Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 388, 2011 г.

И. Д. Супруненко

О БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЕ РЕГУЛЯРНЫХ УНИПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ПОДСИСТЕМНЫХ ПОДГРУПП ТИПА $A_1 \times A_2$ В ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

Н. Л. Гордееву с уважением и наилучшими пожеланиями в связи с его 60-летием

§1. Введение

Изучается поведение регулярных унипотентных элементов из подсистемной подгруппы типа $A_1 \times A_2$ в p-ограниченных неприводимых представлениях специальной линейной группы ранга, большего 5, над полем характеристики $p > 2$. Для указанного ниже класса представлений с определенными локальными свойствами старших весов установлено, что образы таких элементов имеют блоки Жордана всех априори возможных размерностей.

Далее K – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, $G = A_r(K)$, $r \geq 6$, ω_i, $1 \leq i \leq r$, – фундаментальные веса группы G. Напомним, что неприводимое рациональное представление группы G называется p-ограниченным, если его старший вес равен $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i\omega_i$ и все коэффициенты $a_i < p$. Подгруппу, порожденную всеми корневыми подгруппами, ассоциированными с корнями из некоторой подсистемы системы корней группы G, будем называть подсистемной подгруппой. Для неприводимого представления φ со старшим весом $\sum\limits_{k=1}^{r} a_k\omega_k$ при $i \geq 4$ и $j \leq r-4$ положим $b_i(\varphi) = \sum\limits_{k=1}^{i-2} a_k$ и $c_j(\varphi) = \sum\limits_{k=j+3}^{r} a_k$.

Ключевые слова: представления, подсистемные подгруппы, унипотентные элементы, блочная структура.

Работа выполнена в рамках совместного проекта, поддержанного Белорусским республиканским и Российским фондами фундаментальных исследований, проект No. Ф10Р-110.

Теорема 1. *Пусть $p > 3$, $x \in G$ – регулярный унипотентный элемент из подсистемной подгруппы типа $A_1 \times A_2$, φ – p-ограниченное представление группы G со старшим весом $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$. Предположим, что $a_i + a_{i+1} \leq (p-1)/2$ для некоторого $i < r$ и выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$i \geq 5$ и $a_j < p-1$ для некоторого $j < i-1$;*

(2) *$i \leq r-5$ и $a_j < p-1$ для некоторого $j > i+2$;*

(3) *$i = 4$, a_1 или $a_2 = p-1$ и $b_4(\varphi) < 2p-2$;*

(4) *$i = r-4$, a_{r-1} или $a_r = p-1$ и $c_{r-4}(\varphi) < 2p-2$.*

Положим $l = \min\{p, 1 + 2a_1 + 3(a_2 + \cdots + a_{r-1}) + 2a_r\}$. Тогда элемент $\varphi(x)$ имеет блоки Жордана всех размерностей от 1 до l. При этом достаточно предположить, что $a_i + a_{i+1} < p-2$, если $r \geq 8$, либо $i \geq 4$ и $b_i \geq p-2$, либо $i \leq r-4$ и $c_i \geq p-2$.

Известно, что все подсистемные подгруппы типа $A_1 \times A_2$ сопряжены в группе G. Ниже (лемма 4) установлено, что в условиях теоремы 1 элемент $\varphi(x)$ не может иметь блоков размерности, большей l.

Теорема 2. *Пусть $p = 3$, элемент x такой, как в теореме 1, φ – нетривиальное 3-ограниченное представление группы G со старшим весом $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$. Предположим, что для некоторого $i < r$ коэффициент $a_i = a_{i+1} = 0$ или 1 и выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$i \geq 5$ и $a_j < 2$ для некоторого $j < i-1$;*

(2) *$i \leq r-5$ и $a_j < 2$ для некоторого $j > i+2$;*

(3) *$i = 4$, a_1 или $a_2 = 2$ и $b_4(\varphi) < 4$;*

(4) *$i = r-4$, a_{r-1} или $a_r = 2$ и $c_{r-4}(\varphi) < 4$.*

Тогда $\varphi(x)$ имеет блоки Жордана размерностей 1, 2 и 3.

При $r \geq 9$ оказывается, что утверждения теорем 1 и 2 справедливы для широкого класса представлений с локально малыми старшими весами (сумма двух последовательных коэффициентов старшего веса не слишком велика).

Следствие 3. *Пусть $p \geq 3$, $r \geq 9$, x и l такие, как в теореме 1, φ – p-ограниченное представление группы G со старшим весом $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$. Предположим, что более 6 коэффициентов a_j не равны $p-1$ и что*

для некоторого $i < r$ *сумма* $a_i + a_{i+1} < p - 2$ *при* $p > 3$ *и* $a_i = a_{i+1} = 0$ *или* 1 *при* $p = 3$. *Тогда элемент* $\varphi(x)$ *имеет блоки Жордана всех размерностей от* 1 *до* l.

В естественном модуле элемент из теорем 1 и 2 имеет один блок Жордана размерности три и один блок размерности два, все другие блоки единичные.

Результаты этой статьи составляют часть более общей программы изучения поведения унипотентных элементов из подсистемных подгрупп малых рангов в представлениях классических алгебраических групп. Известно, что образ унипотентного элемента в неприводимом представлении полупростой алгебраической группы, все коэффициенты старшего веса которого равны $p - 1$ (базовом представлении Стейнберга), имеет лишь блоки Жордана размерности, равной порядку этого элемента. В настоящее время размерности блоков Жордана образов корневых элементов в неприводимых рациональных представлениях в нечетной характеристике найдены для простых алгебраических групп ранга, большего двух, с корнями одной длины; для длинных корневых элементов групп типов B_r, C_r при $r > 2$ и F_4 и для коротких корневых элементов групп типа C_r при $r > 3$; для групп типов C_r и F_4 задача решена при некоторых дополнительных ограничениях (М. В. Величко [30, 3, 4], для представлений с локально малыми старшими весами эти результаты получены в [23] и [22]). Во всех изученных случаях, кроме групп типа C_r, в этих образах есть блоки всех априори возможных размерностей, если рассматриваемое представление не является композицией полевого морфизма группы (возможно, тривиального) и базового представления Стейнберга или тензорным произведением такой композиции и другого неприводимого представления; для типа C_r при любом нечетном p имеются исключительные серии p-ограниченных представлений, где образы длинных корневых элементов не обладают данным свойством. В работах А. А. Осиновской [7, 8] исследовалось поведение регулярных унипотентных элементов из подсистемных подгрупп типов A_2, B_2 и C_2 в p-ограниченных представлениях классических групп с локально малыми старшими весами. В [7] установлено, что если в обозначениях теоремы 1 $r > 4$ и $a_i + a_{i+1} \leq (p-3)/2$, то образ регулярного унипотентного элемента из подсистемной подгруппы типа A_2 имеет блоки Жордана всех априори возможных нечетных размерностей. Из теоремы 5 [23] следует,

что образ такого элемента имеет лишь блоки нечетных размерностей, если $2\sum\limits_{i=1}^{r} a_i \leq p-1$.

Есть основания предполагать, что часто образ произведения нетривиального унипотентного элемента из подсистемной подгруппы относительно малого ранга и коммутирующего с ним длинного корневого элемента имеет блоки всех априори возможных размерностей. В [5, 6, 27, 28] содержатся результаты, показывающие, что это утверждение обычно выполняется для образов квадратичных унипотентных элементов в p-ограниченных представлениях: для групп типов A_r, B_r и D_r достаточно потребовать, чтобы среди коэффициентов старшего веса представления было не слишком мало чисел, меньших $p-1$; для групп типа C_r соответствующие результаты получены при дополнительном предположении, что значение старшего веса на максимальном корне не меньше $p-1$. В этой работе рассматривается блочная структура образа произведения корневого элемента с "простейшим" неквадратичным элементом. Оказалось, что для многих представлений проще описать эту структуру для произведения из теоремы 1, чем решить аналогичную задачу для одного из сомножителей – регулярного унипотентного элемента из подсистемной подгруппы типа A_2.

Детальная информация о блочной структуре образов унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп может быть использована для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц определенного вида. Для этой цели важно уметь различать типичные и редкие ситуации. Полученное А. Е. Залесским и Ф. Х. Тьепом ([29, теорема 2.20]) описание неприводимых представлений простых алгебраических групп в характеристике $p > 3$, в которых размерности блоков Жордана образов корневых элементов принадлежат множеству $\{1, p, p-1\}$, было весьма существенно использовано ими при исследовании приводимости редукции по модулю p комплексных представлений конечных групп Шевалле в характеристике p ([29, теорема 1.2]).

Результаты статьи легко переносятся на K-представления специальной линейной группы над конечным полем характеристики p.

§2. Обозначения и предварительные результаты

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ – множества целых и целых неотрицательных чисел, $\mathbb{N}_a^b = \{n \in \mathbb{N} \mid a \le n \le b\}$; J_l – блок Жордана размерности l с единицами на диагонали; $\mathbf{X}(H)$ и $\operatorname{Irr}_p H$ соответственно – множества весов и p-ограниченных представлений полупростой алгебраической группы H, $\langle \mu, \alpha \rangle$ – значение веса μ на корне α, $\omega(\varphi)$ ($\omega(M)$) – старший вес представления φ (модуля M), φ^* – представление, дуальное φ, $d_\varphi(x)$ – степень минимального полинома преобразования $\varphi(x)$ при $x \in H$, $\varphi \in \operatorname{Irr}_p H$; X_α, $X_{\alpha,k}$ и $\mathcal{X}_\alpha$ – корневой элемент алгебры Ли группы H, элемент ее гипералгебры и корневая подгруппа в H, ассоциированные с корнем α и числом $k \in \mathbb{N}$; α_i, $1 \le i \le r$, – простые корни группы G. Нумерация фундаментальных весов и простых корней стандартна и соответствует [1]. Символы ω_i используются для обозначения фундаментальных весов не только группы G, но и других простых алгебраических групп, из контекста всегда ясно, о какой группе идет речь. Положим $\mathbf{X} = \mathbf{X}(G)$, $\operatorname{Irr}_p = \operatorname{Irr}_p G$, $X_{\pm i} = X_{\pm\alpha_i}$, $X_{\pm i,k} = X_{\pm\alpha_i,k}$, $\mathcal{X}_{\pm i} = \mathcal{X}_{\pm\alpha_i}$. Далее $\langle G_1, \dots, G_i \rangle \subset G$ – подгруппа, порожденная подгруппами $G_1, \dots, G_i$, $\langle V_1, \dots, V_i \rangle$ – линейная оболочка подпространств $V_1, \dots, V_i$ некоторого линейного пространства; $G(i_1, \dots, i_k) = \langle \mathcal{X}_{i_1}, \mathcal{X}_{-i_1}, \dots, \mathcal{X}_{i_k}, \mathcal{X}_{-i_k} \rangle$. Рассматриваются только конечномерные представления и модули. Символы $\mathbf{X}(M)$, $\dim M$ и M^λ обозначают множество весов модуля M, его размерность и весовое подпространство веса λ, $\omega(v)$ – вес весового вектора $v \in M$.

Если H – подгруппа в G, то $M \mid H$ и $\varphi \mid H$ – ограничение G-модуля M или представления φ на H соответственно. Как обычно, веса и корни группы G рассматриваются относительно некоторого фиксированного максимального тора T. При $H = G(i_1, \dots, i_k)$ пересечение $T \cap H$ – максимальный тор в H. Далее в этой ситуации $\mu|H$ – вес группы H, определяемый ограничением веса $\mu \in \mathbf{X}(G)$ с T на $T \cap H$. Иногда для весового вектора v вместо $\omega(v) \mid H$ будем писать $\omega_H(v)$. Заметим, что ограничения на $T \cap H$ корней $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ составляют базис системы корней группы H; фундаментальные веса данной группы определяются по отношению к этому базису. Веса группы типа A_1 естественным образом отождествляются с целыми числами. Обозначим символами V и ε_j, $1 \le j \le r+1$, стандартный G-модуль и его веса, определенные в [2, §13, часть 1].

Далее $J(z)$ – множество размерностей блоков Жордана (без учета кратностей) в канонической форме унипотентного элемента $z \in \mathrm{GL}_m(K)$; $J_\varphi(u) = J(\varphi(u))$ для представления φ алгебраической группы Γ и унипотентного элемента $u \in \Gamma$; $J_L(u)$ – аналогичное множество для подпространства L в некотором Γ-модуле, инвариантного относительно u. Очевидно, что $J(z) \subset \mathbb{N}_1^p$ для любого элемента z порядка p, так как для унипотентного элемента размерность его блока Жордана не больше порядка этого элемента.

Следующие факты существенно используются в доказательствах основных результатов статьи.

Лемма 4. *Пусть $p > 2$, $x \in G$ – регулярный унипотентный элемент из подсистемной подгруппы типа $A_1 \times A_2$, $\varphi \in \mathrm{Irr}_p$, $\omega(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$ и l определяется, как в теореме 1. Тогда $d_\varphi(x) = l$.*

Доказательство. Пусть $z \in G$ – элемент порядка p, $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_t$ – размерности блоков Жордана элемента z в стандартной реализации группы G, $d_1 + \cdots + d_t = r + 1$. Положим

$$N(z) = (d_1 - 1, \ldots, 1 - d_1, d_2 - 1, \ldots, 1 - d_2, \ldots, d_t - 1, \ldots, 1 - d_t).$$

При $1 \leq j \leq r$ обозначим символом m_j сумму j наибольших членов последовательности $N(z)$. В силу результатов [12, теорема 1.1, алгоритм 1.4, предложения 1.3 и 2.6] $d_\varphi(z) = \min\{p, 1 + \sum\limits_{j=1}^{r} a_j m_j\}$. Остается вспомнить, что при $z = x$ число $d_1 = 3$, $d_2 = 2$ и $d_j = 1$ при $j > 2$, блоки размерности 1 обязательно присутствуют. □

Теорема 5 ([30, следствие 1])**.** *Пусть $H = A_t(K)$, $t > 2$, $u \in H$ – неединичный корневой элемент, $\rho \in \mathrm{Irr}_p H$ и $\omega(\rho) = \sum\limits_{j=1}^{t} c_j\omega_j$. Предположим, что $c_j \neq p-1$ для некоторого j. Положим $m = \min\{p, 1+\sum\limits_{j=1}^{t} c_j\}$. Тогда $J_\rho(u) = \mathbb{N}_1^m$.*

Лемма 6 ([23, предложение 3])**.** *Пусть $H = A_2(K)$, $u \in H$ – неединичный корневой элемент, $\psi \in \mathrm{Irr}_p H$, $\omega(\psi) = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ и либо $a_1 + a_2 < p - 1$, либо a_1 или $a_2 = p - 1$ и $a_1 + a_2 < 2p - 2$. Положим $a = \min\{p, 1 + a_1 + a_2\}$. Тогда $J_\psi(u) = \mathbb{N}_1^a$.*

Леммы 7 и 10 известны, но нам не удалось найти явную ссылку.

Лемма 7. *Пусть $A = A_1(K)$ и M – A-модуль, все веса которого $< p$. Тогда M вполне приводим.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}$ – множество конечномерных A-модулей, все веса которых $< p$. Достаточно показать, что для модуля $F \in \mathcal{S}$ и p-ограниченного модуля N пространство $\mathrm{Ext}^1(F, N) = 0$, и использовать индукцию по числу композиционных факторов модуля M. Известно, что $\mathrm{Ext}^1(L, N) = 0$ для p-ограниченных модулей L и N (например, это следует из неприводимости модулей Вейля со старшими весами, меньшими p, и [19, гл. II, предложение 2.14]). Ввиду теоремы о длинной точной последовательности для функтора Ext [17, том 1, теорема 8.6] $\mathrm{Ext}^1(F, N) = 0$, если $\mathrm{Ext}^1(Q, N) = \mathrm{Ext}^1(F/Q, N) = 0$ для некоторого подмодуля $Q \subset F$. Остается применить индукцию по числу композиционных факторов модуля F. □

Следствие 8. *Пусть $S \subset G$ – замкнутая подгруппа типа A_1 и ограничение $V|S$ – вполне приводимый модуль, одна из неприводимых компонент которого имеет старший вес $2\omega_1$, а остальные тривиальны. Предположим, что $\varphi \in \mathrm{Irr}_p$, $\omega(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j \le (p-1)/2$. Тогда ограничение $\varphi|S$ вполне приводимо.*

Доказательство. Напомним, что $\alpha_j = \varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}$ и $\omega_j = \sum\limits_{k=1}^{j} \varepsilon_k$ при $1 \le j \le r$. Нетрудно заметить, что существуют максимальные торы $T \subset G$ и $T_S \subset S$ такие, что $T_S = T \cap S$ и ограничение весов с T на T_S задает гомоморфизм $\tau : \mathbf{X} \to \mathbb{Z}$ с $\tau(\varepsilon_1) = 2$, $\tau(\varepsilon_j) = 0$ при $2 \le j \le r$ и $\tau(\varepsilon_{r+1}) = -2$ (можно считать, что компонента S-модуля V со старшим весом $2\omega_1$ реализуется в подпространстве, натянутом на векторы весов ε_1, ε_2 и ε_{r+1}). Тогда $\tau(\alpha_j) \ge 0$. Поэтому $\max\{\tau(\mu) \mid \mu \in \mathbf{X}(\varphi)\} = \tau(\omega(\varphi)) = 2\sum\limits_{j=1}^{r} a_j \le p-1$. Утверждение следствия вытекает из леммы 7. □

Приведенная ниже лемма 9 также следует из леммы 7.

Лемма 9 ([13, часть леммы 3]). *Пусть $\varphi \in \mathrm{Irr}_p$, $\omega(\varphi) = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j < p$. Тогда для любого корня α группы G ограничение представления φ на подгруппу $\langle \mathcal{X}_\alpha, \mathcal{X}_{-\alpha} \rangle$ вполне приводимо.*

Лемма 10. *Пусть группа $H = H_1H_2$, где H_1 и H_2 – коммутирующие подгруппы. Предположим, что H-модуль M вполне приводим как H_1- и H_2-модуль. Тогда M – вполне приводимый H-модуль.*

Доказательство. Запишем $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$, где M_j – однородные компоненты H_1-модуля M, т.е. все композиционные факторы каждого из модулей M_j изоморфны и модули M_a и M_b не имеют изоморфных композиционных факторов при $a \neq b$. Ясно, что подпространства M_j инвариантны относительно H_2. Поэтому достаточно показать, что H-модули M_j вполне приводимы. Пусть $N = M_j$. Из [11, гл. 4, §15, лемма 7] следует, что H-модуль $N \cong N_1 \otimes N_2$, где N_1 – неприводимый H_1-модуль, N_2 – H_2-модуль ($\dim N_2 = 1$, если H_1-модуль N неприводим). Модуль N_2 вполне приводим, так как изоморфен подмодулю H_2-модуля M. Поэтому H-модуль N вполне приводим ввиду следствия а) из леммы 68 [10]. □

Предложение 11. *Пусть Γ и $\Gamma_{\mathbb{C}}$ – односвязные полупростые алгебраические группы над K и $\mathbb{C}$ соответственно с одной и той же системой корней, M и $M_{\mathbb{C}}$ – неприводимые Γ- и $\Gamma_{\mathbb{C}}$-модули с p-ограниченным старшим весом ω, $x \in \Gamma$, $|x| = p$, $x_{\mathbb{C}} \in \Gamma_{\mathbb{C}}$. Предположим, что выполняются следующие условия:*

(1) *существуют подгруппы $A \subset \Gamma$ и $A_{\mathbb{C}} \subset \Gamma_{\mathbb{C}}$ типа A_1 такие, что $x \in A$, $x_{\mathbb{C}} \in A_{\mathbb{C}}$ и ограничение весов с подходящих максимальных торов групп Γ и $\Gamma_{\mathbb{C}}$ на максимальные торы в A и $A_{\mathbb{C}}$ соответственно индуцирует один и тот же гомоморфизм $\psi : \mathbf{X}(\Gamma) \to \mathbb{Z}$;*

(2) *$\psi(\lambda) < p$ для любого $\lambda \in \mathbf{X}(M)$;*

(3) *модуль Вейля группы Γ со старшим весом ω неприводим.*

Тогда $J_M(x) = J_{M_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})$.

Доказательство. В силу леммы 7 $M|A$ – вполне приводимый модуль с p-ограниченными компонентами. Известно, что образ нетривиального унипотентного элемента в неприводимом представлении группы $A_1(\mathbb{C})$ или в p-ограниченном неприводимом представлении группы $A_1(K)$ со старшим весом l имеет единственный блок Жордана размерности $l + 1$. Поэтому множества $J_M(x)$ и $J_{M_{\mathbb{C}}}(x_{\mathbb{C}})$ полностью определяются размерностями весовых пространств A-модуля M и $A_{\mathbb{C}}$-модуля $M_{\mathbb{C}}$. Так как модуль Вейля со старшим весом ω неприводим, то $\dim M^{\mu} = \dim M^{\mu}_{\mathbb{C}}$ для любого веса $\mu \in \mathbf{X}$. Из условия (1) следует, что

$\dim(M|A)^t = \dim(M_{\mathbb{C}} \mid A_{\mathbb{C}})^t$ при $t \in \mathbb{Z}$. Отсюда вытекает утверждение предложения. $\square$

Теорема 12 ([9, следствие 3]). *Пусть $\Delta = A_2(\mathbb{C})$, $z \in \Delta$ – регулярный унипотентный элемент и ψ – неприводимое представление группы Δ со старшим весом $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$. Положим $a = 2a_1 + 2a_2 + 1$. Тогда множество $J_\psi(z)$ определяется следующим образом:*

(1) $J_\psi(z) = \{j \mid 1 \le j \le a, j \equiv a(\mod 4)\}$ *при* $a_1a_2 = 0$;

(2) $J_\psi(z) = \{k \mid 1 < k \le a,\ k$ *нечетно*$\}$, *если* $a_1a_2 \ne 0$ *и хотя бы одно из чисел* a_1 *или* a_2 *нечетно;*

(3) $J_\psi(z) = \{m \mid 1 \le m \le a,\ m$ *нечетно*, $m \ne 3\}$, *если* $a_1a_2 \ne 0$ *и* a_1 *и* a_2 *оба четны.*

Следствие 13. *Пусть $\Gamma = A_2(K)$, $u \in \Gamma$ – регулярный унипотентный элемент и $\tau \in \mathrm{Irr}_p\Gamma$ – представление со старшим весом $a_1\omega_1 + a_2\omega_2$. Предположим, что $a_1 + a_2 \le (p-1)/2$. Тогда множество $J_\tau(u)$ совпадает с $J_\psi(z)$ из теоремы 12.*

Доказательство. Положим $\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$. В силу результатов Брадена [16] модуль Вейля группы Γ со старшим весом ω неприводим. Пусть $\Gamma_{\mathbb{C}} = A_2(\mathbb{C})$ и $z \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ – регулярный унипотентный элемент. Известно (см., например, [20, теорема 4.2]), что для элементов u и z выполняется условие (1) предложения 11 с $\psi(\alpha_i) = 2$. Используя формулы, связывающие фундаментальные веса и простые корни группы Γ, нетрудно установить, что $\psi(\omega_i) = 2$ при $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $\psi(\lambda) < p$ при $\lambda \in \mathbf{X}(\tau)$. Утверждение следствия вытекает из предложения 11 и теоремы 12. $\square$

Теорема 14 (Янцен [18], Смит [25]). *Пусть Γ – полупростая алгебраическая группа, $H \subset \Gamma$ – подсистемная подгруппа, ассоциированная с подсистемой, порожденной подмножеством множества простых корней группы Γ, M – неприводимый Γ-модуль со старшим весом ω и $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Тогда $KHv \subset M$ – неприводимый H-модуль со старшим весом $\omega|H$ и является прямым слагаемым H-модуля M.*

Напомним, что теорема 14 справедлива в любой характеристике.

Теорема 15 ([14, глава VIII, теорема 2.7]). *Пусть* $1 \le s \le t \le p$. *Тогда*

$$J(J_s \bigotimes J_t) = \begin{cases} \{t-s+2j+1 \mid 0 \le j \le s-1\}, & \text{если } s+t \le p; \\ \{p; t-s+2j+1 \mid 0 \le j \le p-t-1\}, & \text{если } s+t > p. \end{cases}$$

В частности, $J(J_s \bigotimes J_p) = \{p\}$.

Следствие 16 ([5, следствие 14]). *Пусть* $0 < b \le a \le p$ *и* $b < p$. *Положим* $t = \min\{a+b-1, p\}$. *Тогда*

$$\bigcup_{k=1}^{a} J(J_k \bigotimes J_b) = \mathbb{N}_1^t.$$

Следствие 17. *Пусть* $p > 3$, $a, b \le p$, a *нечетно,* $b \ge 3$ *при* $a < p$ *и* $b \ge 4$ *при* $a = p$, *число* t *определяется, как в следствии* 16. *Тогда*

$$\bigcup_{\substack{1 \le k \le a, \\ k \equiv a \pmod 4}} \bigcup_{m=1}^{b} J(J_k \bigotimes J_m) = \mathbb{N}_1^t. \tag{1}$$

Доказательство. Далее в этом доказательстве $\mathcal{U}$ – указанное выше объединение. Ясно, что $\mathcal{U} \subset \mathbb{N}_1^t$ и что равенство (1) выполняется при $a = 1$. При $a = 3$ это равенство вытекает из следствия 16. Пусть $a > 3$, $t_1 = \min\{p, a+b-5\}$ и $\mathcal{U}_1$ – множество, аналогичное $\mathcal{U}$, для чисел $a-4$ и b. Используем индукцию по a, предположив, что $\mathcal{U}_1 = \mathbb{N}_1^{t_1}$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда $t_1 < p$. Тогда $\mathbb{N}_1^{a+b-5} \subset \mathcal{U}$. Предположим сначала, что $a+b-1 \le p$. Тогда $a < p$. В силу теоремы 15 $a+b-1, a+b-3 \in J(J_a \bigotimes J_b)$ и $a+b-2, a+b-4 \in J(J_a \bigotimes J_{b-1})$, так как $a, b > 2$. Отсюда следует равенство (1) при $t = a+b-1$.

Теперь пусть $a+b-1 > p$. Так как $a+b-5 < p$, то $a+b-1 \le p+3$. По теореме 15 $p \in J(J_a \bigotimes J_b)$. Поэтому формула (1) справедлива при $a+b = p+4$. Заметим, что $a < p$ при $a+b = p+2$ или $p+3$, ибо $b \ne 3$ при $a = p$. Ввиду теоремы 15 $p-1 \in J(J_a \bigotimes J_{b-2})$ и $p-2 \in J(J_a \bigotimes J_{b-1})$ при $a+b = p+2$ и $p-1 \in J(J_a \bigotimes J_{b-3})$ при $a+b = p+3$. Таким образом, всегда выполняется (1). Следствие доказано. □

Лемма 18. *Пусть* $H = A_3(K)$, $\Gamma \subset H$ *– подсистемная подгруппа типа* A_2, $\psi \in \operatorname{Irr}_p H$ *– представление со старшим весом* $a\omega_1$, $a \le (p-1)/2$, $u \in \Gamma$ *– регулярный унипотентный элемент. Тогда* $J_\psi(u) = \{2j+1 \mid 0 \le j \le a\}$.

Доказательство. Известно, что представление ψ реализуется в a-й симметрической степени стандартного H-модуля. Отсюда легко следует, что ограничение $\psi|\Gamma$ есть прямая сумма неприводимых представлений со старшими весами $b\omega_1$, где b изменяется от 0 до a. Остается использовать следствие 13. □

Приведенная ниже лемма вполне очевидна. Она явно сформулирована для удобства читателя, поскольку многократно используется в доказательствах основных результатов.

Лемма 19 ([23, лемма 12]). *Пусть Γ – некоторая группа и $U = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$ – прямая сумма Γ-модулей. Тогда для элемента $z \in \Gamma$*

$$J_U(z) = \bigcup_{j=1}^{k} J_{U_j}(z).$$

Следствие 20 ([5, следствие 8]). *Пусть H – подгруппа группы Γ, $z \in H$. Предположим, что для Γ-модуля U ограничение $U \mid H$ вполне приводимо и что Γ-модуль W изоморфен композиционному фактору модуля U. Тогда $J_W(z) \subset J_U(z)$.*

Следующее предложение позволяет в ряде случаев определить блочную структуру образа произведения элементов порядка p из коммутирующих подсистемных подгрупп в представлении полупростой алгебраической группы над K, очень мало зная о поведении одного из сомножителей.

Предложение 21. *Пусть Γ – полупростая алгебраическая группа над K, Γ_1 и $\Gamma_2 \subset \Gamma$ – коммутирующие подсистемные подгруппы, ассоциированные с подсистемами, порожденными некоторыми подмножествами множества простых корней группы Γ, M – неприводимый Γ-модуль, $x_j \in \Gamma_j$ – элементы порядка p, $x = x_1x_2$, M_j – неприводимые Γ_j-модули со старшими весами $\omega(M)|\Gamma_j$, $j = 1, 2$. Предположим, что $\mathbb{N}_1^{p-1} \subset J_{M_1}(x_1)$ и $\dim M_2$ не делится на p. Тогда $\mathbb{N}_1^{p-1} \subset J_M(x)$, и $J_M(x) = \mathbb{N}_1^p$, если модуль M_2 не тривиален.*

Доказательство. В силу теоремы 14 и следствия а) из леммы 68 [10] $\Gamma_1\Gamma_2$-модуль M имеет прямое слагаемое, изоморфное $M_1 \otimes M_2$. Ясно, что в $J_{M_2}(x_2)$ имеется хотя бы одно число, меньшее p. Остается применить лемму 19 и следствие 16. □

Лемма 22 ([26, частный случай леммы 2.46]). *Пусть M – неразложимый G-модуль со старшим весом $\omega = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$ и $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Пусть $1 \le s, t \le r$. Предположим, что $0 < a_t < p$. Для целого d с $0 < d \le a_t$ определим вектор $v(s,t,d)$ следующим образом. Пусть $d_t = d$. Если $s < t$, положим $d_k = a_k + d_{k+1}$ при $s \le k < t$. Если $s > t$, положим $d_k = a_k + d_{k-1}$ при $s \ge k > t$. Теперь запишем*

$$v(s,t,d) = X_{-s,d_s} \dots X_{-k,d_k} \dots X_{-t,d} v.$$

При $s = t$ положим $v(s,t,d) = X_{-s,d}v$. Тогда $v(s,t,d) \ne 0$ и $X_{m,b}v(s,t,d) = 0$ для положительного $m \ne s$ и $b > 0$. Следовательно, группа $\mathcal{X}_m$ фиксирует $v(s,t,d)$.

§3. Доказательства основных результатов

Общая схема доказательства теорем 1 и 2. Пусть $H_1 = G(j, j+1, \dots, j+t-1)$, β – максимальный корень группы H_1, $S_1 = \langle \mathcal{X}_\beta, \mathcal{X}_{-\beta} \rangle$, $H_2 = G(i, i+1)$ и группы H_1 и H_2 коммутируют. Ясно, что $H_1 \cong A_t(K)$ и $H_2 \cong A_2(K)$. Зная класс сопряженности элемента x, можно считать, что $x = x_1x_2$, где $x_1 \in \mathcal{X}_\beta \setminus \{1\}$, x_2 – регулярный унипотентный элемент в H_2. Нетрудно видеть, что в H_2 имеется подгруппа S_2 типа A_1, удовлетворяющая условиям следствия 8 и такая, что для подходящих максимальных торов $T \subset G$ и $T_S \subset S_2$ пересечение $T \cap H_2$ – максимальный тор в H_2, $T_S = T \cap S_2$ и ограничение весов с T на T_S задает гомоморфизм $\rho : \mathbf{X} \to \mathbb{Z}$ с $\rho(\varepsilon_i) = 2$, $\rho(\varepsilon_{i+2}) = -2$ и $\rho(\varepsilon_j) = 0$ при $j \ne i, i+2$. Можно предположить, что $x_2 \in S_2$. Эти утверждения непосредственно следуют из известных свойств 3-мерного p-ограниченного представления группы $A_1(K)$. В ходе доказательства в большинстве случаев используются подгруппы H_1 ранга, большего двух. Положим $H = H_1H_2$, $S = S_1S_2$, $I = \{1, \dots, r\} \setminus \{j, j+1, \dots, j+t-1, i, i+1\}$. Далее M – G-модуль, где реализуется представление φ, удовлетворяющее условиям теоремы 1 или 2, $\omega = \omega(M)$, $v \in M$ – ненулевой вектор старшего веса. Для фиксированного набора $\mathbf{D}$ чисел $d_f \in \mathbb{N}$, $f \in I$, обозначим символом $\mathbf{X}_{\mathbf{D}}(M)$ множество всех весов модуля M вида $\omega - \sum\limits_{f \in I} d_f\alpha_f - \sum\limits_{k \notin I} x_k\alpha_k$, где коэффициенты $x_k \in \mathbb{N}$ произвольны. Пусть $M_{\mathbf{D}} = \langle M^\mu \mid \mu \in \mathbf{X}_{\mathbf{D}}(M) \rangle$ (при $\mathbf{X}_{\mathbf{D}}(M) = \varnothing$ считаем, что $M_{\mathbf{D}} = 0$). Ясно, что $M_{\mathbf{D}}$ – H-модуль и прямое слагаемое модуля M.

С использованием теоремы 14 и леммы 22 для подходящего набора $\mathbf{D}$ и H-модуля $M_{\mathbf{D}}$ строится композиционный фактор N, для которого множество $J_N(x)$ такое, как в теореме 1 или 2, при этом $J_N(x)$ определяется с помощью теоремы 5, леммы 6, предложения 21 и следствий 13, 16 и 17. Применяя леммы 10 и 7, устанавливаем полную приводимость S-модуля $M_{\mathbf{D}}$. В определенных случаях S-модуль M вполне приводим ввиду лемм 10 и 9 и следствия 8. Остается применить следствие 20. Для некоторых специальных весов ω нужны дополнительные аргументы, приходится анализировать несколько композиционных факторов, аналогичных N, для разных наборов $\mathbf{D}$, иногда параллельно с x рассматривается сопряженный с ним элемент y из другой подсистемной подгруппы. Далее без особых пояснений используются обозначения, введенные в этом абзаце, и обозначения из формулировок теорем 1 и 2. В доказательствах теорем 1 и 2, если выбран индекс $i < r$, то $H_2 = G(i, i+1)$.

Доказательство теоремы 1. Ясно, что $d_\varphi(x) = d_{\varphi^*}(x)$. Поэтому, переходя, если требуется, к представлению φ^*, можно считать, что выполняется одно из условий 1 или 3 этой теоремы. Выберем максимальный индекс $i < r$ с $a_i + a_{i+1} < p-2$. Сведем задачу к случаю, когда $a_i + a_{i+1} \le (p-1)/2$.

Пусть $H_1 = G(1, \dots, i-2)$, M_j – неприводимый H_j-модуль со старшим весом $\omega|H_j$, $j = 1, 2$. В силу результатов Брадена [16] $\dim M_2$ равна размерности неприводимого представления группы $A_2(\mathbb{C})$ со старшим весом $\omega(M_2)$. Известно (см., например, [15, пример в пункте 24.3]), что последняя размерность равна $(a_i+1)(a_{i+1}+1)(a_i+a_{i+1}+2)/2$ и поэтому не кратна p. Следовательно, в $J_{M_2}(x_2)$ есть число, меньшее p. Пусть $b_i \ge p-2$. Тогда по теореме 5 и лемме 6 $\mathbb{N}_1^{p-1} \subset J_{M_1}(x_1)$. Ввиду теоремы 14 в H-модуле M есть прямое слагаемое $M' \cong M_1 \otimes M_2$. В силу следствия 16 и леммы 19 $\mathbb{N}_1^{p-1} \subset J_{M'}(x) \subset J_M(x)$. Так как ввиду леммы 4 $l = d_M(x) \in J_M(x)$, получаем утверждение теоремы.

Теперь пусть $b_i < p-2$. Тогда $a_1 + a_2 < p-2$, а при $i > 5$ хотя бы одна из сумм $a_1 + a_2$ и $a_3 + a_4$ меньше $(p-1)/2$. При $i < r-1$ сумма $a_i + a_{i+1} \ge p-2$ в силу выбора индекса i. В этой ситуации положим $H_1 = G(i, i+1, \dots, r)$, $H_2 = G(1, 2)$. Применяя рассуждения из предыдущего абзаца к новой группе H, устанавливаем, что $J_M(x) = \mathbb{N}_1^l$.

Пусть $i = r-1$. Предположим, что $a_i + a_{i+1} > (p-1)/2$ и $r \ge 8$. Положим $i_1 = 1$ при $a_1 + a_2 \le (p-1)/2$ и $i_1 = 3$ в противном случае.

Тогда $a_{i_1} + a_{i_1+1} \leq (p-1)/2$ ввиду сказанного выше, $i_1 \leq r-5$ и $a_j < p-1$ для некоторого $j > i_1 + 2$. Поэтому для представления φ и индекса i_1 выполняется условие 2 теоремы. Таким образом, вновь перейдя, если потребуется, к представлению φ^*, можно предположить, что выполняется одно из условий 1 или 3 доказываемой теоремы и $a_i + a_{i+1} \leq (p-1)/2$. Выберем максимальный индекс $i < r$, для которого верно это неравенство. Легко видеть, что достаточно рассмотреть следующие случаи:

(a) $i < r-1$, $a_1 + a_2 > (p-1)/2$;

(b) $i = r-1$, $a_1 + a_2 \geq a_{r-1} + a_r$.

(Здесь тоже учитывается возможность перехода к дуальному представлению.) Более того, можно предположить, что $b_i < p-2$, так как в иной ситуации теорема уже доказана. Положим $H_1 = G(1, \ldots, i-2)$. Фиксируем обозначения M_1, M_2 и M' до конца доказательства.

I. Предположим сначала, что $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j \geq p-1$. Построим вектор m следующим образом. Положим

$$d = (p-1)/2 - a_i - a_{i+1}, \quad m = X_{-(i+2),d} v$$

в случае (a) и

$$f = \min\{p-1-b_i, d, a_{r-2}\}, \quad m = X_{-(r-2),f} v$$

в случае (b). В силу выбора индекса i в случае (a) сумма $a_{i+1} + a_{i+2} > (p-1)/2$, и поэтому $d < a_{i+2}$. Следовательно, всегда $m \neq 0$ ввиду [24, 1.5]. Напомним, что $I = \{i-1, i+2, \ldots r\}$ в случае (a) и $I = \{r-2\}$ в случае (b). Пусть

$$d_{i+2} = d, \quad d_j = 0 \ \text{ при } \ j \in I \setminus \{i+2\}, \quad \mathbf{D} = \{d_j \mid j \in I\}$$

в случае (a) и $\mathbf{D} = \{f\}$ в случае (b). Ясно, что $m \in M_{\mathbf{D}}$ и что группы $\mathcal{X}_j$ сохраняют m при $j \notin I$. Поэтому m порождает неразложимый H-модуль со старшим весом $\omega_H(m)$ и H-модуль $M_{\mathbf{D}}$ имеет композиционный фактор N с таким старшим весом.

Покажем, что S-модуль $M_{\mathbf{D}}$ вполне приводим. Пусть $\mu \in \mathbf{X}(M_{\mathbf{D}})$. Тогда

$$\mu = \omega_H(m) - \Big(\sum_{j \notin I} x_j \alpha_j\Big)|H$$

с $x_j \in \mathbb{N}$. Так как $\beta = \sum\limits_{j=1}^{i-2} \alpha_j$, легко видеть, что $\langle \alpha_j, \beta \rangle = 1$ при $j = 1$ или $j = i-2$, $\langle \alpha_j, \beta \rangle = -1$ при $j = i-1$ и $\langle \alpha_j, \beta \rangle = 0$ в других ситуациях. Поэтому $\langle \mu, \beta \rangle \leq \langle \omega_H(m), \beta \rangle$. Ясно, что $\langle \omega_H(m), \beta \rangle = b_i$ в случае (a) и $f + b_i$ в случае (b). Таким образом, в любой ситуации $\langle \omega_H(m), \beta \rangle < p$. Заметим, что гомоморфизм ρ из общей схемы доказательства теорем 1 и 2 определяет гомоморфизм $\rho' : \mathbf{X}(H_2) \to \mathbb{Z}$, при этом $\rho(\lambda) = \rho'(\lambda|H)$ при $\lambda \in \mathbf{X}$. Легко видеть, что $\rho(\alpha_{i-1}) = -2$, $\rho(\alpha_{i+2}) = -2$ при $i < r-1$, $\rho(\alpha_i) = \rho(\alpha_{i+1}) = 2$ и $\rho(\alpha_j) = 0$ в других случаях. Поэтому $\rho'(\mu) \leq \rho'(\omega_H(m)) = \rho(\omega(m))$. Непосредственно проверяется, что $\rho(\omega(m))$ равно $p-1$ в случае (a) и $2(a_i + a_{i+1} + f)$ в случае (b). Таким образом, все веса S_1-модуля $M_{\mathbf{D}}$ и S_2-модуля $M_{\mathbf{D}}$ меньше p. В силу леммы 7 $M_{\mathbf{D}}$ – вполне приводимый S_1- и S_2-модуль, а из леммы 10 вытекает полная приводимость S-модуля $M_{\mathbf{D}}$. Значит, $J_N(x) \subset J_{M_{\mathbf{D}}}(x) \subset J_M(x)$ по лемме 19 и следствию 20.

Ввиду следствия (a) из леммы 68 [10] $N \cong N_1 \otimes N_2$, где N_j – неприводимый S_j-модуль со старшим весом $\omega_{H_j}(m)$, $j = 1, 2$. Положим

$$\omega_{H_1}(m) = \sum_{j=1}^{i-2} k_j \omega_j, \quad k = \sum_{j=1}^{i-2} k_j, \quad \omega_{H_2}(m) = s_1\omega_1 + s_2\omega_2, \quad s = s_1 + s_2.$$

В силу теоремы 5 $J_{N_1}(x_1) = \mathbb{N}_1^{k+1}$. Из теоремы 12 и следствия 13 вытекает, что либо $J_{N_2}(x_2)$ содержит все числа из $\mathbb{N}_1^{2s+1}$, сравнимые с $2s+1$ по модулю 4, либо $2s+1 \in J_{N_2}(x_2)$, $2s+1 \geq 5$ и $J_{N_2}(x_2)$ содержит все числа из $\mathbb{N}_1^{2s+1}$, сравнимые с $2s-1$ по модулю 4. Так как $p \geq 5$, $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j \geq p-1$, $b_i < p-2$ и $a_1 + a_2 \geq a_{r-1} + a_r$, из способа построения вектора m вытекает, что $k + 2s \geq p+1$ и что $k \geq 3$, за исключением случая, когда $p = 5$, $i = r-1$, $a_1 + a_2 = a_{r-1} + a_r$, $a_j = 0$ при $3 \leq j \leq r-3$ и $f = d$. В исключительной ситуации $k = 2$. Ввиду следствия 17 при $k \geq 3$ множество $J_N(x) = J_M(x) = \mathbb{N}_1^p$, что и требовалось доказать.

Пусть $k = 2$. При $a_{r-2} > 0$ можно применить приведенные выше рассуждения к представлению φ^* и установить, что $d_{\varphi^*}(x) = \mathbb{N}_1^p$. Здесь существенно, что $r \geq 6$. Таким образом, в этой ситуации $d_\varphi(x) = \mathbb{N}_1^p$.

Пусть $a_{r-2} = 0$. Так как $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j \geq p-1$, а $a_{r-1} + a_r \leq (p-1)/2$, заключаем, что $a_1 + a_2 = a_{r-1} + a_r = 2$. Положим $\Gamma_1 = G(1,2)$,

$\Gamma_2 = G(r-2, r-1, r)$. Пусть $y_1 \in \Gamma_1$ – неединичный корневой элемент, $y = y_1 x_2$, U_t – неприводимый Γ_t-модуль со старшим весом $\omega|\Gamma_t$, $t = 1, 2$. Элемент x сопряжен с y. Покажем, что $J_{U_2}(x_2) = \{1, 3, 5\}$. При $a_r = 2$ используем лемму 18 и переход к дуальному представлению. Пусть $a_r < 2$. Тогда $a_{r-1} \neq 0$. Ввиду следствия 8 S_2-модуль U_2 вполне приводим. Из сказанного выше о гомоморфизме ρ следует, что все веса этого модуля – четные числа, меньшие p, поэтому он является прямой суммой p-ограниченных модулей нечетных размерностей и $J_{U_2}(x_2) \subset \{1, 3, 5\}$. Согласно следствию 20, если F – композиционный фактор H_2-модуля U_2, то $J_F(x_2) \subset J_{U_2}(x_2)$. Положим $u = X_{-(r-2)} X_{-(r-1)} v$. Тогда ввиду леммы 22 вектор u ненулевой и сохраняется подгруппами $\mathcal{X}_{r-1}$ и $\mathcal{X}_r$. Так как в силу теоремы 14 Γ_2-модуль $U_2 \cong K\Gamma_2 v$, отсюда следует, что H_2-модуль U_2 имеет композиционные факторы со старшими весами $\omega|H_2$ и $\omega_{H_2}(u)$. Это факторы со старшими весами $\omega_1 + \omega_2$ и $2\omega_2$ при $a_{r-1} = 1$ и $2\omega_1$ и $\omega_1 + \omega_2$ при $a_{r-1} = 2$. Чтобы определить $J_{U_2}(x_2)$, остается использовать теорему 12 и следствие 13. Ввиду теоремы 14 $\Gamma_1\Gamma_2$-модуль M имеет прямое слагаемое $U \cong U_1 \otimes U_2$. По лемме 6 $J_{U_1}(y_1) = \mathbb{N}_1^3$. Из леммы 19 и теоремы 15 следует, что $J_M(x) = J_M(y) = \mathbb{N}_1^5$, что и требовалось доказать.

Обозначения Γ_t, U_t $(t = 1, 2)$, y_1, y, U используются и в части II доказательства.

II. Теперь пусть $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j < p-1$. В силу леммы 9 S_1-модуль M вполне приводим. Используя переход к дуальному представлению и рассуждая, как в части I доказательства, можно считать, что выполняется условие (b). Заметим, что тогда $a_{r-1} + a_r < (p-1)/2$. Ясно, что теорема справедлива при $\omega = 0$ или $\omega = \omega_1$, ибо $r > 4$. Поэтому предположим, что $\omega \neq 0$ и $\omega \neq \omega_1$. Построим вектор w следующим образом.

1) Если $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j \geq (p-1)/2$, то существуют индекс $t < r-1$ и число $n \leq a_t$ такие, что $n > 0$ и $n + \sum\limits_{j=t+1}^{r} a_j = (p-1)/2$. Тогда положим $w = v(r-2, t, n)$.

2) Пусть $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j < (p-1)/2$. Если $\sum\limits_{j=1}^{r-3} a_j \neq 0$, выберем минимальный индекс s с $a_s \neq 0$ и положим $w_1 = v(r-3, s, a_s)$. При $\sum\limits_{j=1}^{r-3} a_j = 0$ возьмем

$w_1 = v$. Пусть $q = \sum\limits_{j=1}^{r-1} a_j$ и $w = X_{-(r-2),q} X_{-(r-1),a_{r-1}} w_1$. Подчеркнем, что $q \neq 0$, ибо $\omega \neq 0$ и $a_1 + a_2 \geq a_{r-1} + a_r$.

В обоих случаях вектор w ненулевой и фиксируется группами $\mathcal{X}_j$ при $j \neq r-2$. Действительно, в случае 1) это следует из леммы 22. Пусть имеет место случай 2). Ввиду той же леммы вектор w_1 ненулевой и группы $\mathcal{X}_j$ сохраняют его при $j \neq r-3$. Применяя лемму 22 к неразложимому $G(r-2, r-1)$-модулю, порожденному w_1, заключаем, что w ненулевой и группа $\mathcal{X}_{r-1}$ стабилизирует его. Это верно и для групп $\mathcal{X}_j$ с $j < r-3$ или $j = r$, так как они сохраняют w_1 и коммутируют с операторами $X_{-t,d}$ при $t = r-1, r-2$. Для целого $a > 0$ положим $\mu_a = \omega(w) + a\alpha_{r-3}$. Тогда $\langle \mu_a, \alpha_{r-2} \rangle = -q - a < -q$. Отсюда следует, что $\mu_a \notin \mathbf{X}(M)$, так как очевидно, что лежащий с ним в одной орбите относительно действия группы Вейля вес $\mu_a + (q+a)\alpha_{r-2} \notin \mathbf{X}(M)$. Поэтому $X_{r-3,a} w = 0$. Значит, группа $\mathcal{X}_{r-3}$ фиксирует w.

Таким образом, в любой ситуации H-модуль M имеет композиционный фактор N со старшим весом $\omega_H(w)$. Покажем, что $J_N(x) \subset J_M(x)$. В случае 1) положим $\mathbf{D} = \{n\}$ при $t = r-2$ и $\mathbf{D} = \{n + \sum\limits_{j=t+1}^{r-2} a_j\}$ при $t < r-2$. Ясно, что N – композиционный фактор H-модуля $M_{\mathbf{D}}$. Используя лемму 7 и рассуждая, как в пункте I доказательства, нетрудно установить, что $M_{\mathbf{D}}$ – вполне приводимый S_2-модуль. В случае 2) сам S_2-модуль M вполне приводим ввиду следствия 8. Поскольку S_1-модуль M вполне приводим, то по лемме 10 S-модуль $M_{\mathbf{D}}$ в случае 1) и S-модуль M в случае 2) вполне приводимы. Теперь наше утверждение о $J_N(x)$ вытекает из следствия 20.

Введем обозначения N_1, N_2, k, k_j, $1 \leq j \leq r-3$, и s, как в пункте I. Ясно, что в случае 1) $s = (p-1)/2$. Из конструкции вектора w следует, что в случае 2) $k_j = a_{j+1}$ при $j < r-3$, $k_{r-3} = a_{r-2} + a_{r-1}$, $s = 2\sum\limits_{j=1}^{r} a_j$ и $k + 2s = 2a_1 + 3(a_2 + \cdots + a_{r-1}) + 2a_r$. Положим

$$l^* = \min\left\{p, 2a_1 + 3(a_2 + \cdots + a_{r-1}) + 2a_r - 1\right\}.$$

Используя теоремы 5 и 12 и следствия 13 и 17 и рассуждая, как в пункте I, можно установить, что в случае 1) при $k \geq 3$ множество $J_N(x) = \mathbb{N}_1^p$, а в случае 2) $\mathbb{N}_1^{l^*} \subset J_N(x)$ при $k \geq 2$; при этом $k, k+1 \in J_{N_1}(x_1)$, если $k > 0$, и $2s+1 \in J_{N_2}(x_2)$. Тогда из теоремы 15 следует, что в случае 2) при $k > 0$ и $b = 1, 2$ число $l^* + b \in J_N(x)$,

если $l^* + b \leq p$. Это завершает доказательство теоремы в случае 1) при $k \geq 3$ и в случае 2) при $k \geq 2$.

Осталось рассмотреть ситуации, когда k меньше этих значений. Для H-модуля M укажем еще один композиционный фактор N', относительно которого можно утверждать, что $J_{N'}(x) \subset J_M(x)$. Построим вектор $w' \in M$, который определяет фактор N' так же, как w определяет N.

Пусть имеет место случай 1), $k < 3$ и $t > 1$. Тогда $n < 3$ при $t = r-2$ и $n + \sum\limits_{j=t+1}^{r-2} a_j < 3$ при $t < r-2$. Поэтому $a_{r-1} + a_r \geq (p-5)/2$. Так как $k \geq a_1 + a_2 \geq a_{r-1} + a_r$, отсюда вытекает, что p равно 5 или 7. Нетрудно установить, что выполняется одно из следующих условий:

(i) $p = 5, \quad \omega = 3\omega_{r-2}$;

(ii) $p = 5, \quad \omega = \omega_j + \omega_s, \quad 1 < j \leq s < r-1$;

(iii) $p = 5, \quad a_1 + a_2 = a_{r-1} + a_r = 1,$
$\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \omega_j + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r, \quad 2 < j < r-1$;

(iv) $p = 5, \quad \omega = \omega_2 + \omega_{r-1}$ или $\omega_2 + \omega_r$;

(v) $p = 5, \quad a_1 + a_2 = 2, \quad a_{r-1} + a_r = 1, \quad a_2 > 0,$
$\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r$;

(vi) $p = 7, \ a_{r-1}+a_r = 1, \omega = \omega_2+\omega_j+a_{r-1}\omega_{r-1}+a_r\omega_r, \ 2 < j < r-1$;

(vii) $p = 7, \quad \omega = 2\omega_2 + \omega_{r-1}$ или $2\omega_2 + \omega_r$;

(viii) $p = 7, \quad a_1 + a_2 = a_{r-1} + a_r = 2, \quad a_2 > 0,$
$\omega = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r$.

Если же в случае 1) $k < 3$ и $t = 1$, то легко видеть, что $\sum\limits_{j=2}^{r-2} a_j < 3$. Из способа построения вектора w в случае 2) следует, что в этой ситуации при $k < 2$ вес $\omega = a_1\omega_1 + a_r\omega_r$ или $a_1\omega_1 + \omega_j + a_r\omega_r$, где $1 < j < r$.

Положим $w' = X_{-(r-2)}v$ в случае (i); $w' = v(r-2, s, 1)$ в случае (ii); $w' = v$ в случаях (iii), (iv), (v) и (viii); $w' = v(r-2, j, 1)$ в случае (vi); и $w' = v(r-2, 2, 1)$ в случае (vii).

Пусть имеет место случай 1), $k < 3$ и $t = 1$.

Тогда при $n > 1$ возьмем $w' = v(r-2, 1, n-1)$; если $n = 1$ и $\omega = a_1\omega_1 + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r$, то положим $w' = v$; в других ситуациях, когда $n = 1$, выберем минимальный индекс $j > 1$ с $a_j \neq 0$ и возьмем $w' = v(r-2, j, a_j)$.

Наконец, пусть $\omega = a_1\omega_1 + a_r\omega_r$ или $a_1\omega_1 + \omega_j + a_r\omega_r$ с $1 < j < r$ и $\sum\limits_{f=1}^{r} a_f < (p-1)/2$. Поскольку $a_1 + a_2 \geq a_{r-1} + a_r$ и $\omega \neq 0$ и $\omega \neq \omega_1$, то

$\omega = \omega_j$ с $1 < j < r-1$ или $\omega = \omega_2 + \omega_r$ при $a_1 = 0$, а при $a_1 = 1$ вес $\omega \in \{\omega_1+\omega_r, \omega_1+\omega_{r-1}, \omega_1+\omega_2+2\omega_r, \omega_1+\omega_j+\omega_r, \omega_1+\omega_j \mid 1 < j < r-1\}$.

Положим

$$w' = X_{-(r-2),a_1} X_{-(r-1)} v(r-3, 1, a_1 - 1)$$

при $\omega = a_1\omega_1 + \omega_{r-1} + a_r\omega_r$ и $a_1 > 1$; $w' = v(r-2, 1, a_1 - 1)$ в других случаях при $a_1 > 1$; $w' = v$ при $\omega \in \{\omega_j, \omega_2 + \omega_r, \omega_1 + \omega_r\}$; $w' = v(r-2, 2, 1)$ при $\omega = \omega_1 + \omega_2 + 2\omega_r$; и $w' = v(r-2, j, 1)$ при $\omega = \omega_1 + \omega_j + \omega_r$ или $\omega = \omega_1 + \omega_j$ (в последнем случае j может равняться $r-1$).

Итак, во всех ситуациях вектор w' определен. Используя леммы 22, 7 и 10 и следствия 8 и 20 и рассуждая, как ранее при анализе композиционного фактора N, устанавливаем, что $w' \neq 0$, все группы $\mathcal{X}_j$ с $j \neq r-2$ сохраняют этот вектор, H-модуль M имеет композиционный фактор N' со старшим весом $\omega_H(w')$ и $J'_N(x) \subset J_M(x)$. Пусть N'_a – неприводимый H_a-модуль со старшим весом $\omega_{H_a}(w')$, $a = 1, 2$. Тогда $N' \cong N'_1 \otimes N'_2$. Определим числа k' и s' для H_1-модуля N'_1 и H_2-модуля N'_2 так же, как определялись k и s для N. Учитывая способ построения вектора w', нетрудно заключить, что $k' = k + 1$ в случае 1) при $t = 1$ и в случае 2) при $a_1 > 0$ и что $s' = s - 1 < (p-1)/2$. Поэтому в случае 1) $s' = (p-3)/2$, а в случае 2) $k' + 2s' = k + 2s - 1$ при $a_1 > 0$. Кроме того, несложно установить, что $k' = 0$ при $\omega = \omega_{r-2}$ и $k' = 1$ в точности в следующих ситуациях:

A) $p = 5$, $\omega = 3\omega_{r-2}$;

B) $p = 5$, $\omega = \omega_2 + \omega_{r-1}$;

C) $\omega = a_1\omega_1 + a_{r-1}\omega_{r-1} + a_r\omega_r$, $a_1 + a_{r-1} + a_r \leq (p-1)/2$ и $a_{r-1} = 0$ при $a_1 + a_{r-1} + a_r < (p-1)/2$;

D) $\omega = \omega_j$, $1 < j < r-2$, или $\omega = \omega_2 + \omega_r$.

Используя теоремы 15, 5 и 12 и следствия 13 и 17 и рассуждая, как при нахождении множества $J_N(x)$, покажем, что если $k' > 1$, то $J'_N(x) = \mathbb{N}_1^p$ в случае 1) и $J'_N(x) \supseteq \mathbb{N}_1^{l-1}$ в случае 2). Поскольку $l \in J_M(x)$ ввиду леммы 4, отсюда следует утверждение теоремы при $k' > 1$.

Теперь проанализируем представления, где $k' < 2$. Ниже множества $J_{N_a}(x_a)$, $J_{N'_a}(x_a)$ $(a = 1, 2)$, $J_N(x)$, $J_{N'}(x)$ и другие аналогичные множества для этих представлений найдены с использованием теорем 5, 12 и 15 и следствия 13.

Пусть сначала $p = 5$ и $\omega = 3\omega_{r-2}$. Тогда

$$J_{N_1}(x_1) = \{1, 2, 3\}, \quad J_{N_2}(x_2) = \{1, 5\}, \quad J_N(x) = \{1, 2, 3, 5\},$$
$$J_{N_1'}(x_1) = \{1, 2\}, \quad J_{N_2'}(x_2) = \{3\}, \quad 4 \in J_{N'}(x).$$

Поэтому $J_M(x) = \mathbb{N}_1^p$, что и требовалось доказать.

В случае B) $J_{N_1}(x_1) = J_{N_1'}(x_1) = \{1, 2\}$, $J_{N_2}(x_2) = \{1, 5\}$ и $J_{N_2'}(x_2) = \{3\}$. Значит, $J_M(x) = \mathbb{N}_1^p$.

Пусть имеет место случай C). Тогда $J_{N_1}(x_1) = \{1\}$, $J_{N_1'}(x_1) = \{1, 2\}$. Положим $a = a_1 + a_{r-1} + a_r$. При нечетном a_r множество $J_{N_2}(x_2) = \{2b + 1 \mid 1 \le b \le a\}$, а $J_{N_2'}(x_2) = \{2b + 1 \mid 1 \le b \le a - 1\}$. При четном a_r множество

$$\{2b + 1 \mid 0 \le b \le a\} \subset J_{N_2}(x_2) \cup J_{N_2'}(x_2) \subset J_M(x);$$

кроме того, в этой ситуации либо $J_{N_2'}(x_2)$ содержит все числа из $\mathbb{N}_1^{2a-1}$, сравнимые с $2a - 1$ по модулю 4, либо $a \ge 4$ и $J_{N_2'}(x_2)$ содержит все нечетные числа из $\mathbb{N}_1^{2a-1}$, большие трех, и ровно одно из чисел 1 и 3. Заметим, что $l = 2a + 1$. Отсюда следует, что $J_M(x) = \mathbb{N}_1^l$ при четном a_r и $\mathbb{N}_2^l \subset J_M(x)$ при нечетном a_r.

Покажем, что $1 \in J_M(x)$ при нечетном a_r. При $a_{r-1} = 0$ установим, что $1 \in J_M(y)$ для введенного ранее элемента $y \in \Gamma_1\Gamma_2$, сопряженного с x. Ясно, что $\omega(U_1) = a_1\omega_1$ и $\omega(U_2) = a_r\omega_3$. По лемме 6 число $1 \in J_{U_1}(y_1)$. Используя лемму 18 и переходя к дуальному представлению, получаем, что $1 \in J_{U_2}(x_2)$. Тогда $1 \in J_U(y) \subset J_M(y) = J_M(x)$ ввиду теоремы 14 и леммы 19.

Теперь пусть $a_{r-1} \ne 0$. Тогда $a_1 \ge 2$, ибо $a_1 \ge a_{r-1} + a_r$. Поэтому $1, 3 \in J_{M_1}(x_1)$. Ясно, что 1 или $3 \in J_{M_2}(x_2)$. Значит, $1 \in J_{M'}(x)$. Остается использовать теорему 14 и лемму 19. Таким образом, $J_M(x) = \mathbb{N}_1^l$ и при нечетном a_r.

Предположим, что $\omega = \omega_j$ с $1 < j < r - 2$. Тогда

$$J_{N_1}(x_1) = J_{N_1'}(x_1) = \{1, 2\}, \quad J_{N_2}(x_2) = \{3\}, \quad J_{N_2'}(x_2) = \{1\}.$$

Поэтому $J_M(x) = \mathbb{N}_1^l$, так как $l = 4$.

Наконец, пусть ω равно ω_{r-2} или $\omega_2 + \omega_r$. Ввиду доказанного выше $d_\varphi(x) = d_{\varphi^*}(x) = \mathbb{N}_1^l$ (здесь существенно, что $r > 5$).

Все возможности рассмотрены. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 2. Из леммы 4 следует, что $d_\varphi(x) = 3$, поскольку представление φ не тривиально. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, можно считать, что выполняется одно из условий

1 или 3 нашей теоремы. Предположим сначала, что $a_i = a_{i+1} = 0$. Так как $\omega \neq 0$, то перейдя, если потребуется, к дуальному представлению, можем считать, что $\sum\limits_{j=1}^{i-2} a_j \neq 0$. Положим $H_1 = G(1, 2, \ldots, i-2)$. Определим H_j-модули M_j, $j = 1, 2$, и H-модуль $M' \cong M_1 \otimes M_2$, как в доказательстве теоремы 1. В силу теоремы 14 и леммы 19 $J_{M'}(x) \subset J_M(x)$. Ввиду теоремы 5 и леммы 6 числа $1, 2 \in J_{M_1}(x_1)$. Ясно, что $1 \in J_{M_2}(x_2)$. Тогда $1, 2 \in J_{M'}(x)$ по теореме 15. Следовательно, $J_M(x) = \mathbb{N}_1^3$.

Теперь пусть $a_i = a_{i+1} = 1$. При $a_1 + a_2 = 0$ задача сводится к рассмотренному выше случаю. Пусть $a_1 + a_2 \neq 0$. Рассуждая, как выше, заключаем, что $1, 2 \in J_{M_1}(x_1)$. Известно (см., например, [21, 6.6]), что $\dim M_2 = 7$. Поэтому элемент x_2 имеет блок Жордана размерности, меньшей 3, в модуле M_2. Чтобы завершить доказательство, остается применить теоремы 15 и 14 и лемму 19. $\square$

Доказательство следствия 3. Положим $J(i) = \mathbb{N}_1^6$ при $i \leq 4$, $J(i) = \mathbb{N}_{i-1}^{i+2}$ при $5 \leq i \leq r-5$ и $J(i) = \mathbb{N}_{r-5}^{r}$ при $i \geq r-4$. Ясно, что $|J(i)| \leq 6$. Из теорем 1 и 2 вытекает, что при наших условиях для суммы $a_i + a_{i+1}$ множество $J_M(x) = \mathbb{N}_1^l$, если $a_k < p-1$ для некоторого $k \notin J(i)$. Следствие доказано. $\square$

Замечание 23. Лишь при $p = 3$ существуют неприводимые представления φ группы $A_2(K)$ со старшим весом $s_1\omega_1 + s_2\omega_2$, у которых $s_1 + s_2 \leq (p-1)/2$, а $J_\varphi(z) = \{p\}$ для регулярного унипотентного элемента z. Это стандартное представление и дуальное к нему. Поэтому доказательство теоремы 1 не распространяется на случай $p = 3$.

Литература

1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI. Мир, М., 1972.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. VII–VIII. Мир, М., 1978.
3. М. В. Величко, *О поведении корневых элементов в модулярных представлениях симплектических групп.* — Труды Ин-та математики НАН Беларуси **14** (2006), No. 2, 28–34.
4. М. В. Величко, *Свойства малых унипотентных элементов в модулярных представлениях классических алгебраических групп.* — Автореф. дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Институт математики НАН Беларуси. Минск (2007).
5. М. В. Величко, И. Д. Супруненко, *Малые квадратичные элементы в представлениях специальной линейной группы с большими старшими весами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 84–120.

6. М. В. Величко, И. Д. Супруненко, *О поведении квадратичных унипотентных элементов в модулярных представлениях симплектической группы с большими старшими весами.* — Тезисы докладов 10-й международной белорусской математической конференции. Часть 1. Минск (2008), 13–14.
7. А. А. Осиновская, *Регулярные унипотентные элементы из естественно вложенных подгрупп ранга* 2 *в модулярных представлениях классических групп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 159–178.
8. А. А. Осиновская, *Регулярные унипотентные элементы из подсистемных подгрупп типа C_2 в представлениях.* — Труды Ин-та математики НАН Беларуси **17** (2009), No. 1, 119–126.
9. А. А. Осиновская, *Ограничения неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$ на подалгебры типа $\mathfrak{sl}_2$ и структура блоков Жордана нильпотентных элементов.* — Весці НАН Беларусі. Сер фіз.-мат. навук (2000), No. 2, 52–55.
10. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М, 1975.
11. Д. А. Супруненко, *Группы матриц.* Наука, М., 1972.
12. И. Д. Супруненко, *Минимальные полиномы элементов порядка p в неприводимых представлениях групп Шевалле над полями характеристики p.* — Труды Ин-та математики СО РАН. Проблемы алгебры и логики **30** (1996), 126–163.
13. И. Д. Супруненко, *Ограничения на малые естественные подгруппы модулярных неприводимых представлений специальной линейной группы с большими относительно характеристики старшими весами не вполне приводимы.* — Докл. НАН Беларуси **42** (1998), No. 3, 27–31.
14. У. Фейт, *Теория представлений конечных групп.* Наука, М., 1990.
15. Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений.* МЦНМО, М., 2003.
16. B. Braden, *Restricted representations of classical Lie algebras of type A_2 and B_2.* — Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 482–486.
17. C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of representation theory with applications to finite groups and orders.* Vol. 1. Wiley-Interscience, New York, 1990.
18. J. C. Jantzen, *Darstellungen halbeinfacher algebraicher Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen.* — Bonner Math. Schr. **67** (1973).
19. J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, 2nd ed., Providence, AMS, 2003.
20. R. Lawther, D. Testerman, *A_1-subgroups of exceptional algebraic groups.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **141** (1999), No. 674.
21. F. Lubeck, *Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic.* — LMS J. Comput. Math. **4** (2001), 135–169.
22. A. A. Osinovskaya, *Restrictions of representations of algebraic groups of types E_n and F_4 to naturally embedded A_1-subgroups and the behavior of root elements.* — Comm. Algebra **33** (2005), 213–220.
23. A. A. Osinovskaya, I. D. Suprunenko, *On the Jordan block structure of images of some unipotent elements in modular irreducible representations of the classical algebraic groups.* — J. Algebra **273** (2004), 586–600.
24. G. M. Seitz, *The maximal subgroups of classical algebraic groups.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **67** (1987), No. 365.

25. S. Smith, *Irreducible modules and parabolic subgroups.* — J. Algebra **75** (1982), 286–289.
26. I. D. Suprunenko, *The minimal polynomials of unipotent elements in irreducible representations of the classical groups in odd characteristic.* — Memoirs Amer. Math. Soc. **200** (2009), No. 939.
27. I. D. Suprunenko, *Properties of quadratic elements in representations of the classical algebraic groups.* — Тезисы докладов международной конференции "Дискретная математика, алгебра и их приложения", Минск (2009), 67–69.
28. I. D. Suprunenko, M. V. Velichko, *The Jordan block structure of quadratic unipotent elements in modular representations of the classical algebraic groups with large highest weights.* — Тезисы докладов международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша, Москва (2008), 357–359.
29. P. H. Tiep, A. E. Zalesskii, *Mod p reducibility of unramified representations of finite groups of Lie type.* — Proc. London Math. Soc. **84** (2002), 439–472.
30. M. V. Velichko, *On the behaviour of root elements in irreducible representations of simple algebraic groups.* — Труды Ин-та математики НАН Беларуси **13** (2005), No. 2, 116–121.

Suprunenko I. D. On the block structure of regular unipotent elements from subsystem subgroups of type $A_1 \times A_2$ in representations of the special linear group.

We study behavior of regular unipotent elements from a subsystem subgroup of type $A_1 \times A_2$ in p-restricted irreducible representations of a special linear group of rank greater than 5 over a field of characteristic $p > 2$. For a certain class of such representations with locally small highest weights it is shown that the images of these elements have Jordan blocks of all a priori possible sizes. In particular, the following is proved.

Let K be an algebraically closed field of characteristic p, $G = A_r(K)$, $r \geq 9$, $x \in G$ be a regular unipotent element from a subsystem subgroup of type $A_1 \times A_2$, and let φ be a p-restricted representation of G with highest weight $\sum\limits_{j=1}^{r} a_j\omega_j$. Set $l = \min\{p, 1 + 2a_1 + 3(a_2 + \cdots + a_{r-1}) + 2a_r\}$. Assume that more than 6 coefficients a_j are not equal to $p-1$ and that for some $i < r$, the sum $a_i + a_{i+1} < p-2$ for $p > 3$ and $a_i = a_{i+1} = 0$ or 1 for $p = 3$. Then the element $\varphi(x)$ has Jordan blocks of all sizes from 1 to l.

Институт математики НАН Беларуси
E-mail: suprunenko@im.bas-net.by

Поступило 5 апреля 2011 г.