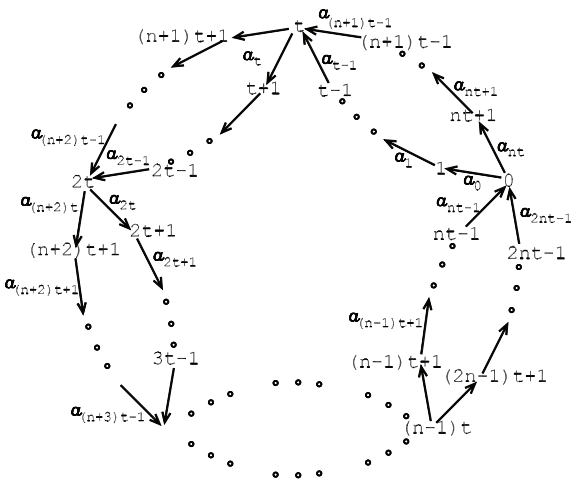
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 388, 2011 г.

М. А. Пустовых

КОЛЬЦО КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБРЫ МЁБИУСА

§1. Введение

Пусть R – алгебра Мёбиуса, т.е. алгебра вида $R = K[\mathcal{Q}]/I$, где K – поле, а $\mathcal{Q}$ – следующий колчан:



где $n, t \in \mathbb{N}, t \geq 2$, а I – идеал в алгебре путей $K[\mathcal{Q}]$ колчана $\mathcal{Q}$, порождённый

а) всеми путями длины $t+1$;

б) путями вида

$$a_{rt}a_{(r+n)t-1} \quad \text{и} \quad a_{(r+n)t}a_{rt-1};$$

в) выражениями вида

$$a_{(n+r)t-1}a_{(n+r)t-2}\dots a_{(n+r-1)t} + a_{rt-1}a_{rt-2}\dots a_{(r-1)t}, \quad 1 \leq r \leq n.$$

В этом случае используем также обозначение $R = R_{n,t}$.

Ключевые слова: алгебра Мёбиуса, когомологии Хохшильда.
Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00635.

Напомним, что стабильный AR-колчан произвольной самоинъективной базисной алгебры над алгебраически замкнутым полем, имеющей конечный тип представления, описывается с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое совпадает с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). Кроме того, в [1] доказано, что любая алгебра типа A_n стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо алгебре Мёбиуса.

В последние годы увеличился интерес к исследованию структуры кольца когомологий Хохшильда для различных алгебр. Полное описание структуры кольца когомологий Хохшильда было получено для некоторых серий алгебр диэдрального типа [2–4], кватернионного типа [5–7], полудиэдрального типа [8, 9], целочисленного группового кольца диэдральной группы [10], самоинъективных алгебр древесного типа D_n [11–13], алгебр Лю-Шульца [14]. В [15] описана структура кольца когомологий Хохшильда для кошулевых d-алгебр. Аддитивная структура для алгебр Гекке $\mathcal{H}_q(S_4)$, $q = -1$, описана в [16]. В [17–19], исследуются алгебры путей некоторого колчана с соотношениями, кошулевы алгебры и ручные алгебры Гекке соответственно.

Данная статья является завершением наших предыдущих работ, связанных с вычислением когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса. В [20] была построена бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса, и затем в [21] были вычислены группы когомологий Хохшильда для этих алгебр. В данной статье даётся описание мультипликативной структуры кольца когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса на языке образующих и определяющих соотношений.

§2. Формулировка основного результата

Пусть $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, $\Lambda = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра. Для описания мультипликативной структуры кольца когомологий Хохшильда алгебры R

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$$

нам потребуется следующее описание её аддитивной структуры, полученное в [21].

Теорема 1. *Пусть $n > 1$, $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса, $\mathrm{HH}^s(R)$ – s-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m*

– целая часть от деления r на 2, p – целая часть от деления $m+\ell t$ на n. Группа $\mathrm{HH}^s(R)$ имеет размерность 1, если s удовлетворяет требованиям одного из следующих пунктов:

(1) $r=0$, $\ell t\equiv 1(n)$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\not\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$;

(2) $r=2m$, $m+\ell t\equiv 1(n)$, $\ell+p\not\vdots\,2$, $\ell\not\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$;

(3) $r=2m$, $m+\ell t\equiv 0(n)$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$;

(4) $r=2t-2$, $t-1+\ell t\equiv 0(n)$, $\ell+p\not\vdots\,2$, $\ell\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$;

(5) $r=2m+1$, $m+\ell t\equiv 0(n)$, $\ell+p\not\vdots\,2$, $\ell\not\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$;

(6) $r=2m+1$, $m+\ell t\equiv 0(n)$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$.

В остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^s(R)=0$.

Теорема 2. *Пусть $n=1$, $R=R_{1,t}$ – соответствующая алгебра Мёбиуса. В обозначениях предыдущей теоремы группа $\mathrm{HH}^s(R)$ имеет размерность 2, если s удовлетворяет требованиям одного из следующих пунктов*:

(1) $s=0$;

(2) $r=2m$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\operatorname{char}K=2$;

Группа $\mathrm{HH}^s(R)$ имеет размерность 1, если s удовлетворяет требованиям одного из следующих пунктов:

(3) $r=2m$ $(m<t-1)$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\not\vdots\,2$, $\operatorname{char}K\neq 2$.

(4) $r=0$, $\ell+p\not\vdots\,2$;

(5) $r=2m$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\,\vdots\,2$, $s>0$, $\operatorname{char}K\neq 2$;

(6) $r=2m+1$, $p\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$;

(7) $r=2t-2$, $\ell+p\,\vdots\,2$, $\ell\not\vdots\,2$, $\operatorname{char}K\neq 2$;

(8) $r=2t-2$, $\ell+p\not\vdots\,2$, $\ell\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}K=2$.

В остальных случаях $\dim_K \mathrm{HH}^s(R)=0$.

В [22] был введён автоморфизм алгебры Мёбиуса $\sigma\colon R\to R$, определяемый следующим образом:

$$\sigma(e_j)=\begin{cases} e_{j+t^2}, & \text{если } j\,\vdots\,t,\\ e_{j+t(t+n)} & \text{в противном случае;}\end{cases}$$

$$\sigma(a_j) = \begin{cases} -a_{j+t(t+n)}, & \text{если } j = st-1 \text{ или } j = st \text{ для } s = 0, 1, \ldots, n-1, \\ a_{j+t(t+n)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нам понадобится значение порядка автоморфизма σ, описанное [21].

Предложение 3. *Автоморфизм σ имеет конечный порядок, причём*

(1) *если* $\operatorname{char} K = 2$, *то порядок σ равен* $2\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$, *если* $\frac{n+t}{\text{НОД}(n,t)}$ *нечётно, и* $\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$ *в противном случае;*

(2) *если* $\operatorname{char} K \neq 2$, *то порядок σ равен* $4\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$, *если* $\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$ *и* $\frac{n+t}{\text{НОД}(n,t)}$ *нечётны, и* $2\frac{n}{\text{НОД}(n,t)}$ *в противном случае.*

Опишем структуру кольца когомологий Хохшильда для случая $n > 1$. Для этого введём дополнительные обозначения.

Пусть $\{s_{1,i}, \ldots, s_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней s, удовлетворяющих условиям i-го пункта теоремы 1, и таких, что $0 \leq s_{j,i} < (2t-1)\deg\sigma$ для $j = 1, \ldots, \alpha_i$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{6} \left\{ X^{(i)}_{s_{j,i}} \right\}_{j=1}^{\alpha_i} \cup \{T\},$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}]$ введём градуировку такую, что

$$\begin{aligned} &\deg X^{(i)}_{s_{j,i}} = s_{j,i} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, 6 \quad \text{и} \quad j = 1, \ldots, \alpha_i; \\ &\deg T = (2t-1)\deg\sigma. \end{aligned}$$

Замечание 1. Далее мы будем часто использовать упрощённое обозначение $X^{(i)}$ для $X^{(i)}_j$, поскольку значения нижних индексов ясны из контекста (см. также замечание 2).

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A} = K[\mathcal{X}]/I$, где идеал I порождён однородными элементами, соответствующими следующим соотношениям (ниже мы используем вспомогательное обозначение $\widetilde{X}^{(i)} = X^{(i)}$, когда $\deg \widetilde{X}^{(i)} < \deg T$, и $\widetilde{X}^{(i)} = TX^{(i)}$ в противном случае; кроме того, для левых частей этих соотношений, имеющих вид $X^{(i)}X^{(j)}$, через m_i (соответственно m'_i) обозначаем параметр m из теоремы 1, относящийся к i-й группе (соответственно j-й группе) условий из теоремы 1 $(i, j \in \{1, \ldots, 6\})$):

$$X^{(1)}X^{(1)} = X^{(1)}X^{(5)} = X^{(1)}X^{(6)} = X^{(5)}X^{(5)} = X^{(6)}X^{(6)} = 0; \tag{1}$$

$$X^{(4)}X^{(4)} = -t\widetilde{X}^{(5)}; \quad X^{(1)}X^{(4)} = \widetilde{X}^{(2)}; \tag{2}$$

$$X^{(1)}X^{(3)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(1)}, & m_3' = 0; \\ 0, & m_3' > 0; \end{cases} \quad X^{(3)}X^{(3)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(3)}, & m_3 + m_3' \le t-1; \\ -\widetilde{X}^{(5)}, & m_3 + m_3' > t-1; \end{cases} \tag{3}$$

$$X^{(3)}X^{(4)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(4)}, & m_3 = 0; \\ \widetilde{X}^{(6)}, & m_3 > 0,\ \operatorname{char} K = 2; \\ 0, & m_3 > 0,\ \operatorname{char} K \ne 2; \end{cases} \tag{4}$$

$$X^{(3)}X^{(5)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(5)}, & m_3 + m_5' < t-1; \\ \widetilde{X}^{(1)}, & m_3 + m_5' = t-1, \operatorname{char} K = 2; \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases} \tag{5}$$

$$X^{(3)}X^{(6)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(6)}, & m_3 + m_6' < t-1; \\ -\widetilde{X}^{(2)}, & m_3 + m_6' \ge t-1; \end{cases} \tag{6}$$

$$X^{(4)}X^{(5)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(2)}, & \operatorname{char} K = 2; \\ 0, & \operatorname{char} K \ne 2; \end{cases} \quad X^{(4)}X^{(6)} = \begin{cases} -t\widetilde{X}^{(1)}, & m_6' = 0; \\ 0, & m_6' > 0; \end{cases} \tag{7}$$

$$X^{(5)}X^{(6)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(2)}, & m_5 + m_6' + 1 \le t-1; \\ 0, & m_5 + m_6' + 1 > t-1. \end{cases} \tag{8}$$

Замечание 2. Более подробно, соотношение вида $X^{(4)}X^{(4)} = -t\widetilde{X}^{(5)}$ означает, что

$$X_s^{(4)}X_{s'}^{(4)} = \begin{cases} -tX_{s+s'}^{(5)}, & s + s' < \deg T; \\ -tTX_{s+s'-\deg T}^{(5)}, & s + s' \ge \deg T \end{cases}$$

для любых степеней $s,\ s' \in \{s_{1,4}, \dots, s_{\alpha_4,4}\}$.

Аналогично соотношение $X^{(1)}X^{(5)} = 0$ означает, что $X_s^{(1)}X_{s'}^{(5)} = 0$ для любых $s \in \{s_{1,1}, \dots, s_{\alpha_1,1}\}$ и $s' \in \{s_{1,5}, \dots, s_{\alpha_5,5}\}$.

Теорема 4. *Пусть $n > 1$, $R = R_{n,t}$ – алгебра Мёбиуса. Тогда алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}$.*

Далее опишем структуру кольца когомологий Хохшильда для случая $n = 1$. Нам будет удобно оперировать со следующими условиями на произвольную степень s (параметры ℓ, r, m и p связаны с s так же, как в теореме 1):

(1) $r = 0$, $\ell + p \not\vdots\, 2$;

(2) $r = 2m$, $\ell + p \vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $s = 0$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(3) $r = 2m$, $\ell + p \vdots\, 2$, $\ell \vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(4) $r = 2t - 2$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(5) $r = 2m + 1$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

(6) $r = 2m + 1$, $\ell + p \vdots\, 2$, $\ell \vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$.

Пусть $\{s_{1,i}, \ldots, s_{\alpha_i,i}\}$ – множество всех степеней s, удовлетворяющих условиям i-го пункта из списка выше, и таких, что $0 \le s_{j,i} < (2t-1)\deg\sigma$ $(j = 1, \ldots, \alpha_i)$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{X}' = \bigcup_{i=1}^{6} \left\{ X^{(i)}_{s_{j,i}} \right\}_{j=1}^{\alpha_i} \cup \{T\},$$

и на кольце многочленов $K[\mathcal{X}']$ введём градуировку такую, что

$$\begin{aligned} &\deg X^{(i)}_{s_{j,i}} = s_{j,i} \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots, 6 \quad \text{и} \quad j = 1, \ldots, \alpha_i; \\ &\deg T = (2t-1)\deg\sigma. \end{aligned}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}' = K[\mathcal{X}']/I'$, где идеал I' порождён однородными элементами, соответствующими соотношениям, которые уже были описаны для случая $n > 1$ (см. (1)–(8)), а также следующими соотношениями:

$$X^{(1)}X^{(2)} = X^{(2)}X^{(2)} = X^{(2)}X^{(4)} = X^{(2)}X^{(5)} = X^{(2)}X^{(6)} = 0;$$

$$X^{(2)}X^{(3)} = \begin{cases} \widetilde{X}^{(2)}, & m_2 + m_3' \le t-1,\ s_2 > 0 \text{ или } s_2 = s_3' = 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть $n = 1$, $R = R_{1,t}$ – соответствующая алгебра Мёбиуса. Тогда алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}'$.*

Мы будем вести доказательство по следующей схеме:

(1) Выберем представителей для базисных элементов всех ненулевых групп когомологий.
(2) Опишем Ω-сдвиги для всех элементов, кроме элементов типа (2) в случае $n > 1$.
(3) Вычислим произведения между всеми элементами, кроме типа (2) при $n > 1$. Для $n > 1$ получим, что любой элемент типа (2) будет описан как произведение элементов других типов.

Замечание 3. Из описания колец $\mathrm{HH}^*(R)$ в теоремах 4 и 5 следует, в частности, что они коммутативны.

Следствие 6.

$$\mathrm{HH}^{(2t-1)*}(R) \cong K[X_1, \dots, X_a, T]/(\{X_{a_1}X_{a_2}\}_{1\le a_1,a_2\le a}),$$

где степень элемента T следующая:

$$\deg T = \begin{cases} n(2t-1), & n+t \,\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K = 2; \\ 2n(2t-1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Количество образующих X_i описывается следующей формулой (под 0 подразумевается, что элементов X_i нет):

$$a = \begin{cases} 0, & \text{НОД}(n,t) > 1; \\ 2, & n > 1,\ \text{НОД}(n,t) = 1,\ n+t \not\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K = 2; \\ 2, & n > 1,\ \text{НОД}(n,t) = 1,\ n \,\vdots\, 2,\ \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ 2, & n = 1,\ n+t \not\vdots\, 2 \text{ или } \mathrm{char}\, K \neq 2; \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, степени элементов X_i $(i = 1, \dots, a)$ описываются следующим образом.

Для $n = 1$ степень X_1 равна 0 и, если $a = 2$, то степень X_2 равна 1. Для $n > 1$ и $\text{НОД}(n,t) = 1$ определим ℓ_0 как наименьшее натуральное число среди всех ℓ, удовлетворяющих условию $\ell t \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$. Если $a = 2$, то степени X_1 и X_2 равны $\ell_0(2t-1)$ и $(\ell_0+n)(2t-1)$ соответственно. Если $a = 1$, то степень X_1 есть $\ell_0(2t-1)$, за исключением случая $\ell_0 \,\vdots\, 2$, $\mathrm{char}\, K \neq 2$. В этом случае степень элемента X_1 равна $(\ell_0+n)(2t-1)$.

Замечание 4. Описание подкольца $\mathrm{HH}^{(2t-1)*}(R)$ отличается от полученного ранее в [22]. Но мы нашли ряд неточностей в этой работе.

§3. Образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Обозначения.

(1) Введём отображение κ, действующее из подмножества $\{ia|\ i \in K,\ a$ – путь длины $1\}$ алгебры путей $K\,[\mathcal{Q}]$ в поле K следующим образом: $\kappa(ia) = i$.

(2) Пусть $w_i^{(k)}$ обозначает путь из i-ой вершины длины k (если вершина узловая и $k = t$, то существует два пути с такими свойствами, для определённости будем иметь в виду путь с меньшими значениями индексов у стрелок).

(3) Пусть $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1})_{\mathrm{diag}}$ обозначает диагональную матрицу размера $k \times k$, у которой элемент на позиции (i, i) равен a_i $(0 \le i < k)$.

(4) Пусть $k \ge n$, $(b_0, b_1, \ldots, b_{k+n-1})_{(\mathrm{diag},n)}$ обозначает матрицу размера $k \times (k+n)$, элементы которой c_{ij} имеют вид:

$$c_{ij} = \begin{cases} b_j, & i = j,\ j < n; \\ b_j, & i = j - n,\ j \ge n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Опишем образующие алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. Степени всех введённых ниже образующих удовлетворяют условию $0 \le s < (2t-1)\deg\sigma$.

(1) $Y_s^{(1)} = \begin{cases} \big(\kappa(\sigma^{\ell-1}(a_{\ell^2}))w_0^{(t)} \otimes e_0, 0, \ldots, 0\big)_{\mathrm{diag}}, & \text{если } n \text{ чётно;} \\ \big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, w_1^{(t)} \otimes e_1, 0, \ldots, 0\big)_{\mathrm{diag}}, & \text{если } n \text{ нечётно,} \end{cases}$

где $\deg Y_s^{(1)} = s$, причём s удовлетворяет условиям:

(а) если $n > 1$, то $r = 0$, $\ell t \equiv 1(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\mathrm{char}\, K = 2$;

(б) если $n = 1$, то $r = 0$, $\ell + p \not\vdots\, 2$.

Здесь, как и в теореме 4, ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m – целая часть от деления r на 2, p – целая часть от деления $m + \ell t$ на n.

(2) $Y_s^{(2)} = \big(\kappa(\sigma^{\ell}(a_{mt}))w_0^{(t)} \otimes e_0, 0, \ldots, 0\big)_{\mathrm{diag}}$, где $\deg Y_s^{(2)} = s$, и степень s удовлетворяет условиям:

(а) если $n > 1$, то $r = 2m$, $m + \ell t \equiv 1(n)$, $\ell + p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\mathrm{char}\, K = 2$;

(б) если $n=1$, то $r=2m$, $\ell+p \,\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\ell=0$ или $\operatorname{char} K=2$.

(3) $Y_s^{(3)}=\big(a_0,\dots,a_{n-1},a_n,\dots,a_{n+2n(t-m-1)-1},\underbrace{0,\dots,0}_{2nm}\big)_{\mathrm{diag}}$,

$$a_i=\begin{cases}\kappa(\sigma^\ell(a_{(i+m)t}))e_{it}\otimes e_{it}, & i<n;\\ w^{(m)}_{i_2t+j_2}\otimes e_{i_2t+j_2}, & n\le i<n+2n(t-m-1),\end{cases}$$

где j_2 – целая часть, а i_2 – остаток от деления $(i+n)$ на $2n$, и степень s элемента $Y_s^{(3)}$ удовлетворяет условиям

$r=2m, m+\ell t\equiv 0(n), \ell+p \,\vdots\, 2, \ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K=2$.

(4) $Y_s^{(4)}=\big(a_0,\dots,a_{n-1},a_n,\dots,a_{n+2n(t-1)-1}\big)_{\mathrm{diag}}$,

$$a_i=\begin{cases}0, & i<n, \quad n \text{ нечётно};\\ (-1)^i\kappa(\sigma^\ell(a_{(i+t-1)t}))e_{it}\otimes e_{it}, & i<n, \quad n \text{ чётно};\\ (-1)^{i_2+j_2+1}e_{i_2t+j_2}\otimes e_{i_2t+j_2}, & i\ge n,\end{cases}$$

где j_2 – целая часть, а i_2 – остаток от деления $(i+n)$ на $2n$, $\deg Y_s^{(4)}=s$, а также $r=2t-2$, $t-1+\ell t\equiv 0(n)$, $\ell+p \not\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K=2$.

(5) $Y_s^{(5)}=(\underbrace{0,\dots,0}_{n},b_n,\dots,b_{2n-1},\ \underbrace{0,\dots,0}_{2n(t-m-2)},b_{2n(t-m-1)},\dots,b_{2nt-1})_{(\mathrm{diag},n)}$,

$$b_j=\begin{cases}w^{(m+1)}_{(j+n)t}\otimes e_{jt}, & n\le j<2n;\\ -\kappa(\sigma^\ell(a_{(i_2+m+1)t}))w^{(m+1)}_{i_2t+j_2}\otimes e_{i_2t+j_2}, & \\ \qquad 2n(t-m-1)\le j<2n(t-m), \ i_2<n-1 \text{ или } i_2=2n-1; & \\ w^{(m+1)}_{i_2t+j_2}\otimes e_{i_2t+j_2}, \ 2n(t-m)\le j<2nt, \ i_2<n-1 \text{ или } i_2=2n-1; & \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, & \end{cases}$$

где j_2 – целая часть, а i_2 – остаток от деления i на $2n$, $\deg Y_s^{(5)}=s$ и $r=2m+1$, $m+\ell t\equiv 0(n)$, $\ell+p \not\vdots\, 2$, $\ell \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K=2$.

(6) $Y_s^{(6)}=(b_0,\ \underbrace{0,\dots,0}_{n-1+2n(t-m-1)},b_{n+2n(t-m-1)},0,\dots,0)_{(\mathrm{diag},n)}$,

где $b_0=w_0^{(m+1)}\otimes e_0$,

$$b_{n+2n(t-m-1)}=-\kappa(\sigma^\ell(a_{(m+1)t}))w^{(m+1)}_{(n+1)t-m-1}\otimes e_{(n+1)t-m-1}$$

и степень s элемента $Y_s^{(6)}$ удовлетворяет условиям

$r = 2m+1$, $m + \ell t \equiv 0(n)$, $\ell + p \,\vdots\, 2$, $\ell \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$.

Замечание 5. Мы часто будем использовать сокращённое обозначение $Y^{(i)}$ для $Y_j^{(i)}$ (ср. замечание 1).

§4. Ω-сдвиги образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$

Пусть $Q_\bullet \to R$ – минимальная проективная бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса R, построенная в [20]. Для коциклов $f_1 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_1}$ и $f_2 \in \mathrm{Ker}\delta^{s_2}$ имеем

$$\mathrm{cl} f_2 \cdot \mathrm{cl} f_1 = \mathrm{cl}(\Omega^0(f_2)\Omega^{s_2}(f_1)), \tag{9}$$

где $\Omega^i(f)$ обозначает i-й сдвиг коцикла f. Опишем Ω-сдвиги для образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, чтобы найти произведения её элементов, пользуясь формулой (9).

Для отображения $\varphi\colon Q_i \to Q_j$ определим *подкрученное отображение* φ' на автоморфизм σ^ℓ следующим образом: $\varphi'\colon Q'_i \to Q'_j$, где Q'_i и Q'_j получаются из Q_i и Q_j соответственно заменой каждого прямого слагаемого $P_{i,j}$ на $P_{\sigma^\ell(i),j}$ (здесь $\sigma(i) = j$, если $\sigma(e_i) = e_j$), а матрица отображения φ' получается из φ применением σ^ℓ ко всем левым компонентам тензоров соответствующей матрицы.

Обозначение. Для $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ через $(a)_n$ обозначим наименьший неотрицательный вычет a по модулю n (в частности, $0 \le (a)_n \le n-1$).

Предложение 7. (I) *Пусть $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < 2t-1$. r_0-сдвиги элементов $Y_s^{(1)}$ описываются следующим образом.*

(1) *Если r_0 нечётно, то $\Omega^{r_0}(Y_s^{(1)})$ описывается с помощью $(2nt \times 2nt)$-матрицы, элементы b_{ij} которой имеют следующий вид*:

(1а) *если $0 \le j < 2n$, то*

$$b_{ij} = \begin{cases} (-1)^j a_{(j+m_0+1)t+m_0} \cdots a_{(j+m_0)t+m_0+1} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = j,\ m_0 = 0,\ n \text{ нечётно}, \\ \qquad j + m_0 + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1б) *если $2n \le j < 2n(t - m_0 - 1)$, то $b_{ij} = 0$;*

(1в) *если* $2n(t-m_0-1) \le j < 2n(t-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i_2}(-1)^{j_2}\kappa(\sigma^{\ell}(a_{(j+m_0+1)t}))a_{(j+m_0+2)t-1}\dots a_{(j+m_0+1)t}\otimes \\ \qquad e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i=j,\ n \text{ чётно},\ i_2+m_0+1+\ell_0 t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1г) *если* $2n(t-m_0) \le j < 2n(t-m_0+1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i_2}(-1)^{j_2}a_{(j+m_0+n+2)t}\dots a_{(j+m_0+n+1)t+1}\otimes e_{jt}, \\ \qquad i=j,\ m_0>0,\ n \text{ нечётно}, \\ \qquad i_2+m_0+1+n+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1д) *если* $j \ge 2n(t-m_0+1)$, *то* $b_{ij}=0$
(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* j *на* $2n$, $j=2nj_2+i_2$).

(2) *Если* r_0 *чётно, то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(1)})$ *описывается с помощью* $(n+2n(t-1)\times n+2n(t-1))$-*матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид*:

(2а) *если* $0 \le j < n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -(-1)^{j}(-1)^{m_0}\kappa(\sigma^{\ell}(a_{(j+m_0)t}))a_{(j+m_0+1)t-1}\dots a_{(j+m_0)t}\otimes e_{jt}, \\ \qquad i=j,\ n \text{ чётно},\ j+m_0+\ell_0 t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2б) *если* $n \le j < 3n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -(-1)^{i_2}(-1)^{j_2}a_{(i_2+m_0+n+1)t}\dots a_{(i_2+m_0+n)t+1}\otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i=j,\ m_0=0,\ n \text{ нечётно}, \\ \qquad i_2+m_0+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2в) *если* $3n \le j < n+2n(t-1-m_0)$, *то* $b_{ij}=0$;
(2г) *если* $n+2n(t-1-m_0) \le j < n+2n(t-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -(-1)^{i_2}(-1)^{j_2}a_{(i_2+m_0+n+1)t}\dots a_{(i_2+m_0+n)t+1}\otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i=j,\ m_0>0,\ n \text{ нечётно}, \\ \qquad i_2+m_0+n+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2д) *если* $j \geq n + 2n(t - m_0)$, *то* $b_{ij} = 0$
(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* $j + n$ *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$).

(II) *Представим произвольное* $s_0 \in \mathbb{N}$ *в виде* $s_0 = \ell_0(2t-1) + r_0$, *где* $0 \leq r_0 \leq 2t-2$. *Тогда* $\Omega^{s_0}(Y_s^{(1)})$ – *это* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(1)})$, *все левые компоненты которого подкручены на* σ^{ℓ_0}, *а коэффициенты домножены на* $(-1)^{\ell_0}$ (*при этом под* $\Omega^0(Y_s^{(1)})$ *подразумевается сам элемент* $Y_s^{(1)}$).

Предложение 8. *Пусть* $n = 1$.

(I) *Для* $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < 2t - 1$, r_0-*сдвиги элементов* $Y_s^{(2)}$ *описываются следующим образом.*

(1) *Если* r_0 *нечётно и* $0 \leq r_0 < 2t - r - 1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(2)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times 2nt)$-*матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид*:

(1а) *если* $0 \leq j < 2n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k_1 a_{(j+m_0)t+m_0+m} \dots a_{(j+m_0)t+m_0+1} \otimes a_{t-1} \dots a_0, \ i=j, \ m_0>0; \\ 0 \ \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\textit{где } k_1 = \begin{cases} -1, \quad \ell = 0; \\ (-1)^j, \quad \ell > 0; \end{cases}$$

(1б) *если* $2n \leq j < 2n(t - m - 1)$, *то* $b_{ij} = 0$;

(1в) *если* $2n(t - m - 1) \leq j < 2n(t - m)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k_2 a_{(j+m_0+1)t-1} \dots a_{(j+m_0)t+1} \otimes a_{i_2 t+j_2+m} \dots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = i_2, \ m_0 = 0; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\textit{где } k_2 = \begin{cases} (-1)^{i_2}, \quad \ell = 0; \\ \kappa(\sigma^\ell(a_{(i_2+m)t})), \quad \ell > 0; \end{cases}$$

(1г) *если* $2n(t - m) \leq j < 2nt$, *то* $b_{ij} = 0$
(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(2) *Если* r_0 *чётно и* $0 \leq r_0 < 2t - r - 1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(2)})$ *описывается с помощью* $(n + 2n(t-1) \times n + 2n(t-1))$-*матрицы с единственным*

ненулевым элементом, который имеет следующий вид:

$$b_{00} = \begin{cases} k_3 a_{t-1} \dots a_0 \otimes e_0, & m_0 = 0; \\ k_3 e_0 \otimes a_{t-1} \dots a_0, & m_0 > 0, \end{cases}$$

где $k_3 = \begin{cases} -1, & m_0 > 0,\ \ell = 0; \\ \kappa(\sigma^\ell(a_{(m+m_0)t})) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

(3) *Если* r_0 *нечётно и* $2t - r - 1 \le r_0 \le 2t - 2$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(2)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times n + 2n(t-1))$*-матрицы с единственным ненулевым элементом, который имеет следующий вид*:
$b_{00} = -\kappa(\sigma^\ell(a_{mt}))a_{t-1} \dots a_{m_0 t + m_0 + 1} \otimes a_{t-1} \dots a_0$.

(4) *Если* r_0 *чётно и* $2t-r-1 \le r_0 \le 2t-2$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(2)})$ *описывается с помощью* $(n+2n(t-1) \times 2nt)$*-матрицы с единственным ненулевым элементом, который имеет следующий вид*:
$b_{01} = -a_{(m_0+1)t+m+m_0} \dots a_0 \otimes a_{t-1} \dots a_0$.

(II) *Для произвольного* $s_0 \in \mathbb{N}$ *описание* $\Omega^{s_0}(Y_s^{(2)})$ *аналогично описанию* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(2)})$, *где* $0 \le r_0 \le 2t - 2$ *и* $s_0 = \ell_0(2t-1) + r_0$, *все левые компоненты которого подкручены на* σ^{ℓ_0}, *а коэффициенты домножены на* $(-1)^{\ell_0}$ (*при этом под* $\Omega^0(Y_s^{(2)})$ *подразумевается сам элемент* $Y_s^{(2)}$).

Предложение 9. (I) *Пусть* $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < 2t - 1$. r_0*-сдвиги элементов* $Y_s^{(3)}$ *описываются следующим образом.*

(1) *Если* r_0 *нечётно и* $0 \le r_0 < 2t - r - 1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(3)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times 2nt)$*-матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(1а) *если* $0 \le j < 2n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(j+m_0)t+m_0+m} \dots a_{(j+m_0)t+m_0+1} \otimes e_{jt}, & i = j; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1б) *если* $2n \le j < 2n(t - m_0 - m - 1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+m} \dots a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+1} \otimes e_{i_2 t + j_2}, & i = j; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1в) *если* $2n(t-m_0-m-1) \le j < 2n(t-m_0-m)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k a_{(i_2+m_0)t+j_2+m+m_0} \dots a_{(i_2+m_0)t+j_2+j_1+m_0+1} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+j_2+j_1-1} \dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = j + 2nj_1,\ 0 \le j_1 \le m, \\ \qquad k = \begin{cases} -\kappa(\sigma^\ell(a_{(i_2+1+m+m_0)t})), & j_1 < m; \\ \kappa(\sigma^\ell(a_{(i_2+1+m+m_0)t})), & j_1 = m \end{cases} \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1г) *если* $2n(t-m_0-m) \le j < 2n(t-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0+n)t+m+m_0+j_2} \dots a_{(i_2+m_0+1+n)t} \otimes a_{(i_2+1)t-m_0-2} \dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(t-1-m_0) + i_2; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1д) *если* $2n(t-m_0) \le j < 2nt$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0+n)t+m+m_0+j_2} \dots a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, & i = j; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(2) *Если* r_0 *чётно и* $0 \le r_0 < 2t-r-1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(3)})$ *описывается с помощью* $(n+2n(t-1) \times n+2n(t-1))$-*матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(2а) *если* $0 \le j < n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} \kappa(\sigma^\ell(a_{(j+m+m_0)t}))e_{(j+m_0)t} \otimes e_{jt}, & i = j; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2б) *если* $n \le j < n+2n(t-m-m_0-1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+m-1} \dots a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0} \otimes e_{i_2t+j_2}, & i = j; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2в) *если* $n+2n(t-m-m_0-1) \le j < n+2n(t-m_0-1)$, *то* $b_{ij} = 0$;

(2г) *если* $n+2n(t-m_0-1) \le j < n+2n(t-1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0+n-1)t+j_2+m_0+m} \dots a_{(i_2+m_0+n-1)t+j_2+m_0+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = j; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

(где i_2 – остаток, а j_2 – целая часть от деления $j+n$ на $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$).

(3) *Если r_0 нечётно и $2t-r-1 \le r_0 \le 2t-2$, то $\Omega^{r_0}(Y_s^{(3)})$ описывается с помощью $(2nt \times n + 2n(t-1))$-матрицы, элементы b_{ij} которой имеют следующий вид:*

(3а) *если $0 \le j < n$, то*

$$b_{ij} = \begin{cases} ka_{(j+m_0+1)t-1} \dots a_{(j+m_0)t+j_1+m_0+1} \otimes a_{jt+j_1-1} \dots a_{jt}, \\ \qquad i = j + 2nj_1,\ 0 \le j_1 \le t - m_0 - 1, \\ \qquad k = \begin{cases} \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m+m_0-t+1)t})), & j_1 = t - m_0 - 1; \\ -\kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m+m_0-t+1)t})), & j_1 < t - m_0 - 1; \end{cases} \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(3б) *если $n \le j < n + 2n(t-m_0-1)$, то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0+m} \dots a_{(i_2+m_0+n+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-m_0-2} \dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = i_2 + 2n(t-m_0-1); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(3в) *если $n + 2n(t-m_0-1) \le j < n + 2n(2t-m-m_0-2)$, то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0+m} \dots a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = j + n; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(3г) *если $n + 2n(2t-m-m_0-2) \le j < n + 2n(t-1)$, то $b_{ij} = 0$ (где i_2 – остаток, а j_2 – целая часть от деления $j+n$ на $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$).*

(4) *Если r_0 чётно и $2t-r-1 \le r_0 \le 2t-2$, то $\Omega^{r_0}(Y_s^{(3)})$ описывается с помощью $(n + 2n(t-1) \times 2nt)$-матрицы, элементы b_{ij} которой имеют следующий вид:*

(4а) *если $0 \le j < n$, то $b_{ij} = 0$;*

(4б) *если $n \le j < 2n$, то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{(j+n+m_0)t+m_0+m-t} \dots a_{(j+n+m_0)t} \otimes e_{jt}, \quad i = j - n; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(4в) *если $2n \le j < 2n(t-m_0)$, то $b_{ij} = 0$;*

(4г) *если* $2n(t-m_0) \le j < 2n(2t-m-m_0-1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0-1+n)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0-1+n)t+j_2+m_0+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = j-n; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(4д) *если* $2n(2t-m-m_0-1) \le j < 2n(2t-m-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} ka_{(i_2+m_0+1+n)t-1} \cdots a_{(i_2+m_0+1+n)t-m+j_1} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+2t-m-m_0+j_1-2} \cdots a_{i_2t+2t-m-m_0-1}, \\ \qquad i = j-n+2nj_1,\ 0 \le j_1 \le m+m_0-t, \\ \qquad k = -\kappa(\sigma^{\ell}(a_{(i_2+m+m_0+1-t)t})); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(4е) *если* $2n(2t-m-m_0-1) \le j < 2nt$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} ka_{(i_2+m_0-1)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = (i_2+1)_n, i_2 < n-1 \text{ или } i_2 = 2n-1 \\ \qquad k = \begin{cases} \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(i_2+m+m_0+1-t)t})), & j_2 = 2t-m-m_0-1; \\ -1, \quad j_2 > 2t-m-m_0-1; \end{cases} \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(II) *Представим произвольное* $s_0 \in \mathbb{N}$ *в виде* $s_0 = \ell_0(2t-1) + r_0$, *где* $0 \le r_0 \le 2t-2$. *Тогда* $\Omega^{s_0}(Y_s^{(3)})$ – *это* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(3)})$, *все левые компоненты которого подкручены на* σ^{ℓ_0} (*при этом под* $\Omega^0(Y_s^{(3)})$ *подразумевается сам элемент* $Y_s^{(3)}$).

Предложение 10. (I) *Пусть* $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < 2t-1$. r_0-*сдвиги элементов* $Y_s^{(4)}$ *описываются следующим образом.*

(1) *Если* r_0 *нечётно, то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(4)})$ *описывается с помощью* $(n + 2n(t-1) \times 2nt)$-*матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(1а) *если* $0 \le j < n$, *то*

(*а*) *если* n *чётно, то*

$$b_{ij} = \begin{cases} \varkappa_1 a_{(j+n+m_0+1)t-1} \dots a_{(j+n+m_0)t+1+2j_1+m_0} \otimes \\ \quad a_{(j+n)t+2j_1-1} \dots a_{(j+n)t}, \\ \quad i = j + 4nj_1 + n,\ 0 \le j_1 \le \frac{t-m_0-1}{2}; \\ \varkappa_2 a_{(j+m_0+1)t-1} \dots a_{(j+m_0)t+2+2j_1+m_0} \otimes a_{jt+2j_1} \dots a_{jt}, \\ \quad i = j + 4nj_1 + 2n,\ 0 \le j_1 \le \frac{t-m_0-2}{2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(*б*) *если* n *нечётно, то*

$$b_{ij} = \begin{cases} \varkappa_2 a_{(j+m_0+1)t-1} \dots a_{(j+m_0)t+2+2j_1+m_0} \otimes \\ \quad a_{jt+2j_1} \dots a_{jt}, \\ \quad i = j + 4nj_1 + 2n,\ 0 \le j_1 \le \frac{t-m_0-2}{2}; \\ \varkappa_2 a_{(j+m_0+n+1)t-1} \dots a_{(j+m_0+n)t+2+2j_1+m_0} \otimes \\ \quad a_{(j+n)t+2j_1} \dots a_{(j+n)t}, \\ \quad i = j + 4nj_1 + 3n,\ 0 \le j_1 \le \frac{t-m_0-2}{2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где

$$\varkappa_1 = \begin{cases} (-1)^j \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m_0)t})), & j_1 = \frac{t-m_0-1}{2}; \\ -(-1)^j \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m_0)t})) & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\varkappa_2 = \begin{cases} (-1)^j \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m_0)t})), & j_1 = \frac{t-m_0-2}{2}; \\ -(-1)^j \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m_0)t})) & \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1б) *если* $n \le j < n + 2n(t-1-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} \varkappa_3 a_{(i_2+m_0+1)t+j_2+m_0-1} \dots a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+2j_1+1} \\ \quad \otimes a_{i_2 t+j_2+2j_1-1} \dots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_2+2j_1) + i_2,\ 0 \le j_1 \le \frac{t-j_2-m_0-1}{2}; \\ \varkappa_4 a_{(i_2+m_0+1)t+j_2+m_0-1} \dots a_{(i_2+m_0+1)t+j_2+m_0-2j_1} \\ \quad \otimes a_{(i_2+1)t+j_2-2j_1-2} \dots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_2-2j_1-1) + (i_2+1)_{2n},\ 0 \le j_1 \le \frac{j_2-1}{2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где

$$\varkappa_3 = \begin{cases} -(-1)^{j_2}(-1)^{i_2}, & j_1 = \frac{t-j_2-m_0-1}{2}; \\ (-1)^{j_2}(-1)^{i_2} & \text{в остальных случаях}; \end{cases} \qquad \varkappa_4 = (-1)^{j_2}(-1)^{i_2};$$

(1в) *если* $n + 2n(t-1-m_0) \le j < n + 2n(t-1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -(-1)^{j_2}(-1)^{i_2} e_{(i_2+n+m_0)t+j_2+m_0+1} \otimes e_{i_2 t+j_2}, & i = j+n; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* $j+n$ *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$).

(2) *Если* r_0 *чётно, то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(4)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times n + 2n(t-1))$-*матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(2а) *если* $0 \le j < 2n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -(-1)^j a_{(j+m_0)t+m_0-1} \cdots a_{(j+m_0)t} \otimes e_{jt}, \\ \quad i = j-n,\ j \ge n,\ n \text{ чётно}; \\ (-1)^j a_{(j+m_0)t+m_0-1} \cdots a_{(j+m_0)t+m_0-2j_1} \\ \quad \otimes a_{(j+n+1)t-2j_1-2} \cdots a_{(j+n)t}, \\ \qquad i = n + 2n(t-2-2j_1) + (j+n)_{2n},\ 0 \le j_1 < \frac{m_0}{2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2б) *если* $2n \le j < 2n(t-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -(-1)^{j_2}(-1)^{i_2} e_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0} \otimes e_{i_2 t+j_2}, & i = j-n; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2в) *если* $2n(t-m_0) \le j < 2nt$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -\varkappa a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0-1} \cdots a_{(i_2+m_0+n+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = (i_2+1)_n \text{ и выполнено условие}(+); \\ \varkappa a_{(i_2+n+m_0)t+j_2+m_0-1} \cdots a_{(i_2+n+m_0-1)t+j_2+m_0+2j_1+1} \otimes \\ \qquad a_{i_2 t+j_2+2j_1-1} \cdots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_2+2j_1) + i_2 - n,\ 0 \le j_1 < \frac{t-j_2}{2}; \\ \varkappa a_{(i_2+n+m_0)t+j_2+m_0-1} \cdots a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0-2j_1} \otimes \\ \qquad a_{(i_2+1)t+j_2-2j_1-2} \cdots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_2-1-2j_1) - n + (i_2+1)_{2n},\ 0 \le j_1 < \frac{j_2-t+m_0}{2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\varkappa = \begin{cases} -(-1)^{j_2}(-1)^{i_2}\kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(i_2+m_0)t})), & \text{если } j_2 = t - m_0; \\ (-1)^{j_2}(-1)^{i_2} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$

а условие (+) *имеет вид:*
либо n *нечётно и* $t - j_2$ *нечётно,*
либо n *чётно,* $t - j_2$ *чётно и* $i_2 < n - 1$*;*
либо n *чётно,* $t - j_2$ *чётно и* $i_2 = 2n - 1$*;*
либо n *чётно,* $t - j_2$ *нечётно,* $n - 1 \le i_2 < 2n - 1$
(*где* i_2 *– остаток, а* j_2 *– целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(II) *Представим произвольное* $s_0 \in \mathbb{N}$ *в виде* $s_0 = \ell_0(2t-1) + r_0$, *где* $0 \le r_0 \le 2t-2$. *Тогда* $\Omega^{s_0}(Y_s^{(4)})$ *– это* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(4)})$, *все левые компоненты которого подкручены на* σ^{ℓ_0} (*при этом под* $\Omega^0(Y_s^{(4)})$ *подразумевается сам элемент* $Y_s^{(4)}$).

Обозначение. Представим произвольное $s_0 \in \mathbb{N}$ в виде $s_0 = \ell_0(2t-1)+r_0$, $0 \le r_0 \le 2t-2$. Пусть m_0 – целая часть от деления r_0 на 2. Будем говорить, что выполнено условие $(*)_{j,\ x}$, если выполнено следующее: $(j \ge y > n)$ или $(y > j + n)$ или ($y \le n$ и $j \ge y$ и $j < y + n$), где $y = (-x - m_0 - t\ell_0)_{2n}$.

Предложение 11. (I) *Пусть* $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < 2t-1$. r_0*-сдвиги элементов* $Y_s^{(5)}$ *описываются следующим образом.*

(1) *Если* r_0 *нечётно и* $0 \le r_0 < 2t-r-1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(5)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times n + 2n(t-1))$*-матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(1a) *если* $0 \le j < n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k_1 a_{(j+m_0+1)t-1} \dots a_{(j+m_0)t+1+j_1+m_0} \otimes a_{jt+j_1-1} \dots a_{jt}, \\ \qquad i = j + 2nj_1,\ 0 \le j_1 < t - m - m_0 - 1 \\ \qquad \text{и выполнено условие } (*)_{j,1}; \\ -k_1 a_{(j+m_0+n+1)t-1} \dots a_{(j+m_0+n)t+1+j_1+m_0} \otimes \\ \qquad a_{(j+n)t+j_1-1} \dots a_{(j+n)t}, \\ \qquad i = j + n + 2nj_1,\ 0 \le j_1 < t - m - m_0 - 1 \\ \qquad \text{и не выполнено условие } (*)_{j,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $k_1 = \kappa(\sigma^{\ell}(a_{(j+m+m_0+1)t}))$*;*

(1б) *если* $n \le j < n + 2n(t - m - m_0 - 2)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{(i_2+1+n+m_0)t+j_2+m+m_0} \cdots a_{(i_2+1+n+m_0)t} \otimes \\ \qquad a_{(i_2+1)t-m_0-2} \cdots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(t-1-m_0) + i_2 \text{ и не выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1в) *если* $n + 2n(t - m - m_0 - 2) \le j < n + 2n(t - 1 - m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k_2 a_{(i_2+m_0)t+j_2+m+m_0+1} \cdots a_{(i_2+m_0)t+j_2+1+m_0} \otimes e_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = j + n \text{ и выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\text{где } k_2 = \begin{cases} -1, \quad j_2 = t - 1 - m_0; \\ 1 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1г) *если* $j \ge n + 2n(t - 1 - m_0)$, *то* $b_{ij} = 0$
(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* $j + n$ *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$).

(2) *Если* r_0 *чётно и* $0 \le r_0 < 2t - r - 1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(5)})$ *описывается с помощью* $(n + 2n(t-1) \times 2nt)$-*матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(2а) *если* $0 \le j < 2n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(j+n+m_0)t+m+m_0} \cdots a_{(j+n+m_0)t} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = (j)_n \text{ и не выполнено условие } (*)_{j,0}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2б) *если* $2n \le j < 2n(t - m - 1 - m_0)$, *то* $b_{ij} = 0$;

(2в) *если* $2n(t-m-1-m_0) \le j < 2n(t-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} ka_{(i_2+m_0)t+j_2+m+m_0} \dots a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2nj_2 - n + i_2 \text{ и выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ -ka_{(i_2+n+1+m_0-1)t+j_2+m+m_0} \dots a_{(i_2+n+m_0-1)t+j_2+m+2+m_0+j_1} \\ \quad \otimes a_{i_2t+j_2+m+j_1} \dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(t-m_0+j_1) - n + i_2,\ 0 \le j_1 < m_0, \\ \qquad j_2 = t-m-1-m_0 \\ \qquad \text{и не выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\text{где } k = \begin{cases} \kappa(\sigma^\ell(a_{(j+m+n+1+m_0)t})), \quad j_2 = t-m-m_0-1; \\ 1 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2г) *если* $2n(t-m_0) \le j < 2nt$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0)t+j_2+m+m_0} \dots a_{(i_2+m_0+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = (i_2+1)_n \text{ и выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(3) *Если* r_0 *нечётно и* $2t-r-1 \le r_0 \le 2t-2$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(5)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times 2nt)$*-матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(3а) *если* $j < 2n$, *то* $b_{ij} = 0$;

(3б) *если* $2n \le j < 2n(t-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k_1 a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+m+1} \dots a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+1} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = j \text{ и выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\text{где } k_1 = \begin{cases} -1, \quad j_2 = t-m_0-1; \\ 1 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(3в) *если* $2n(t-m_0) \le j < 2n(2t-m-m_0-2)$, *то* $b_{ij} = 0$;

(3г) *если* $2n(2t-m-m_0-2) \le j < 2n(2t-m-m_0-1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k_2 a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+m+1} \dots a_{(i_2+1+m_0)t+m_0+1} \otimes \\ \qquad a_{(i_2-1)t+j_2+m+m_0+1} \dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = (j+1)_{2n} \text{ и выполнено условие } (*)_{i_2,2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $k_2 = -\kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m+m_0+2-t)t}))$;

(3д) *если* $j \ge 2n(2t-m-m_0-1)$, *то* $b_{ij} = 0$
(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(4) *Если* r_0 *чётно и* $2t-r-1 \le r_0 \le 2t-2$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(5)})$ *описывается с помощью* $(n+2n(t-1) \times n+2n(t-1))$-*матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид*:

(4а) *если* $j < n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} k_0 a_{(j+m_0+1+n_1)t-1} \dots a_{(j+m_0+n_1)t} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = j,\ j+m_0+1+\ell_0 t \equiv 0(n); \\ k_0 e_{(j+m_0+1)t} \otimes a_{(j+1)t-1} \dots a_{jt}, \quad i = (j+1)_n,\ m_0 = t-1; \\ k a_{(j+m_0+1+n_1)t-1} \dots a_{(j+m_0+1+n_1)t-n_2} \otimes a_{jt+j_1} \dots a_{jt}, \\ \qquad i = j+n+2nj_1,\ 0 \le j_1 < n_3 \text{ и выполнено условие } (*)_{j,1}; \\ a_{(j+m_0+n+1+n_1)t-1} \dots a_{(j+m_0+n+1+n_1)t-n_2} \otimes a_{(j+n)t+j_1} \dots a_{(j+n)t}, \\ \qquad i = j+2n(j_1+1),\ 0 \le j_1 < n_3 \text{ и не выполнено условие } (*)_{j,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $k = k_1 k_2$,

$$k_1 = \begin{cases} \kappa(\sigma^{\ell}(a_{(j+t)t})), & m_0 = t-m-1; \\ \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m+m_0-t+1)t})) & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$k_2 = \begin{cases} -1, & m_0 = t-1; \\ 1 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$k_0 = \begin{cases} -k & \textit{если выполнено условие } (*)_{j,1}, \\ k & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$n_1 = \begin{cases} n, & m_0 = t-1; \\ 0 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$n_2 = \begin{cases} t-1-j_1, & m_0 = t-1; \\ t-1-m_0 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$n_3 = \begin{cases} t-1, & m_0 = t-1; \\ 1, & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(4б) *если* $n \le j < n + 2n(t-1-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = j \textit{ и выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(4в) *если* $n + 2n(t-1-m_0) \le j < n + 2n(2t-2-m-m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+1+m_0)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = (j+1)_n \textit{ и выполнено условие } (*)_{i_2,1}; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях;} \end{cases}$$

(4г) *если* $j \ge n + 2n(2t-2-m-m_0)$, *то* $b_{ij} = 0$
(*где* i_2 *– остаток, а* j_2 *– целая часть от деления* $j+n$ *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$).

(II) *Представим произвольное* $s_0 \in \mathbb{N}$ *в виде* $s_0 = \ell_0(2t-1) + r_0$, *где* $0 \le r_0 \le 2t-2$. *Тогда* $\Omega^{s_0}(Y_s^{(5)})$ *– это* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(5)})$, *все левые компоненты которого подкручены на* σ^{ℓ_0} (*при этом под* $\Omega^0(Y_s^{(5)})$ *подразумевается сам элемент* $Y_s^{(5)}$).

Предложение 12. (I) *Пусть* $r_0 \in \mathbb{N}$, $r_0 < 2t-1$. r_0*-сдвиги элементов* $Y_s^{(6)}$ *описываются следующим образом.*

(1) *Если* r_0 *нечётно и* $0 \le r_0 < 2t-r-1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(6)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times n+2n(t-1))$*-матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(1a) *если* $0 \le j < n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} \varkappa_1 a_{(j+1+m_0)t-1} \dots a_{(j+m_0)t+1+m_0} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = j,\ j+m_0+\ell_0(t+n) \equiv n (\mathrm{mod}\ 2n); \\ \varkappa_1 a_{(j+n+1+m_0)t-1} \dots a_{(j+n+m_0)t+1+m_0} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = j+n,\ j+m_0+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ \varkappa_1 a_{(j+1+m_0)t-1} \dots a_{(j+m_0)t+m_0+2+j_1} \\ \qquad \otimes a_{jt+j_1} \dots a_{jt}, \\ \qquad i = j+2n(j_1+1),\ 0 \le j_1 < n_1, \\ \qquad j+m_0+\ell_0(t+n) \equiv n (\mathrm{mod}\ 2n); \\ \varkappa_1 a_{(j+1+m_0+n)t-1} \dots a_{(j+m_0+n)t+m_0+2+j_1} \\ \qquad \otimes a_{(j+n)t+j_1} \dots a_{(j+n)t}, \\ \qquad i = j+n+2n(j_1+1),\ 0 \le j_1 < n_1, \\ \qquad j+m_0+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -\varkappa_1 a_{(j+1+m_0)t-1} \dots a_{(j+m_0+1)t+1+2j_1-m} \otimes a_{(j+1)t+2j_1-m-m_0-1} \dots a_{jt}, \\ \qquad i = j+2n(2j_1+t-m-m_0),\ 0 \le j_1 < \frac{m}{2},\ m_0 > 1, \\ \qquad j+m_0+\ell_0(t+n) \equiv n (\mathrm{mod}\ 2n),\ m \text{ чётно}; \\ -\varkappa_1 a_{(j+1+m_0+n)t-1} \dots a_{(j+m_0+1+n)t+1+2j_1-m} \otimes \\ \qquad a_{(j+1+n)t+2j_1-m-m_0-1} \dots a_{(j+n)t}, \\ \qquad i = j+n+2n(2j_1+t-m-m_0),\ 0 \le j_1 < \frac{m}{2},\ m_0 > 1, \\ \qquad j+m_0+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n),\ m \text{ чётно}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\varkappa_1 = \kappa(\sigma^\ell(a_{(j+m+m_0+1)t}))$,

$$n_1 = \begin{cases} t-m-m_0-2, \quad m_0 > 1 \text{ или } m = 0; \\ t-m-2 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1б) *если* $n \le j < n + 2n(t - 2 - m_0 - m)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+1+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0)t+j_2+j_1+m_0+1} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+j_2+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_1+j_2) + i_2,\ m \le j_1 < n_2, \\ \qquad i_2 + m_0 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -a_{(i_2+m_0+1)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0+1)t+2j_1+1-m} \otimes \\ \qquad a_{(i_2+1)t+2j_1-m_0-m-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(2j_1 + t - m_0 - m) + i_2,\ 0 \le j_1 < \frac{m}{2},\ m_0 > 1, \\ \qquad i_2 + m_0 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n),\ m \text{ чётно}; \\ \varkappa_2 a_{(i_2+1+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0)t+j_2+j_1+m_0+1} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+j_2+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_1+j_2) + i_2,\ m \le j_1 < t - j_2 - m_0, \\ \qquad i_2 + m_0 + 1 + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\text{где } n_2 = \begin{cases} t - m - m_0 - 1 - j_2, \quad m_0 > 1 \text{ или } m = 0; \\ t - m - 1 - j_2 \quad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\varkappa_2 = \begin{cases} -1, \quad j_1 = t - j_2 - m_0 - 1; \\ 1 \quad \text{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(1в) *если* $n + 2n(t - 2 - m_0 - m) \le j < n + 2n(t-1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(i_2+1+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0)t+j_2+j_1+m_0+1} \\ \quad \otimes a_{i_2t+j_2+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_1+j_2) + i_2,\ m \le j_1 < n_2, \\ \qquad i_2 + m_0 + 1 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -a_{(i_2+m_0+1)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0)t+2j_1+1+m_0} \otimes \\ \qquad a_{(i_2+1)t+2j_1-m_0-m-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(2j_1 + t - m_0 - m) + i_2,\ 0 \le j_1 < \frac{m}{2},\ m_0 > 1, \\ \qquad i_2 + m_0 + 1 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -a_{(i_2+m_0+n+1)t+m} \cdots a_{(i_2+m_0+n+1)t} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2nj_2 + i_2, j_2 = t - m_0 - 1, \\ \qquad i_2 + m_0 + 1 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(где i_2 *– остаток, а* j_2 *– целая часть от деления* $j+n$ *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$*).*

(2) *Если* r_0 *чётно и* $0 \le r_0 < 2t - r - 1$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(6)})$ *описывается с помощью* $(n + 2n(t-1) \times 2nt)$*-матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(2а) *если* $0 \le j < 2n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{(j+m_0)t+m_0+m} \dots a_{(j+m_0)t} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = (j)_n,\ j + m_0 + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2б) *если* $2n \le j < 2n(t - m - m_0 - 1)$, *то* $b_{ij} = 0$;

(2в) *если* $2n(t - m - m_0 - 1) \le j < 2n(t - m - m_0)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -\kappa(\sigma^\ell(a_{(i_2+m+m_0+1)t}))a_{(i_2+n+m_0+1)t-1} \dots a_{(i_2+n+m_0)t+j_1+1} \\ \quad \otimes a_{(i_2+1)t-m_0+j_1-1} \dots a_{(i_2+1)t-m-m_0-1}, \\ \qquad i = n + 2n(t - m_0 - 1 + j_1) + i_2,\ 0 \le j_1 < m_0, \\ \qquad i_2 + m_0 + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ \varkappa a_{(i_2+m_0+1)t-1} \dots a_{(i_2+m_0+1)t-m-1+j_1} \\ \quad \otimes a_{i_2 t+j_2+j_1-1} \dots a_{i_2 t+j_2}, \\ \qquad i = n + 2n(j_2 + j_1 - 1) + i_2,\ n_1 \le j_1 < n_2, \\ \qquad i_2 + m_0 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\textit{где}\ \varkappa = \begin{cases} \kappa(\sigma^\ell(a_{(j+m+m_0+1)t})), \quad j_1\ \textit{чётно и}\ j_1 > 0; \\ -\kappa(\sigma^\ell(a_{(j+m+m_0+1)t})) \quad \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$n_1 = \begin{cases} 1, \quad m_0 = 1\ \textit{и}\ m > 0; \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$n_2 = \begin{cases} 1, \quad m_0 = 0\ \ \textit{или}\ \ m\ \textit{нечётно}; \\ 2, \quad m_0 = 1\ \ \textit{и}\ \ m > 0,\ m\ \ \textit{чётно}; \\ m + 1 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(2г) *если* $2n(t-m-m_0) \le j < 2nt$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{(i_2+n+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+n+m_0-1)t+j_2+m_0+1+j_1+m} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+j_2+j_1+m-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = n+2n(j_2-1+j_1+m)+i_2,\ j_2 < t-m, \\ \qquad 0 \le j_1 < t-m-j_2, \\ \qquad i_2+m_0+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ a_{(i_2+n+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+n+m_0+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = (i_2+1)_n,\ j_2 \ge t-m_0, \\ \qquad i_2+m_0+1+n+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -a_{(i_2+n+m_0)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+n+m_0-1)t+j_2+m_0+1+j_1+m} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+j_2+j_1+m-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = n+2n(j_2-1+j_1+m)+i_2,\ j_2 \ge t-m_0, \\ \qquad 0 \le j_1 < t-m-j_2; \\ \qquad i_2+m_0+1+n+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

(*где* i_2 *– остаток, а* j_2 *– целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(3) *Если* r_0 *нечётно и* $2t-r-1 \le r_0 \le 2t-2$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(6)})$ *описывается с помощью* $(2nt \times 2nt)$*-матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(3а) *если* $0 \le j < 2n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{(j+m_0+n)t+m_0+m+1} \cdots a_{(j+m_0+n)t+m_0+1} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = (j+n)_{2n},\ j+m_0+\ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

(3б) *если* $2n \le j < 2nt$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} \varkappa a_{(i_2+m_0)t+j_2+m_0+m+1} \cdots a_{(i_2+m_0+1)t+m_0+1} \\ \quad \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \quad i = (j+1)_{2n},\ j_2 \geq 2t - m_0 - m - 2, \\ \quad i_2 + m_0 + 1 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -a_{(i_2+m_0+n+1)t+m} \cdots a_{(i_2+m_0+n+1)t} \otimes e_{i_2t+j_2}, \\ \quad i = j, j_2 = t - m_0 - 1, \\ \quad i_2 + m_0 + 1 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\varkappa = \begin{cases} \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(i_2+m+m_0+2-t)t})), \quad j_2 = 2t - m_0 - m - 2; \\ -1 \quad \textit{в остальных случаях} \end{cases}$
(*где* i_2 *– остаток, а* j_2 *– целая часть от деления* j *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2$).

(4) *Если* r_0 *чётно и* $2t-r-1 \leq r_0 \leq 2t-2$, *то* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(6)})$ *описывается с помощью* $(n + 2n(t-1) \times n + 2n(t-1))$*-матрицы, элементы* b_{ij} *которой имеют следующий вид:*

(4a) *если* $0 \leq j < n$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -\kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m+m_0+1-t)t}))a_{(j+1+m_0)t-1} \cdots a_{(j+m_0)t} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = j,\ m_0 = t-1,\ j + m_0 + \ell_0 t \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n); \\ \varkappa a_{(j+1+m_0)t-1} \cdots a_{(j+m_0)t+n_1+1} \otimes a_{(j+n-n_2)t+j_1} \cdots a_{(j+n-n_2)t}, \\ \qquad i = j - n_2 + 2n(j_1+1),\ 0 \leq j_1 < n_3, \\ \qquad j + m_0 + \ell_0(t+n) \equiv n (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -\varkappa a_{(j+1+m_0+n)t-1} \cdots a_{(j+m_0+n)t+n_1+1} \otimes a_{(j+n_2)t+j_1} \cdots a_{(j+n_2)t}, \\ \qquad i = j + n_2 - n + 2n(j_1+1),\ 0 \leq j_1 < n_3, \\ \qquad j + m_0 + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где

$$\varkappa = \begin{cases} \kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m+m_0+1-t)t})), & m_0 = t-1; \\ -\kappa(\sigma^{\ell+1}(a_{(j+m+m_0+1-t)t})), & m_0 < t-1, \end{cases}$$

$$n_1 = \begin{cases} j_1, & m_0 = t-1; \\ m_0, & m_0 < t-1, \end{cases}$$

$$n_2 = \begin{cases} 0, & m_0 = t-1; \\ n, & m_0 < t-1, \end{cases}$$

$$n_3 = \begin{cases} t-1, & m_0 = t-1; \\ 1, & m_0 < t-1; \end{cases}$$

(4б) *если* $n \le j < n + 2n(t-1)$, *то*

$$b_{ij} = \begin{cases} -a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0-1+n)t+j_2+j_1+m_0+m+1} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+j_2+m+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = n + 2n(j_1+j_2+m-1) + i_2,\ j_2 < t-m, \\ \qquad 0 \le j_1 < t-m-j_2, \\ \qquad i_2 + m_0 + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0+1+n)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = (i_2+1)_n,\ t-m_0 \le j_2 < 2t-m-m_0-1, \\ \qquad i_2 + m_0 + 1 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ -a_{(i_2+m_0+n)t+j_2+m_0+m} \cdots a_{(i_2+m_0-1+n)t+j_2+j_1+m_0+m+1} \otimes \\ \qquad a_{i_2t+j_2+m+j_1-1} \cdots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = n + 2n(j_1+j_2+m-1) + i_2, \\ \qquad t-m_0 \le j_2 < 2t-m-m_0-1, \\ \qquad 0 \le j_1 < t-m-j_2, \\ \qquad i_2 + m_0 + 1 + n + \ell_0(t+n) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2n); \\ 0 \quad \textit{в остальных случаях} \end{cases}$$

(*где* i_2 – *остаток, а* j_2 – *целая часть от деления* $j+n$ *на* $2n$, $j = 2nj_2 + i_2 - n$).

(II) *Представим произвольное* $s_0 \in \mathbb{N}$ *в виде* $s_0 = \ell_0(2t-1) + r_0$, *где* $0 \le r_0 \le 2t-2$. *Тогда* $\Omega^{s_0}(Y_s^{(6)})$ – *это* $\Omega^{r_0}(Y_s^{(6)})$, *все левые компоненты которого подкручены на* σ^{ℓ_0}, *а коэффициенты домножены на* $(-1)^{\ell_0}$ (*при этом под* $\Omega^0(Y_s^{(6)})$ *подразумевается сам элемент* $Y_s^{(6)}$).

Доказательства предложений 7 – 12 состоят в прямой, хотя и громоздкой, проверке коммутативности квадратов вида

$$\begin{array}{ccc} Q_{\ell(2t-1)+r+r_0} & \xrightarrow{d_{\ell(2t-1)+r+r_0-1}} & Q_{\ell(2t-1)+r+r_0-1} \\ {\scriptstyle f_{r_0}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{r_0-1}} \\ Q_{r_0} & \xrightarrow{d_{r_0-1}} & Q_{r_0-1}. \end{array}$$

§5. Произведения в $\mathrm{HH}^*(R)$

(I) Рассмотрим произведения элементов, которые равны нулю.

(1) $Y^{(1)}Y^{(i)} = 0$ для любого i, если в $Y^{(i)}$ все компоненты состоят из тензоров вида $u \otimes v$, где u – путь длины больше 0. Отсюда получаем, что все произведения $Y^{(1)}Y^{(1)}$, $Y^{(1)}Y^{(5)}$ и $Y^{(1)}Y^{(6)}$ нулевые.

(2) Если $n = 1$, то аналогично предыдущему рассуждению получаем, что $Y^{(2)}Y^{(1)} = Y^{(2)}Y^{(2)} = Y^{(2)}Y^{(5)} = Y^{(2)}Y^{(6)} = 0$.

(3) Рассмотрим два произвольных элемента $Y^{(5)}_{s_5}$ и $Y^{(5)}_{s'_5}$. Для их степеней s_5 и s'_5 имеем:

$s_5 = \ell_5(2t-1)+2m_5+1,\ m_5+\ell_5 t = np_5,\ \ell_5+p_5 \not\vdots\, 2,\ \ell_5 \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

$s'_5 = \ell'_5(2t-1)+2m'_5+1,\ m'_5+\ell'_5 t = np'_5,\ \ell'_5+p'_5 \not\vdots\, 2,\ \ell'_5 \not\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$.

Пусть $s = s_5 + s'_5$; это степень элемента $Y^{(5)}_{s_5}Y^{(5)}_{s'_5}$. Тогда

$$s = s_5 + s'_5 = (\ell_5 + \ell'_5)(2t-1) + 2(m_5 + m'_5 + 1).$$

Далее, пусть ℓ – целая часть, а r – остаток от деления s на $2t-1$, m – целая часть от деления r на 2, p – целая часть от деления $m + \ell t$ на n. Рассмотрим отдельно два случая.

(a) Если $m_5+m'_5+1 \le t-1$, то $\ell = \ell_5+\ell'_5$, $m+\ell t = 1+n(p_5+p'_5)$. Если $n > 1$, то группа степени s тривиальна, т. е. произведение $Y^{(5)}_{s_5}Y^{(5)}_{s'_5}$ есть 0. Если $n = 1$, то $p = 1 + p_5 + p'_5$. Группа степени s имеет тип (4), если $m_5 + m'_5 + 1 = t - 1$, и тривиальна в остальных случаях.

Далее в этом пункте рассмотрим случай $n = 1$ и $m_5 + m'_5 + 1 = t - 1$. Обозначим через $B = (b_{ij})$ матрицу сдвига элемента $Y^{(5)}_{s_5}$ на степень s'_5. Эта матрица имеет вид.

Если $0 \le j < n$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} k_1 a_{(j+n+1)t-1} \dots a_{(j+n)t+1+m_5} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = j \text{ и выполнено условие } (*)_{j,1}; \\ k_2 a_{(j+1)t-1} \dots a_{jt+1+m_5} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = j+n \text{ и не выполнено условие } (*)_{j,1}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где k_1 и k_2 – некоторые элементы поля K.

Если $n \le j < n + 2n(t-1)$, то $b_{ij} = 0$.

Получаем, что $Y_{s_5}^{(5)} Y_{s_5'}^{(5)}$ есть линейная комбинация путей длины t, а такой элемент есть 0 в степени типа (4).

(б) Если $m_5 + m_5' + 1 > t - 1$, то $s = (\ell_5 + \ell_5' + 1)(2t-1) + 2(m_5 + m_5' - t + 1) + 1$, $\ell = \ell_5 + \ell_5' + 1$, $m + \ell t = 1 + n(p_5 + p_5')$. У матрицы сдвига элемента $Y_{s_5}^{(5)}$ после домножения на $Y_{s_5'}^{(5)}$ все компоненты переходят в 0, следовательно, $Y_{s_5}^{(5)} Y_{s_5'}^{(5)} = 0$.

(4) Для элементов $Y_{s_6}^{(6)}$ и $Y_{s_6'}^{(6)}$ имеем:

$s_6 = \ell_6(2t-1) + 2m_6 + 1,\ m_6 + \ell_6 t = np_6,\ \ell_6 + p_6 \,\vdots\, 2,\ \ell_6 \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

$s_6' = \ell_6'(2t-1) + 2m_6' + 1,\ m_6' + \ell_6' t = np_6',\ \ell_6' + p_6' \,\vdots\, 2,\ \ell_6' \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} K = 2$.

(а) Если $m_6 + m_6' + 1 \le t - 1$, то группа степени s нетривиальна только для случая $n = 1$, $m_6 + m_6' + 1 = t - 1$. В этом случае s – степень типа (4). Из рассмотрения сдвига $Y_{s_6}^{(6)}$ видно, что $Y_{s_6}^{(6)} Y_{s_6'}^{(6)}$ есть линейная комбинация путей длины t. Такой элемент лежит в образе для степени типа (4).

(б) Если $m_6 + m_6' + 1 > t - 1$, то группа степени s нетривиальна только в случае $n = 1$, $\operatorname{char} K = 2$. В этом случае для всех элементов матрицы сдвига $Y_{s_6}^{(6)}$ сумма длин левой и правой компонент есть $m_6 + 1$. После домножения такой матрицы на $Y_{s_6'}^{(6)}$, получим матрицу, для компонент которой сумма длин $m_6 + m_6' + 2$, что больше t. Т. о., $Y_{s_6}^{(6)} Y_{s_6'}^{(6)} = 0$.

(5) Докажем, что $Y^{(2)} Y^{(4)} = 0$ при $n = 1$. Пусть $Y_{s_2}^{(2)}$ и $Y_{s_4}^{(4)}$ – два произвольных элемента. Для их степеней имеем:

$s_2 = \ell_2(2t-1) + 2m_2,\ m_2 + \ell_2 t = p_2,\ \ell_2 + p_2 \vdots 2,\ \ell_2 \not\vdots 2$ или $s_2 = 0$ или $\operatorname{char} K = 2$;

$s_4 = \ell_4(2t-1)+2t-2,\ t-1+\ell_4 t = p_4,\ \ell_4+p_4 \not\vdots 2,\ \ell_4 \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$; $s = s_2 + s_4 = (\ell_2 + \ell_4)(2t-1) + 2(t-1+m_2)$.

(а) Если $m_2 = 0$, то сдвиг $Y_{s_2}^{(2)}$ имеет единственный ненулевой элемент b_{00}, а у матрицы элемента $Y_{s_4}^{(4)}$ нет ненулевых элементов в первой строке. Произведение таких матриц есть 0.

(б) Если $m_2 > 0$, то $s = (\ell_2 + \ell_4 + 1)(2t-1) + 2(m_2 - 1) + 1$. Сдвиг $Y_{s_2}^{(2)}$ есть матрица с единственным ненулевым элементом, у которого сумма длин левой и правой компонент $m_2 + m_4 + 1$, а это больше t. Следовательно, $Y_{s_2}^{(2)} Y_{s_4}^{(4)} = 0$, что и требовалось доказать.

(II) Рассмотрим произведения элементов, которые не равны нулю.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующим соотношением:

$$\kappa(\sigma^k(a_{(j+n)t})) = (-1)^k \kappa(\sigma^k(a_{jt}))$$

Произведение элементов типа 4 и 4

Рассмотрим два произвольных элемента $Y_{s_4}^{(4)}$ и $Y_{s_4'}^{(4)}$. Для их степеней s_4 и s_4' имеем

$s_4 = \ell_4(2t-1)+2t-2,\ t-1+\ell_4 t = np_4,\ \ell_4+p_4 \not\vdots 2,\ \ell_4 \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$;

$s_4' = \ell_4'(2t-1)+2t-2,\ t-1+\ell_4' t = np_4',\ \ell_4'+p_4' \not\vdots 2,\ \ell_4' \vdots 2$ или $\operatorname{char} K = 2$; $s = s_4 + s_4' = (\ell_4 + \ell_4' + 1)(2t-1) + 2(t-2) + 1$. Лежит в степени типа (5).

Сдвиг $Y_{s_4}^{(4)}$ на степень s_4' имеет следующий вид.

Если $0 \le j < 2n$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j+1}\kappa(\sigma^{\ell_4'}(a_{(j+t-1)t}))a_{(j+n+1)t-2}\dots a_{(j+n)t} \otimes e_{jt}, \\ \qquad i = (j)_n,\ n \text{ чётно},\ j \ge n; \\ (-1)^j a_{(j+n+1)t-2}\dots a_{(j+n+1)t-2j_1-1} \otimes a_{(j+n+1)t-2j_1-2}\dots a_{(j+n)t}, \\ \qquad\quad i = n + 2n(t-2-2j_1) + (j+n)_{2n},\ 0 \le j_1 < \frac{t-1}{2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2n \le j < 2nt$, то

$$b_{ij} = \begin{cases} -\varkappa\kappa(\sigma^{\ell_4'}(a_{(i_2+t)t}))a_{(i_2+1)t+j_2-2}\dots a_{(i_2+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1}\dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = (i_2+1)_n, \text{ и выполнено } (++); \\ \varkappa a_{(i_2+1)t+j_2-2}\dots a_{i_2t+j_2+2j_1} \otimes a_{i_2t+j_2+2j_1-1}\dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_2+2j_1) - n + i_2,\ 0 \le j_1 < \frac{t-j_2}{2}; \\ \varkappa a_{(i_2+1)t+j_2-2}\dots a_{(i_2+1)t+j_2+2j_1-1} \otimes a_{(i_2+1)t+j_2+2j_1-2}\dots a_{i_2t+j_2}, \\ \qquad i = 2n(j_2-2j_1-1) - n + (i_2+1)_{2n},\ 0 \le j_1 < \frac{j_2-1}{2}; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где

$$\varkappa = \begin{cases} (-1)^{i_2+j_2+1}\kappa(\sigma^{\ell_4+1}(a_{(i_2+t-1)t}))\kappa(\sigma^{\ell_4'}(a_{(i_2+t)t})), \quad j_2 = 1; \\ (-1)^{i_2+j_2}, \quad j_2 > 1, \end{cases}$$

а условие $(++)$ имеет вид:
- либо n нечётно и $t - j_2$ нечётно;
- либо n чётно, $t - j_2$ чётно, $i_2 < n - 1$;
- либо n чётно, $t - j_2$ чётно, $i_2 = 2n - 1$;
- либо n чётно, $t - j_2$ нечётно, $n - 1 \le i_2 < 2n - 1$.

Домножим эту матрицу на элемент $Y^{(4)}_{s_4'}$, который имеет вид $\big(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots, a_{n+2n(t-1)-1}\big)_{\mathrm{diag}}$, где

$$a_i = \begin{cases} 0, \quad i < n,\ n \text{ нечётно}; \\ (-1)^i\kappa(\sigma^{\ell_4'}(a_{(i+t-1)t}))e_{it} \otimes e_{it}, \quad i < n,\ n \text{ чётно}; \\ (-1)^{i_2+j_2+1}e_{i_2t+j_2} \otimes e_{i_2t+j_2}, \quad i \ge n. \end{cases}$$

Произведение есть следующий элемент кольца когомологий

$$C = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j w^{(t-1)}_{(j+n)t} + \sum_{j=2n}^{4n-1} \alpha_{i_2}\gamma_{i_2} w^{(t-1)}_{i_2t+j_2} - \sum_{j=4n}^{2nt-1} \gamma_{i_2} w^{(t-1)}_{i_2t+j_2},$$

где $\alpha_{i_2} = \kappa(\sigma^{\ell_4+\ell_4'+1}(a_{(i_2+t-1)t}))$,

$$\beta_j = \begin{cases} -\frac{t-1}{2}, & n \vdots 2,\ j < n; \\ -\frac{t+1}{2}, & n \vdots 2,\ j \geq n; \\ -\frac{t}{2}, & n \not\vdots 2, \end{cases},$$

$$\gamma_{i_2} = \begin{cases} \frac{t-1}{2}, & n \vdots 2,\ n-1 \leq i_2 < 2n-1; \\ \frac{t+1}{2}, & n \vdots 2,\ i_2 < n-1 \text{ или } i_2 = 2n-1; \\ \frac{t}{2}, & n \not\vdots 2. \end{cases}$$

$\widetilde{Y}^{(5)}_{s_4+s_4'}$ есть матрица вида $(0, \dots 0, b_n, \dots b_{2n-1}, b_{2n}, \dots b_{2nt-1})_{(\mathrm{diag},n)}$, где

$$b_j = \begin{cases} w^{(t-1)}_{(j+n)t} \otimes e_{jt}, & n \leq j < 2n; \\ -\alpha_{i_2} w^{(t-1)}_{i_2 t+j_2} \otimes e_{i_2 t+j_2}, & 2n \leq j < 4n,\ i_2 < n-1 \text{ или } i_2 = 2n-1; \\ w^{(t-1)}_{i_2 t+j_2} \otimes e_{i_2 t+j_2}, & 4n \leq j < 2nt,\ i_2 < n-1 \text{ или } i_2 = 2n-1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим предыдущий дифференциал степени $(\ell_4+\ell_4'+1)(2t-1)+2(t-2)$.

Если $0 \leq j < 2n$, то

$$d_{ij} = \begin{cases} -\alpha_{j-1} a_{(j+n)t+t-2} \dots a_{(j+n)t} \otimes e_{jt}, & i = (j)_n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $2n \leq j < 4n$, то

$$d_{ij} = \begin{cases} -e_{(i_2+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t} \dots a_{i_2 t+1}, & i = (i_2+1)_n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $4n \leq j < 2nt$, то

$$d_{ij} = \begin{cases} \alpha_{i_2} a_{i_2 t+j_2+t-2} \dots a_{(i_2+1)t} \otimes a_{(i_2+1)t-1} \dots a_{i_2 t+j_2}, & i = (i_2+1)_n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

У матрицы дифференциала домножим j-ю строку на α_{j-1} и сложим все строки. Получим, что в образе лежит элемент $\widetilde{Y}^{(5)} - X$, где

$X = (b'_0, \dots, b'_{n-1}, 0, \dots, 0, b'_{2n}, \dots, b'_{2nt-1})_{(\mathrm{diag}, n)}$, а

$$b'_j = \begin{cases} w^{(t-1)}_{(j+n)t} \otimes e_{jt}, \quad 0 \le j < n; \\ -\alpha_{i_2} w^{(t-1)}_{i_2 t + j_2} \otimes e_{i_2 t + j_2}, \quad 2n \le j < 4n,\ n-1 \le i_2 < 2n-1; \\ w^{(t-1)}_{i_2 t + j_2} \otimes e_{i_2 t + j_2}, \quad 4n \le j < 2nt,\ n-1 \le i_2 < 2n-1; \\ 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(а) Если n нечётно, то $Y^{(4)}_{s_4} Y^{(4)}_{s'_4} = -\frac{t}{2}(2\widetilde{Y}^{(5)}) = -t\widetilde{Y}^{(5)}$;

(б) если n чётно, то

$$Y^{(4)}_{s_4} Y^{(4)}_{s'_4} + t\widetilde{Y}^{(5)} = \sum_{j=0}^{2n-1} \beta'_j w^{(t-1)}_{(j+n)t} + \sum_{j=2n}^{4n-1} \alpha_{i_2} \gamma'_{i_2} w^{(t-1)}_{i_2 t + j_2} - \sum_{j=4n}^{2nt-1} \gamma'_{i_2} w^{(t-1)}_{i_2 t + j_2},$$

где

$$\beta'_j = \begin{cases} -\frac{t-1}{2}, \quad j < n; \\ \frac{t-1}{2}, \quad j \ge n, \end{cases}, \quad \gamma'_{i_2} = \begin{cases} \frac{t-1}{2}, \quad n-1 \le i_2 < 2n-1; \\ -\frac{t-1}{2}, \quad i_2 < n-1 \text{ или } i_2 = 2n-1. \end{cases}$$

Получаем $Y^{(4)}_{s_4} Y^{(4)}_{s'_4} = -t\widetilde{Y}^{(5)}$.

Произведения остальных элементов, кроме $Y^{(2)}_{s_2}$ в случае $n > 1$, рассматриваются аналогично. Для полной картины нам осталось доказать следующее утверждение.

Лемма 13. *Пусть $n > 1$.*

(а) *Пусть $Y^{(2)}_{s_2}$ – произвольный элемент из множества образующих такой, что $m_2 = 0$. Тогда существуют элементы $Y^{(3)}_{s_3}$ и $Y^{(6)}_{s_6}$ такие, что $Y^{(2)}_{s_2} = -Y^{(3)}_{s_3} Y^{(6)}_{s_6}$.*

(б) *Пусть $Y^{(2)}_{s_2}$ – произвольный элемент из множества образующих, у которого $m_2 > 0$. Тогда существуют элементы $Y^{(5)}_{s_5}$ и $Y^{(6)}_{s_6}$ такие, что $Y^{(2)}_{s_2} = Y^{(5)}_{s_5} Y^{(6)}_{s_6}$.*

Доказательство. Степень 1 есть степень типа 6, для любых n и t. Положим для обоих пунктов $s_6 = 1$. Рассмотрим степень

$s_2 - 1 = 2m_2 - 1 + \ell_2(2t-1)$, $m_2 + \ell_2 t = 1 + np_2$, $\ell_2 + p_2 \not\vdots\, 2$, $\ell_2 \not\vdots\, 2$ или $\mathrm{char}\, K = 2$.

(а) Если $m_2 = 0$, то $s_2 - 1 = 2t - 2 + (\ell_2 - 1)(2t-1)$. Это степень типа (3). Используя соотношения, получаем $Y^{(3)} Y^{(6)} = -Y^{(2)}$.

(б) Если $m_2 > 0$, то $s_2 - 1 = 2(m_2 - 1) + 1 + \ell_2(2t - 1)$. Это степень типа (5). Используя соотношения, получаем $Y^{(5)}Y^{(6)} = -Y^{(2)}$. $\square$

Литература

1. C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class A_n*. — Lect. Notes Math. **832** (1980), 449–520.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* I. *Серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16**, вып. 6 (2004), 53–122.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, вып. 1 (2006), 55–107.
6. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21**, вып. 2 (2009), 1–51.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19**, вып. 5 (2007), 70–123.
11. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
12. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
13. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n*. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 100–128.
14. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю-Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 4, 39–82.
15. Y. Xu, H. Xiang, *Hochschild cohomology rings of* d*-Koszul algebras.* — J. Pure Applied Algebra **215** (2011), 1–12.
16. K. Erdmann, S. Schroll, *On the Hochschild cohomology of tame Hecke algebras.* — Arch. Math. **94** (2010), 117–127.
17. N. Snashall, R. Taillefer, *The Hochschild cohomology ring of a class of special biserial algebras.* — J. Algebra Appl. **9** (2010), 73–122.

18. N. Snashall, R. Taillefer, *Hochschild cohomology of socle deformations of a class of Koszul self-injective algebras.* — Colloq. Math. **119** (2010), 79–93.
19. S. Schroll, N. Snashall, *Hochschild cohomology and support varieties for tame Hecke algebras.* — Quart. J Math. to appear.
20. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
21. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.
22. K. Erdmann, T. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*.II. — Algebras and Repr. Theory **5** (2002), 457–482.

Pustovykh M. A. Hochschild cohomology ring of Möbius algebras.

We describe the Hochschild cohomology ring of Möbius algebras in terms of generators and relations.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mashakachalova@mail.ru

Поступило 19 мая 2011 г.