ в действительности соответствуют операторы U_1, U_2, A. Доказательство теоремы 3 конструктивно. Оно показывает, что если функции φ с носителем, не совпадающим с окружностью $\mathbb{T}$, соответствуют некоторые операторы U_μ, A_μ в каждом пространстве $L^2(\mu)$, то она обладает определенной гладкостью.

Из теоремы 2 также следует, что если в формулировке цитированной выше теоремы 4.2 из статьи [4] опустить условие $\alpha \neq 1$, то она перестанет быть верной.

§2. Доказательство теоремы 1.

Пусть ограниченные операторы U, A действуют в пространстве $L^2(\mu)$, причем первый из них является оператором умножения на независимую переменную. Определим операторы $W_\pm(r)$ по формуле (1), полагая $U_1 = U_2 = U$. Для доказательства теоремы 1 потребуется несколько лемм технического характера.

Лемма 4. *Семейство операторов $W_+(r)U - UW_-(r)$ сходится к нулю в слабой операторной топологии тогда и только тогда, когда существует слабый предел*

$$\lim_r (W_+(r)U - UW_-(r))1 = 0$$

в пространстве $L^2(\mu)$.

Доказательство. Достаточно заметить, что множество всех векторов $h \in L^2(\mu)$, обладающих свойством $\lim_r (W_+(r)U - UW_-(r))h = 0$, образует приводящее подпространство оператора U, а функция $h \equiv 1$ является циклическим вектором этого оператора. □

Введем обозначение: $K = AU - UA$.

Лемма 5. *Справедливо соотношение*

$$W_+(r)U - UW_-(r) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n} \sum_{l=-n}^{n} U^l K U^{-l}.$$

Доказательство. Проведем вычисление:

$$\begin{aligned}
W_+(r)U - UW_-(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n} U^{-n} A U^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n} U^{n+1} A U^{-n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n} (U^{-n} A U^{n+1} - U^{n+1} A U^{-n}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n} \sum_{l=-n}^{n} (U^l A U^{-l+1} - U^{l+1} A U^{-l}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n} \sum_{l=-n}^{n} U^l K U^{-l}.
\end{aligned}$$

□

Определение. *Сверткой функций $f \in L^1(\mu)$, $g \in C(\mathbb{T})$ называется функция $f * g$, определяемая формулой*

$$(f * g)(z) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi) g(\bar{\xi} z)\, d\mu(\xi), \quad z \in \mathbb{T}.$$

Лемма 6. *Предположим, что коммутатор K является ядерным оператором,*

$$Kh = \sum_{m=0}^{\infty} (h, u_m) v_m, \quad h \in L^2(\mu),$$

где сумма $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \|u_m\| \cdot \|v_m\|$ конечна. Тогда

$$(W_+(r)U - UW_-(r))h = \sum_{m=0}^{\infty} v_m \cdot \left[(\bar{u}_m h) * \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n} D_n \right], \qquad (2)$$

где через D_n обозначено ядро Дирихле порядка n,

$$D_n(\zeta) = \sum_{-n}^{n} \zeta^l.$$

Доказательство. Предположим сначала, что коммутатор имеет вид $K = (\cdot, u)v$, и рассмотрим сумму $\sum\limits_{l=-n}^{n} U^l K U^{-l}$, примененную к вектору $h \in L^2(\mu)$:

$$\sum_{l=-n}^{n} U^l K U^{-l} h = \sum_{l=-n}^{n} U^l K z^{-l} h = \sum_{l=-n}^{n} U^l (z^{-l} h, u) v$$

$$= \sum_{l=-n}^{n} (z^{-l} h, u) z^l v = \sum_{l=-n}^{n} z^l v \cdot \int \bar{\xi}^l h(\xi) \overline{u(\xi)} \, d\mu(\xi)$$

$$= v \cdot \int h(\xi) \overline{u(\xi)} \sum_{l=-n}^{n} (\bar{\xi} z)^l \, d\mu(\xi) = v \cdot [(\bar{u} h) * D_n].$$

Из леммы 5 теперь следует равенство (2). Доказательство распространяется по линейности на общий случай ядерных коммутаторов. $\square$

Лемма 7. *Пусть вещественнозначная функция* $k \in L^\infty(\mu \times \mu)$ *обладает свойством* $k(\xi, z) = k(z, \xi)$. *Тогда для любых двух функций* $f, g \in L^2(\mu)$ *справедливо соотношение*

$$\iint (f(\xi) - f(z)) \overline{g(z)} k(\xi, z) \, d\mu(\xi) \, d\mu(z)$$
$$= \iint \overline{(g(\xi) - g(z))} f(z) k(\xi, z) \, d\mu(\xi) \, d\mu(z).$$

Доказательство. Рассмотрим линейный ограниченный оператор L, заданный в пространстве $L^2(\mu)$ своей билинейной формой

$$(Lf, g) = \iint (f(\xi) - f(z)) \overline{g(z)} k(\xi, z) \, d\mu(\xi) \, d\mu(z).$$

Для доказательства леммы достаточно проверить, что оператор L является самосопряженным. Вычислим квадратичную форму этого оператора:

$$(Lf, f) = \iint (f(\xi) - f(z)) \overline{f(z)} k(\xi, z) \, d\mu(\xi) \, d\mu(z).$$

Поменяв местами переменные z и ξ, получим равенство

$$(Lf, f) = \iint (f(z) - f(\xi)) \overline{f(\xi)} k(z, \xi) \, d\mu(z) \, d\mu(\xi).$$

Следовательно, сумма

$$2(Lf,f) = -\iint |f(\xi) - f(z)|^2 k(\xi,z)\,d\mu(z)\,d\mu(\xi)$$

вещественна, поэтому оператор L самосопряжен. □

Доказательство теоремы 1. Из теоремы 7.2 статьи [3] следует, что, не умаляя общности ситуации, можно считать тройку U_1, U_2, A удовлетворяющей условиям 1)–3) параграфа 1. Простое вычисление дает

$$U^{-1}W_+(r)U = W_+(r) - p_{r,0}A + \sum_{n=0}^{\infty}(p_{r,n} - p_{r,n+1})U^{-n-1}AU^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W_+(r)U - UW_-(r) &= U(U^{-1}W_+(r)U - W_-(r)) \\ &= U(W_+(r) - W_-(r)) + R_r, \end{aligned} \tag{3}$$

где R_r обозначает оператор

$$R_r = -p_{r,0}UA + \sum_{n=0}^{\infty}(p_{r,n} - p_{r,n+1})U^{-n}AU^{n+1}.$$

Свойства b), c) определения s-регулярного метода суммирования обеспечивают равенство $\lim\limits_r \|R_r\| = 0$. Из формулы (3) и леммы 4 следует, что для доказательства теоремы достаточно проверить слабую сходимость к нулю семейства функций $w_r = (W_+(r)U - UW_-(r))1$. По лемме 6 имеем

$$w_r = \varphi * \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n}D_n - \varphi \cdot \left[1 * \sum_{n=0}^{\infty} p_{r,n}D_n\right].$$

Положим $k_r(z,\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{r,n}D_n(\bar{\xi}z)$. После несложных преобразований получаем формулу

$$w_r(z) = \int (\varphi(\xi) - \varphi(z))k_r(z,\xi)\,d\mu(\xi). \tag{4}$$

Из определения функций w_r следует, что их нормы в пространстве $L^2(\mu)$ равномерно ограничены константой $2\|A\|$. Значит, можно проверять требуемое условие $\lim\limits_r (w_r, g) = 0$ для функций $g \in L^2(\mu)$, пробегающих плотное подмножество в пространстве $L^2(\mu)$. В качестве этого подмножества возьмем класс непрерывно дифференцируемых функций, заданных на окружности $\mathbb{T}$. Рассмотрим скалярное произведение

$$(w_r, g) = \iint (\varphi(\xi) - \varphi(z))\,\overline{g(z)}\,k_r(z,\xi)\,d\mu(\xi)\,d\mu(z),$$

где функция g непрерывно дифференцируема. Из леммы 7 следует равенство

$$(w_r, g) = \iint \overline{(g(\xi) - g(z))}\,\varphi(z)k_r(z,\xi)\,d\mu(\xi)\,d\mu(z).$$

Так как оценка $|D_n(\bar{\xi}z)| \leqslant \frac{2}{|\xi - z|}$ справедлива для всех номеров $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\sum\limits_n p_{r,n} = 1$, имеем $|k_r(z,\xi)| \leqslant \frac{2}{|\xi - z|}$. Следовательно, подынтегральное выражение μ-почти всюду ограничено суммируемой функцией

$$2 \sup_{\xi, z \in \mathbb{T}} \left| \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} \right| \cdot |\varphi|.$$

По свойству d) s-регулярного метода суммирования, усреднения любой непостоянной унимодулярной геометрической прогрессии стремятся к нулю. Для ядра Дирихле при $\xi \neq z$ имеем

$$D_n(\bar{\xi}z) = \sum_{-n}^{n} (\bar{\xi}z)^l = \frac{2\,\mathrm{Re}((\bar{\xi}z)^n - (\bar{\xi}z)^{n+1})}{|1 - \bar{\xi}z|^2}. \tag{5}$$

Значит, предел $\lim\limits_r k_r(z,\xi)$ равен нулю, если $\xi \neq z$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости получаем $\lim_r (w_r, g) = 0$. Теорема доказана. $\square$

§3. Доказательство теоремы 2.

В теореме 7.2 статьи [3] доказывается, что если усредненный волновой оператор прошлого существует для всех операторов U, A, обладающих свойствами 1)–3) из параграфа 1, то усредненный волновой оператор прошлого существует для всех операторов U_1, U_2, A, имеющих коммутатор ранга 2. По теореме 1 усредненные волновые операторы прошлого и будущего существуют или нет одновременно. Таким образом, для доказательства теоремы 2 осталось проверить следующую лемму.

Лемма 8. *Пусть слабый предел* $\lim\limits_r W_-(r)$ *существует для всех операторов* U, A, *соответствующих непрерывным функциям* φ. *Тогда этот предел существует для всех операторов* U, A, *соответствующих функциям* $\varphi \in L^2(\mu)$.

Доказательство. Рассмотрим пару операторов U, A, удовлетворяющую условиям 1)–3) и соответствующую функции $\varphi \in L^2(\mu)$. По теореме Лузина существует последовательность компактов $K_j \subset \mathbb{T}$ таких, что $\mu(\mathbb{T} \setminus K_j) \leqslant \frac{1}{j}$ и функция φ совпадает с функциями $\varphi_j \in C(\mathbb{T})$ на K_j.

Зафиксируем произвольный номер j. Обозначим через χ_j характеристическую функцию компакта K_j. Положим $\mu_j = \chi_j\mu$. Определим операторы U_j, A_j следующим образом:

$$U_j = U|L^2(\mu_j), \qquad A_j = P_jA|L^2(\mu_j),$$

где P_j обозначает спектральный проектор оператора U на пространство $L^2(\mu_j)$. Заметим, что имеет место соотношение $A_jU_j - U_jA_j = (\cdot, \varphi_j)1 - (\cdot, 1)\varphi_j$, причем $\varphi_j \in C(\mathbb{T})$. Построим семейство операторов

$$W_-(j,r) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{r,n} U_j^n A_j U_j^{-n}.$$

По условию, существует слабый предел $\lim\limits_r W_-(j,r)$. Для любой пары функций g_1, $g_2 \in L^2(\mu)$ имеем равенство

$$(W_-(r)\chi_j g_1, g_2) = (W_-(j,r)P_j g_1, P_j g_2).$$

Теперь существование слабого предела $\lim\limits_r W_-(r)$ следует из оценки $\mu(\mathbb{T} \setminus K_j) \leqslant \frac{1}{j}$ и предельного перехода по j. □

§4. Доказательство теоремы 3.

Определим операторы P_r, $r \in (0,1)$, в пространстве $L^2(\mu)$ формулой

$$(P_r\varphi)(z) = \int_{\mathbb{T}} (\varphi(\xi) - \varphi(z)) \frac{1-r^2}{|1-r\bar{\xi}z|^2}\, d\mu(\xi).$$

Лемма 9. *Существуют функция* $\varphi \in C(\mathbb{T})$ *и борелевская сингулярная мера* μ *на окружности* $\mathbb{T}$, *не имеющая точечных нагрузок, такие, что нормы функций* $P_r\varphi$ *в пространстве* $L^2(\mu)$ *неограничены.*

Доказательство. Обозначим через arg ветвь аргумента со значениями в промежутке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. Определим функцию φ на окружности $\mathbb{T}$ следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & \text{если} \ \ \arg z \in [-\frac{\pi}{2}, 0); \\ \arg^{1/4}(z), & \text{если} \ \ \arg z \in [0, \frac{\pi}{2}]; \\ g(z), & \text{если} \ \ \arg z \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \end{cases}$$

где g – любая неотрицательная функция, обеспечивающая выполнение условия $\varphi \in C(\mathbb{T})$. Зададим функцию $\psi \in C(\mathbb{T})$ равенством $\psi(z) = \varphi(\bar{z})$. Для любой меры μ, сосредоточенной на дуге $I = \{z : \arg z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$, имеем

$$(P_r\varphi, \psi) = \iint \varphi(\xi)\psi(z)\frac{1-r^2}{|1-r\bar{\xi}z|^2}\, d\mu(\xi)\, d\mu(z),$$

в силу равенства $\varphi\psi = 0$, справедливого в точках дуги I. Найдем семейство дуг $I_k \subset \mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, таких, что

1) точка $a_k = \exp(\operatorname{sign} k \cdot 2^{-|k|} i)$, $\operatorname{sign} k = \frac{k}{|k|}$, является серединой дуги I_k,
2) имеют место неравенства $\varphi(z) \geqslant \frac{1}{2}\varphi(a_k)$ и $\psi(z) \geqslant \frac{1}{2}\psi(a_k)$ в каждой точке $z \in I_k$,
3) $\sup_{z\in I_k, \xi \in I_{-k}} |z - \xi| \leqslant 2^{-|k|+2}$.

Теперь зададим меру μ на дуге I по формуле $\mu = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} k^{-2}\mu_k$, где вероятностные меры μ_k сосредоточены на дугах I_k. В частности, мера μ может быть выбрана сингулярной и не имеющей точечных нагрузок. Пусть $r_m = 1 - 2^{-m}$, $m \geqslant 1$, тогда

$$\begin{aligned} (P_{r_m}\varphi, \psi) &\geqslant \frac{\varphi(a_m)\psi(a_{-m})}{4m^4} \iint\limits_{I_m \times I_{-m}} \frac{1-r_m^2}{|1-r_m\bar{\xi}z|^2}\, d\mu(\xi)\, d\mu(z) \\ &\geqslant \frac{\varphi(a_m)\psi(a_{-m})}{4m^4} \inf_{\substack{\xi \in I_{-m} \\ z \in I_m}} \frac{1-r_m}{(|z - r_m z| + |r_m z - r_m \xi|)^2} \\ &\geqslant \frac{1}{100m^4} 2^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}$$

что стремится к бесконечности при возрастании параметра m. Таким образом, $\sup_r (P_r\varphi, \psi) = \infty$, поэтому функции $P_r\varphi$ неограничены по норме в пространстве $L^2(\mu)$. $\square$

Замечание. В доказательстве леммы 9 была построена функция $\varphi \in C(\mathbb{T})$ такая, что функции $P_r\varphi$ неограничены по норме в пространстве $L^1(\mu)$, что непосредственно вытекает из ограниченности функции ψ. Это делает невозможной сходимость функций $P_r\varphi$ в любой естественной топологии.

Доказательство теоремы 3. Возьмем функцию φ, построенную в лемме 9. Предположим, что выполнено соотношение $AU - UA = (\cdot,\varphi)1 - (\cdot,1)\varphi$, и рассмотрим операторы $W_\pm(r)$, полученные с помощью метода суммирования Абеля. Средние ядер Дирихле $D_n(\bar{\xi}z)$ при усреднении по методу Абеля равны ядру Пуассона $\frac{1-r^2}{|1-r\bar{\xi}z|^2}$. Из формулы (4) вытекает равенство

$$(W_+(r)U - UW_-(r))1 = P_r\varphi.$$

В частности, имеет место неравенство $\sup\limits_r \|P_r\varphi\| \leqslant 2\|A\|$, что противоречит заключению леммы 9. □

§5. Граничное поведение интегралов типа Коши.

Лемма 9 интересна в связи с недавним результатом В. В. Капустина о граничном поведении интегралов типа Коши. Чтобы сформулировать этот результат, введем несколько стандартных понятий из теории псевдопродолжимых функций. Читатель может найти более подробную информацию в статье [4].

Для сингулярной вероятностной меры μ на единичной окружности $\mathbb{T}$ определим внутреннюю функцию θ соотношением

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+\theta(z)}{1-\theta(z)}\right) = \int \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\,d\mu(\xi), \quad |z|<1.$$

Функция θ порождает семейство сингулярных вероятностных мер $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{T}}$ по формуле

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha+\theta(z)}{\alpha-\theta(z)}\right) = \int \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\,d\sigma_\alpha(\xi), \quad |z|<1.$$

По определению, имеем $\mu = \sigma_1$. С внутренней функцией θ свяжем подпространство $K_\theta = H^2 \ominus \theta H^2$ пространства Харди H^2 в единичном круге комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функции из пространства K_θ имеют угловые граничные значения σ_α-почти всюду для каждой меры σ_α, см. [6].

Определим операторы C_r, $r \in (0,1)$, в пространстве $L^2(\mu)$ по формуле

$$C_r : \varphi \mapsto \int\limits_{\mathbb{T}} (\varphi(\xi) - \varphi(z)) \frac{1}{1 - r\bar{\xi}z}\, d\mu(\xi).$$

Теорема 10 ([4, теорема 4.2]). *Предположим, что при некотором $\alpha \neq 1$ функция $h \in K_\theta$ совпадает σ_α-почти всюду с некоторой непрерывной функцией φ_α. Возьмем функцию $\varphi \in L^2(\mu)$ такую, что $h = \varphi$ σ_1-почти всюду. Если мера σ_1 не имеет точечных нагрузок, то семейство $\{C_r\varphi\}$ сходится по норме пространства $L^2(\mu)$ к функции $\frac{\varphi_\alpha - \varphi}{\alpha - 1}$.*

Как показано в статье [3], истинность предположения 1 равносильна сходимости функций $C_r\varphi$ для всех функций φ, соответствующих операторам U, A со свойствами 1)–3) из параграфа 1. В теореме 10 устанавливается сходимость функций $C_r\varphi$ для функций φ с непрерывной “пересадкой” φ_α. С другой стороны, из теоремы 2 следует, что без потери общности можно проверять сходимость семейства $\{C_r\varphi\}$ только для непрерывных функций φ. По определению имеем $\varphi_1 = \varphi$. Оказывается, что в теореме 10 утрачивается сходимость, если $\alpha = 1$.

Предложение 11. *Существуют функция $\varphi \in C(\mathbb{T})$ и борелевская сингулярная мера μ на окружности $\mathbb{T}$, не имеющая точечных нагрузок, такие, что нормы функций $C_r\varphi$ в пространстве $L^2(\mu)$ неограничены.*

Доказательство. Используя тождества

$$\frac{2}{1 - r\bar{\xi}z} - 1 = \frac{1 + r\bar{\xi}z}{1 - r\bar{\xi}z} \quad \text{и} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1 + r\bar{\xi}z}{1 - r\bar{\xi}z}\right) = \frac{1 - r^2}{|1 - r\bar{\xi}z|^2},$$

несложно проверить, что $\|P_r(\varphi)\| \leqslant 2\|C_r(\varphi)\| + \|\varphi\|$ для любой вещественнозначной функции $\varphi \in L^2(\mu)$. Осталось применить лемму 9. $\square$

Из предложения 11 следует, что оператор $C : f \mapsto \lim\limits_r C_r f$ неограничен в пространстве $L^2(\mu)$, см. также [4]. С другой стороны, оператор C корректно определен на непрерывно дифференцируемых функциях. Один из естественных способов определить его на более широком подмножестве пространства $L^2(\mu)$ мог бы быть следующим: сначала определить оператор C как предел $\lim\limits_r C_r f$ на всех функциях $f \in L^2(\mu)$, для которых этот предел существует в пространстве

$L^2(\mu)$, затем взять замыкание оператора C. Следующее утверждение показывает, что этот способ не работает.

Предложение 12. *Оператор C, определенный на всех функциях f, для которых существует предел $\lim_r C_r f$ в пространстве $L^2(\mu)$, не является замыкаемым оператором в пространстве $L^2(\mu)$.*

Доказательство. Из теоремы 10 следует, что $C\varphi = 0$ для любой функции φ, являющейся следом на окружности $\mathbb{T}$ непрерывной вплоть до границы функции $h \in K_\theta$ (в этом случае $\varphi_\alpha = \varphi$ почти всюду по мере σ_1). Из известного результата А. Б. Александрова (см. [8] или [9]) следует, что непрерывные функции из пространства K_θ образуют плотное подмножество в K_θ. Так как оператор, переводящий функцию из пространства K_θ в ее граничные значения σ_α-почти всюду, является унитарным оператором из пространства K_θ в пространство $L^2(\sigma_\alpha)$, см. [6, 7], следы непрерывных функций из K_θ плотны в пространстве $L^2(\mu)$. Следовательно, замыкаемость оператора C должна означать равенство $C = 0$. Однако, например, $Cf = -\bar{z} \neq 0$ для функции $f(z) \equiv \bar{z}$. □

Литература

1. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния.* Изд-во СПбГУ, С.-Петербург, 1994.
2. В. В. Капустин, *Граничные значения интегралов типа Коши.* — Алгебра и Анализ **16** (2004), 4, 114–131.
3. В. В. Капустин, *Волновые операторы на сингулярном спектре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 48–63.
4. V. V. Kapustin, *Wave operators on the singular spectrum. The case of rank-two commutators.* PDMI Preprint 06/2010.
5. V. V. Kapustin, *On the averaged wave operators on the singular spectrum.* PDMI Preprint 08/2011.
6. А. Г. Полторацкий, *Граничное поведение псевдопродолжимых функций.* — Алгебра и Анализ **5** (1993), 2, 189–210.
7. D. Clark, *One dimensional perturbations of restricted shifts.* — J. Anal. Math. **25** (1972), 169–191.
8. А. Б. Александров, *Инвариантные подпространства операторов сдвига. Аксиоматический подход.* — Записки научн. семин. ЛОМИ **113** (1981), 7–26.
9. J. A. Cima, A. L. Matheson, W. T. Ross, *The Cauchy Transform.* Mathematical Surveys and Monographs, 125, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

Bessonov R. V. The future and past wave operators on the singular spectrum.

We consider averaged wave operators constructed for singular unitary operators U_1, U_2 and a bounded identification operator A. In the case of rank-two commutator $AU_1 - U_2A$, we show that averaged wave operators of past and future exist or do not exist simultaneously, and if they exist, they must coincide. As a consequence, we obtain some results concerning the boundary behavior of Cauchy-type integrals.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, С.-Петербург, 191023, Россия
E-mail: bessonov@pdmi.ras.ru

Поступило 24 июня 2011 г.