Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 388, 2011 г.

А. А. Иванов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР КВАТЕРНИОННОГО ТИПА: СЕРИЯ $Q(2\mathcal{B})_1$ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 3

Введение

Пусть R – конечномерная алгебра над полем K, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – ее обертывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). Прямая сумма

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$$

относительно $\smile$-произведения, является ассоциативной K-алгеброй (см. [1, §5], [2, Гл. XI], [3]), которую называют *алгеброй когомологий Хохшильда.* Алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ градуированно коммутативная [3]; кроме того, известно (см. [4, стр. 120]), что $\smile$-произведение на $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с произведением Йонеды на Ext-алгебре $\bigoplus_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ Λ-модуля R.

Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [5]).

Данная работа продолжает цикл статей, в которых вычислена мультипликативная структура алгебры когомологий Хохшильда для алгебр кватернионного типа серии $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, a, c)$ над произвольным полем характеристики 2 (см. [6, 7]) и аддитивная структура алгебры когомологий Хохшильда над произвольным полем характеристики,

---

Ключевые слова: Когомологии Хохшильда, алгебры кватернионного типа, алгебры ручного типа представлений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00635), а также при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ, ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2010-1.1-111-128-033, госконтракт 14.740.11.0344). Кроме того, работа поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт Петербургского государственного университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраическиой K-теории”.

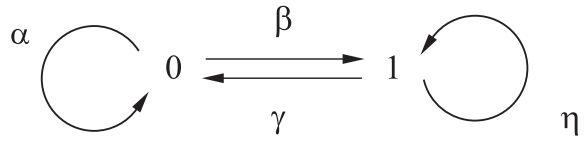
отличной от 2 (см. [8]). В настоящей работе мы, используя технику работы [9], вычисляем алгебру когомологий Хохшильда для значительной части алгебр кватернионного типа из серии $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ (в обозначениях из [5]) в случае, когда основное поле K – это алгебраически замкнутое поле характеристики три. В этом вычислении мы используем построенную ранее 4-периодическую минимальную Λ-проективную резольвенту модуля R (см. [6, 8], заметим, что здесь характеристика основного поля K может быть произвольной). В работе [10] такая резольвента описана для представителей классов производной эквивалентности алгебр кватернионного типа, за исключением некоторых алгебр с малыми параметрами. Однако для алгебр с двумя вершинами описание резольвенты из [10] содержит некоторые неточности в случае, когда параметр из основного поля $c \neq 0$. Однако в контексте данной статьи всякая рассматриваемая алгебра изоморфна некоторой алгебре из серии $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,0)$ (см. [10]), так что используемая здесь резольвента совпадает с предъявленной в [10].

Основной результат работы – теорема 1.1 – применяется к еще одной серии алгебр кватернионного типа, а именно к алгебрам серии $Q(2\mathcal{A})$ (в обозначениях [5]): из результатов [11] следует, что любая алгебра из серии $Q(2\mathcal{A})$ производно эквивалентна подходящей алгебре из серии $Q(2\mathcal{B})_1$.

§1. Формулировка основного результата

Алгебры серии $Q(2\mathcal{B})_1$ (над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики) описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{array}{l} \eta\beta = \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1},\ \ \gamma\eta = \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1},\ \ \beta\gamma = \eta^{s-1}, \\ \alpha^2 = a\gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} + c(\alpha\gamma\beta)^k,\ \ \beta\alpha^2 = 0,\ \ \alpha^2\gamma = 0, \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

где $k, s \in \mathbb{N},\ s \geq 3,\ a, c \in K,\ a \neq 0$ (композицию путей мы записываем справа налево). Алгебры этой серии обозначаем через $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$, а также более кратко через $Q(2\mathcal{B})_1$. В настоящей работе мы исследуем такие алгебры только для $k \geq 2$.

Отметим, что в случае, когда $k+s>4$, можно ограничиться рассмотрением алгебр $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$, для которых $a=1$; кроме того, если $\operatorname{char} K \neq 2$, то можно считать, что $c=0$ (см. [10]). Поскольку мы изучаем случай $k \geq 2$, далее в (1.1) полагаем $a=1$.

Через e_i, $i=0,1$, обозначим идемпотенты алгебры

$$R = Q(2\mathcal{B})_1(k,s,1,0),$$

соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда $P_{ij}=\Lambda(e_i \otimes e_j)$, $i,j \in \{0,1\}$, составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей, где $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^*\colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w. Далее в этом разделе предполагаем, что K – алгебраически замкнутое поле характеристики 3. Для описания алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(Q(2\mathcal{B})_1)$ для алгебр $Q(2\mathcal{B})_1$ мы построим несколько градуированных алгебр.

Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \{p_i\}_{i=1}^3 \cup \{u_j\}_{j=1}^2 \cup \{v_l\}_{l=0,1,3} \cup \{w_q\}_{q=0}^1 \cup \{t\}. \tag{1.2}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_1]$ введем градуировку так, что

$$\deg p_i = 0,\ \deg u_j = 1,\ \deg v_l = 2,\ \deg w_q = 3,\ \deg t = 4. \tag{1.3}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$, где идеал I_1 алгебры $K[\mathcal{X}_1]$ порожден следующими однородными элементами

$$p_ip_j \text{ для } 1 \leq i < j \leq 3;\ p_1^{k+1},\ p_2^{s+1},\ p_3^2; \tag{1.4}$$

$$p_2u_1,\ p_1^ku_1, \tag{1.5}$$

$$p_3u_2,\ p_2^su_2,\ p_1u_1 - p_1u_2;$$

$$p_1v_0,\ p_2v_0,\ p_1v_1,\ p_3v_1,\ p_2v_3,\ p_3v_3; \tag{1.6}$$

$$p_3v_0 + p_2^{s-1}v_1 - p_1^{k-1}v_3;\ u_1^2,\ u_2^2,\ u_1u_2;$$

$$p_2w_0,\ p_3w_0,\ p_3u_1v_0 - p_1^{k-1}u_1v_3,\ p_1w_0 + u_1v_3; \tag{1.7}$$

$$p_3w_1,\ p_1w_1 + u_1v_3,\ p_2w_1 - u_2v_1,\ u_1v_3 + u_2v_3,\ u_1v_1,\ u_2v_0;$$

$$v_0^2 + p_3t,\ v_3^2 + p_1^2t,\ v_1^2 + p_2^2t,\ v_0v_1,\ v_0v_3,\ v_1v_3; \tag{1.8}$$

$$u_1w_0,\ u_2w_0,\ u_1w_1,\ u_2w_1;$$

$$v_0w_0,\ v_1w_0,\ v_3w_0 - p_1u_1t, \tag{1.9}$$

$$v_0w_1,\ v_1w_1+p_2u_2t,\ v_3w_1+p_1u_1t;$$
$$w_0^2,\ w_1^2,\ w_0w_1.$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_1]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2=\big(\mathcal{X}_1\setminus\{u_2,w_1\}\big)\cup\{u_2',w_2\},\tag{1.10}$$

и на алгебре $\mathcal{K}[\mathcal{X}_2]$ введем градуировку, совпадающую с (1.3) для элементов из $\mathcal{X}_1\setminus\{u_2,w_1\}$, и такую, что $\deg u_2'=1$, $\deg w_2=3$.

Определим алгебру $\mathcal{A}_2=K[\mathcal{X}_2]/I_2$, где идеал I_2 алгебры $K[\mathcal{X}_2]$ порожден элементами из (1.4), (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), (1.9), а также элементами

$$p_1u_2',\ p_3u_2',\ p_2^{s-1}u_2';\tag{1.11}$$
$$p_2^{s-1}v_1,\ p_1^{k-1}v_3-p_3v_0,\ u_1u_2',\ (u_2')^2,\ u_1^2;$$
$$p_1w_2,\ p_3w_2,\ p_2w_2-u_2'v_1,\ u_2'v_0,\ u_2'v_3,\tag{1.12}$$
$$p_2^{s-2}u_2'v_1+p_1^{k-1}u_1v_3,\ u_1v_1;$$
$$p_2^st;\tag{1.13}$$
$$u_2'w_i,\ u_1w_i,\ \text{для}\ \ i\in\{0,2\};\tag{1.14}$$
$$v_0w_2,\ v_3w_2,\ v_1w_2+p_2u_2't;\tag{1.15}$$
$$w_0^2,\ w_2^2,\ w_0w_2.\tag{1.16}$$

В силу однородности идеала I_2 алгебра $\mathcal{A}_2$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_2]$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3=\big(\mathcal{X}_1\setminus\{u_1,u_2,w_1,w_0\}\big)\cup\{u_{12},w_{01},w_3\},\tag{1.17}$$

и на алгебре $\mathcal{K}[\mathcal{X}_3]$ введем градуировку, совпадающую с (1.3) для элементов из $\mathcal{X}_1\setminus\{u_1,u_2,w_1,w_0\}$, и такую, что $\deg u_{12}=1$, $\deg w_{01}=\deg w_3=3$.

Определим алгебру $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$, где идеал I_3 алгебры $K[\mathcal{X}_3]$ порожден элементами из (1.4), (1.6), (1.8), а также элементами

$$p_1^k u_{12}; \tag{1.18}$$
$$u_{12}^2; v_3 p_1^{k-1}, v_0 p_3 - v_1 p_2^{s-1};$$
$$u_{12} v_3, p_1 w_{01}, p_3 w_{01}, p_2 w_{01} + u_{12} v_1, p_1^{k-1} w_3 + u_{12} v_1 p_2^{s-1};$$
$$p_2 w_3,\ p_3 w_3; \tag{1.19}$$
$$p_1^k t; \tag{1.20}$$
$$u_{12} w_{01},\ u_{12} w_3;$$
$$v_0 w_3,\ v_1 w_3, \tag{1.21}$$
$$v_3 w_3 + p_1^2 u_{12} t, v_0 w_{01}, v_3 w_{01}, v_1 w_{01} - p_2 u_{12} t;\ w_{01}^2, w_3^2, w_{01} w_3.$$

В силу однородности идеала I_3 алгебра $\mathcal{A}_3$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_3]$.

Рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_4 = \{p_1, p_2, p_3, u_2', u_3, u_4, v_0, v_1, v_3, w_2, w_3, w_4, t\} \tag{1.22}$$

и на алгебре $\mathcal{K}[\mathcal{X}_4]$ введем градуировку, такую, что

$$\deg p_i = 0\ (i = 1, 2, 3), \deg u_2' = \deg u_3 = \deg u_4 = 1,$$
$$\deg v_0 = \deg v_1 = \deg v_3 = 2,\ \deg w_2 = \deg w_3 = \deg w_4 = 3,\ \deg t = 4.$$

Определим алгебру $\mathcal{A}_4 = K[\mathcal{X}_4]/I_4$, где идеал I_4 алгебры $K[\mathcal{X}_4]$ порожден элементами из (1.4), (1.11), (1.6), (1.12), (1.19), (1.8), (1.13),(1.20), (1.15), (1.21), а также элементами

$$p_2 u_3, p_3 u_3, p_1^{k-1} u_3, p_i u_4 \ \text{ для } \ 1 \le i \le 3;\ (u_2')^2, u_3^2, u_4^2, u_2' u_3, u_2' u_4, u_3 u_4;$$
$$v_0 p_3,\ v_3 p_1^{k-1},\ v_1 p_2^{s-1}, \tag{1.23}$$
$$u_3 v_0, u_3 v_1, u_3 v_3 - p_1 w_3, u_4 v_1, u_4 v_3, u_4 v_0 - p_3 w_4, p_1 w_4, p_2 w_4, p_3 w_4 + p_2^{s-1} w_2,$$
$$w_3 p_1^{k-1} + w_2 p_2^{s-1};\ u_2' w_i, u_3 w_i, u_4 w_i, \text{ где } \ 2 \le i \le 4;$$
$$v_0 w_4, v_1 w_4, v_3 w_4, v_3 w_3 - p_1 u_3 t;\ w_2^2, w_3^2, w_4^2, w_2 w_3, w_2 w_4, w_3 w_4.$$

В силу однородности идеала I_4 алгебра $\mathcal{A}_4$ наследует градуировку с алгебры $K[\mathcal{X}_4]$.

Теорема 1.1. *Пусть K – алгебраически замкнутое поле характеристики 3, и пусть $R = Q(2\mathcal{B})_1(k, s, 1, 0)$, где $k \ge 2$.*

1) *Если k и s кратны 3, то алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}_1$.*

2) *Если k кратно 3, а s не кратно 3, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ *как градуированные K-алгебры.*

3) *Если k не кратно 3, а s кратно 3, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3$ *как градуированные K-алгебры.*

4) *Если k и s не кратны 3, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_4$ *как градуированные K-алгебры.*

§2. Образующие и соотношения

Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента, описанная в [6], [8], [10]. Пусть

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\big)$$

– комплекс (3.2) из [8]. Любой n-коцикл $f \in Z^n(R) = \mathrm{Ker}\,\delta^n$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_i\colon Q_{n+i} \to Q_i\}_{i\geq 0}$. Гомоморфизм φ_i назовем *i-ой трансляцией* коцикла f и будем обозначать через $\mathrm{T}^i(f)$. Для коциклов $f \in \mathrm{Ker}\,\delta^n$ и $g \in \mathrm{Ker}\,\delta^t$ имеем

$$\mathrm{cl}\, g \cdot \mathrm{cl}\, f = \mathrm{cl}\,(\mu \mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f)).$$

В дальнейшем мы, используя прямые разложения модулей Q_i, будем описывать трансляции коциклов, а также их произведения с помощью матриц, соответствующих этим разложениям. Отметим также, что ввиду градуированной коммутативности алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для вычисления попарных произведений различных однородных элементов из $\mathrm{HH}^*(R)$ нам достаточно для элемента степени i знать его трансляции до i-го порядка включительно.

Замечание 2.0.1. Напомним, что в [5, IX.1.2] предъявлен базис $Z(R) = \mathrm{HH}^0(R)$, а в [6, 3.0.1] установлена размерность $B^1(R)$. В разделе 2.1 работы [6] были введены следующие обозначения: $a = \alpha\beta\gamma$, $b = \beta\alpha\gamma$, $g = \gamma\beta\alpha$. Далее, в обозначениях [6, 3.0.2] над полем характеристики не 2 имеется равенство $a^k = \frac{1}{2}(p_1^k - p_2^s)$.

2.1. k и s кратны 3. В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k и s кратны 3.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{aligned}
&\text{– степени 1 :} && u_1 := [\alpha, 0, 0, 0],\ u_2 := [0, -\beta, 0, \eta]; \\
&\text{– степени 2 :} && \left.\begin{aligned} v_0 &:= [e_0, 0, 0, 0],\ v_1 := [0, 0, 0, e_1], \\ v_3 &:= [\gamma\beta, -\beta\alpha, -\alpha\gamma, 0]; \end{aligned}\right\} \qquad (2.1) \\
&\text{– степени 3 :} && w_0 := [e_0, 0], w_1 := [0, e_1]; \qquad (2.2) \\
&\text{– степени 4 :} && t := [e_0, e_1].
\end{aligned}$$

Напомним, что ранее мы выделили элементы из $\mathrm{HH}^0(R)$: p_1, p_2, p_3 (см. [6, 3.0.2]).

Предложение 2.1.1. *Пусть k и s кратны 3. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_i\}_{i=1}^3 \cup \{u_1, u_2\} \cup \{v_0, v_1, v_3\} \cup \{w_0, w_1, t\} \qquad (2.3)$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются следующие соотношения:

$$p_i p_j = 0 \ \text{для}\ 1 \le i < j \le 3;\ p_1^{k+1} = p_2^{s+1} = p_3^2 = 0; \qquad (2.4)$$

$$p_2 u_1 = p_1^k u_1 = 0, \qquad (2.5)$$

$$p_3 u_2 = p_2^s u_2 = 0,\ p_1 u_1 = p_1 u_2; \qquad (2.6)$$

$$p_1 v_0 = p_2 v_0 = p_1 v_1 = p_3 v_1 = p_2 v_3 = p_3 v_3 = 0, \qquad (2.7)$$

$$p_3 v_0 = p_1^{k-1} v_3 - p_2^{s-1} v_1;\ u_1^2 = u_2^2 = u_1 u_2 = 0,$$

$$p_2 w_0 = p_3 w_0 = 0,\ p_1^{k-1} u_1 v_3 = p_3 u_1 v_0,\ p_1 w_0 = -u_1 v_3, \qquad (2.8)$$

$$p_3 w_1 = 0,\ p_1 w_1 = -u_1 v_3,\ p_2 w_1 = u_2 v_1,\ u_1 v_3 = -u_2 v_3,\ u_1 v_1 = u_2 v_0 = 0,$$

$$u_1 w_0 = u_2 w_0 = u_1 w_1 = u_2 w_1 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} v_0^2 = -p_3 t,\ v_1^2 = -p_2^2 t,\ v_3^2 = -p_1^2 t, \\ v_0 v_1 = v_0 v_3 = v_1 v_3 = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

$$v_0 w_0 = v_1 w_0 = 0,\ v_3 w_0 = p_1 u_1 t, \qquad (2.10)$$

$$v_0 w_1 = 0,\ v_1 w_1 = -p_2 u_2 t,\ v_3 w_1 = -p_1 u_1 t,$$

$$w_0^2 = w_1^2 = w_0 w_1 = 0.$$

Доказательство. Для доказательства большинства соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень. Ввиду 4-периодичности резольвенты из [6],[8],[10] для элемента t в качестве трансляций $\mathrm{T}^i(t)$ можно взять тождественные отображения соответствующих модулей. □

Лемма 2.1.2. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$ положительной степени можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_1) = \begin{pmatrix} (\mathrm{T}^1(u_1))_{*1} & (\mathrm{T}^1(u_1))_{*2} & (\mathrm{T}^1(u_1))_{*3} & (\mathrm{T}^1(u_1))_{*4} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^1(u_1)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*1} = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^{i-1} \otimes a^{k-i} \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i g^{i-1} \otimes \beta a^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*2} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes g^{k-i-1} \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i b^i \otimes \alpha g^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{*3} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i a^i \otimes \gamma b^{k-i-1} \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i-1} \otimes b^{k-i} \\ 0 \end{pmatrix}, \ (\mathrm{T}^1(u_1))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2) = \begin{pmatrix} (\mathrm{T}^1(u_2))_{*1} & (\mathrm{T}^1(u_2))_{*2} & (\mathrm{T}^1(u_2))_{*3} & (\mathrm{T}^1(u_2))_{*4} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^1(u_2)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{*1} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-2} \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes a^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta a^{k-i-1} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes g^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+2)b^i \otimes \alpha g^{k-i-1} - \eta \otimes e_0 \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-2} \\ e_1 \otimes \beta \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{*3} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)a^i \otimes \gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-2} \\ -\sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)\alpha g^i \otimes b^{k-i-1} + e_1 \otimes \eta \\ -\gamma \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \otimes e_1 \\ -\sum\limits_{i=2}^{s-1}(i-1)\eta^{i-1} \otimes \eta^{s-i-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(v_0) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{T}^1(v_0) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_0) = \begin{pmatrix} (\mathrm{T}^2(v_0))_{*1} & (\mathrm{T}^2(v_0))_{*2} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^2(v_0)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^2(v_0))_{*1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i} + \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1} \otimes g^{k-i} \\ 0 \\ 0 \\ -\gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_0))_{*2} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},\ \mathrm{T}^1(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_1) = \begin{pmatrix} (\mathrm{T}^2(v_1))_{*1} & (\mathrm{T}^2(v_1))_{*2} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^2(v_1)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^2(v_1))_{*1} = \begin{pmatrix} -a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1} - a^k \otimes \gamma\beta a^{k-2} - \gamma\beta a^{k-2} \otimes g^k \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} \alpha\gamma b^{i-1} \otimes a^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} g^{i-1} \otimes \beta\alpha g^{k-i} + \alpha g^{k-1} \otimes \beta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_1))_{*2} = \begin{pmatrix} -\beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} \\ \beta\alpha g^{k-1} \otimes e_1 \\ -\eta \otimes \eta \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta\alpha\otimes e_0 & -e_0\otimes\alpha\gamma & 0 \\ \gamma\otimes\beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(v_3) = \begin{pmatrix} \gamma\beta\otimes e_0 + e_0\otimes\gamma\beta & \beta\otimes\gamma \\ \gamma\otimes\alpha & 0 \\ -\alpha\otimes\beta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma\otimes\gamma\beta\alpha & \beta\alpha\gamma\otimes\gamma \\ \alpha\gamma\beta\otimes\beta & -\beta\alpha\otimes\eta^{s-1} \\ -\alpha\gamma\otimes\beta\alpha g^{k-1} - \alpha\gamma b^{k-1}\otimes\beta\alpha & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e_1\otimes e_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^1(w_1) = \begin{pmatrix} \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^{i-1}\otimes\gamma b^{k-i} \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i b^{i-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-i} \\ \star & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1}\otimes b^{k-i} \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{s-1} i\eta^i\otimes\eta^{s-i-1} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^1(w_1))_{11} &= \sum_{i=1}^{k-1} i a^i\otimes\gamma\beta a^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i\otimes g^{k-i-1} \\ &\quad + \alpha^2\otimes e_0 + \alpha\otimes\alpha + e_0\otimes\alpha^2, \\ (\mathrm{T}^1(w_1))_{21} &= \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i-1}\otimes a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-i-1}, \\ (\mathrm{T}^1(w_1))_{31} &= -\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i\otimes\beta a^{k-i-1} - \sum_{i=1}^{k}(i+1)g^{i-1}\otimes\beta\alpha g^{k-i},\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^2(w_1) = \begin{pmatrix} \star & \beta\otimes\alpha & \alpha\otimes\gamma & 0 \\ 0 & -\eta^{s-2}\otimes a^{k-1}\alpha & -\gamma\otimes\gamma & \eta\otimes\gamma \\ 0 & -\beta\otimes\beta & \star & 0 \\ 0 & e_1\otimes\beta\alpha g^{k-1} & 0 & -\eta^2\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{11} = \alpha\otimes\alpha - e_0\otimes\alpha^2, \ (\mathrm{T}^2(w_1))_{33} = \alpha g^{k-1}\otimes\eta^{s-2} + e_0\otimes\eta^{s-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w_1) = \begin{pmatrix}(\mathrm{T}^3(w_1))_{*1} & (\mathrm{T}^3(w_1))_{*2} & (\mathrm{T}^3(w_1))_{*3} & (\mathrm{T}^3(w_1))_{*4}\end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^3(w_1)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{*1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)g^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^{i-1} \otimes a^{k-i} \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \beta a^{k-i-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{*2} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^{i-1} \otimes \alpha g^{k-i} - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(i+1)\beta\alpha g^{i-1} \otimes g^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} + \eta \otimes \beta \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{*3} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k-2}(i+1)\alpha g^i \otimes \gamma b^{k-i-1} - \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} - \alpha \otimes \gamma b^{k-1} + e_0 \otimes \alpha\gamma b^{k-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes b^{k-i-1} + \gamma\eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{*4} = \begin{pmatrix} \beta \otimes \gamma \\ \sum\limits_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-i-1} + e_1 \otimes \eta^{s-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(w_0) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^1(w_0) \quad = \begin{pmatrix} \star & \sum\limits_{i=1}^{k}(i+1)\beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i} \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k}(i-1)b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i} \\ \star & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1} \otimes b^{k-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_0))_{11} = \sum_{i=1}^{k}(i+1)a^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k}(i+1)\gamma\beta a^{i-1} \otimes g^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_0))_{21} = \sum_{i=1}^{k}(i-1)\alpha\gamma b^{i-2} \otimes a^{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k}(i-1)\gamma b^{i-1} \otimes \alpha g^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_0))_{31} = -\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i-1} \otimes \beta a^{k-i} - \sum_{i=1}^{k} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-1},$$

$$\mathrm{T}^2(w_0) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha^2 + \alpha \otimes \alpha + \alpha^2 \otimes e_0 & 0 & 0 & -\beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(w_0) = \big((\mathrm{T}^3(w_0))_{*1} \quad (\mathrm{T}^3(w_0))_{*2} \quad (\mathrm{T}^3(w_0))_{*3} \quad (\mathrm{T}^3(w_0))_{*4}\big),$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^3(w_0)$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^3(w_0))_{*1} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+2)g^i \otimes \gamma\beta a^{k-i-1} + \sum\limits_{i=1}^{k}(i+1)\gamma\beta a^{i-1} \otimes a^{k-i} \\ -\sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+2)\gamma b^i \otimes \beta a^{k-i-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_0))_{*2} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=2}^{k}(i+2)\beta a^{i-1} \otimes \alpha g^{k-i} - \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1} \otimes g^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_0))_{*3} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k-2}(i+1)\alpha g^i \otimes \gamma b^{k-i-1} - \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} - \alpha \otimes \gamma b^{k-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i \otimes b^{k-i-1} + \alpha\gamma \otimes b^{k-1} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{*4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы 2.1.2 состоит в прямой проверке соотношений $\mu\mathrm{T}^0(r) = r$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(r) = \mathrm{T}^{i-1}(r)d_{i+\deg r}$ $(0 < i \leq \deg r)$ для $r \in \mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$ с $\deg r > 0$, и это предоставляется проделать читателю. □

Замечание 2.1.3. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций элементов v_0, v_1, v_3 остаются справедливыми для любых значений k и s; кроме того, формулы для трансляций элементов u_1, w_0 справедливы для любых s (при k кратном 3).

Продолжение доказательства предложения 2.1.1**.** Все соотношения доказываются прямыми вычислениями с использованием леммы 2.1.2. □

Предложение 2.1.4. *Пусть k и s кратны* 3. *Множество $\mathcal{Y}_1$, указанное в* (2.3), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает K-подалгебру в $\mathrm{HH}^*(R)$, порожденную множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Поскольку умножение на t задает изоморфизм $\mathrm{HH}^i(R) \to \mathrm{HH}^{i+4}(R)$ $(i \geq 0)$, то достаточно доказать, что $\mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$ для $i \leq 3$.

Ввиду замечания 2.0.1 и [6, 3.0.2] имеем $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в [8] (см. (3.19)–(3.23), (3.32)), по

модулю кограниц (см. [8], (3.4)–(3.5)) справедливы соотношения

$$[\alpha g^i, 0, 0, 0] = p_1^i u_1 \text{ для } 1 \le i \le k-1, \tag{2.11}$$

$$[0, 0, 0, \eta^i] = p_2^{i-1} u_2 \text{ для } 3 \le i \le s,$$

$$[a^k, 0, 0, 0] = p_3 u_1, \tag{2.12}$$

$$[0, 0, \alpha\gamma b^{k-1}, \eta^2] = p_2 u_2,$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Для базисных элементов $\mathrm{HH}^2(R)$ (см. [8], (3.35)–(3.42)) по модулю кограниц (см. [8], (3.24)–(3.27) и (3.31)) имеются соотношения:

$$[\gamma\beta a^i, -\beta\alpha g^i, -\alpha\gamma b^i, 0] = p_1^i v_3 \text{ для } 0 \le i \le k-1, \tag{2.13}$$

$$[e_0, 0, 0, 0] = v_0, \tag{2.14}$$

$$[0, 0, 0, \eta^i] = p_2^i v_1 \text{ для } 0 \le i \le s-1. \tag{2.15}$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$. Необходимо отметить, что в [8] в формуле (3.36) допущены опечатки: потеряны знаки, следует читать

$$[\gamma\beta a^{k-1}, -\beta\alpha g^{k-1}, -\alpha\gamma b^{k-1}, 0].$$

Аналогично предыдущему из предложения 3.3.1 (б) и части 3.4 статьи [8] следует, что базис пространства $\mathrm{HH}^3(R)$ состоит из следующих элементов, для которых с точностью до когомологичности выполнены равенства:

$$[a^i, 0] = p_1^{i-1} u_1 v_3 \text{ для } 1 \le i \le k; \tag{2.16}$$

$$[0, \eta^i] = p_2^{i-1} u_2 v_1 \text{ для } 1 \le i \le s-1;$$

$$[\alpha, 0] = u_1 v_0, \tag{2.17}$$

$$[e_0, 0] = w_0, \tag{2.18}$$

$$[0, e_1] = w_1,$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_1$ из (1.2), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. раздел 1). (Ненулевые) образы мономов из $K[\mathcal{X}_1]$ относительно канонического эпиморфизма $K[\mathcal{X}_1] \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ записывается в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Из предложений 2.1.1

и 2.1.4 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (2.3)); заметим, что, не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{m\geq 0} \mathcal{A}_1^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть 1) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 2.1.5. *Для любого* $n \geq 0$ $\dim_K \mathcal{A}_1^n = \dim_K \mathrm{HH}^n(R)$.

Прежде чем переходить к доказательству этого предложения, заметим, что из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$ непосредственно вытекают следующие соотношения.

Лемма 2.1.6. *В алгебре* $\mathcal{A}_1$ *выполняются соотношения:*

$$p_2^s v_1 = p_1^k v_3 = 0,\ p_3 u_1 v_0 = -p_2^{s-1} u_2 v_1.$$

Доказательство предложения 2.1.5. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$, где $\mathcal{X}_1$ из (1.2), введем лексикографический порядок такой, что

$$w_0 > w_1 > u_2 > v_0 > v_1 > v_3 > u_1 > t > p_3 > p_1 > p_2.$$

Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$ следует, что любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_1$ приводится к виду

$$f = w_0^{\alpha_0} w_1^{\alpha_1} u_2^{\beta_2} v_0^{\gamma_0} v_1^{\gamma_1} v_3^{\gamma_3} u_1^{\beta_1} t^m p_3^{\varepsilon_3} p_1^j p_2^l, \tag{2.19}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_3, \varepsilon_3 \in \{0,1\}$, а также $0 \leq j \leq k$, $0 \leq l \leq s$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Назовем *редукцией* элемента $x = \sum_{r=1}^t \lambda_r f_r \in \mathcal{A}_1$, где $\lambda_r \in K \setminus \{0\}$, а f_r – мономы, процесс замены некоторых подмономов, входящих в f_r $(r = 1, \ldots, t)$, на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($x \mapsto y$ означает замену каждого вхождения монома x на элемент y):

$$\left.\begin{array}{ll}
w_0 v_3 \mapsto p_1 u_1, & p_1 w_0 \mapsto p_1 w_1 \mapsto -u_1 v_3, \\
u_2 v_1 p_2^{s-1} \mapsto -p_3 u_1 v_0 \mapsto -p_1^{k-1} u_1 v_3, & p_2 w_1 \mapsto u_2 v_1 \\
v_1 w_1 \mapsto -p_2 u_2 t, & v_3 w_1 \mapsto -p_1 u_1 t, \\
u_2 p_1 \mapsto p_1 u_1, & u_2 v_3 \mapsto v_3 u_1, \\
v_0^2 \mapsto -p_3 t, & v_1^2 \mapsto -p_2^2 t, \\
v_3^2 \mapsto -p_1^2 t, & p_1^k \mapsto p_2^s.
\end{array}\right\} \tag{2.20}$$

Любую замену из приведенного выше списка назовем *элементарным шагом редукции.* Заметим, что некоторые шаги из этого списка

соответствуют соотношениям, указанным в лемме 2.1.6. Так как после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в строго меньший относительно введенного лексикографического порядка, то за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $x \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет *нормальную форму*, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1$ (см. раздел 1 и лемму 2.1.6), то любой элемент $x \in \mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geq q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geq \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{2.21}$$

Мы докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

степень	нормальные формы	количество
$4m$	$t^m p_1^i (0 \leq i \leq k), t^m p_2^i (1 \leq i \leq s),$ $t^m p_3$	$k+s+2$
$4m+1$	$u_2 t^m p_2^i (0 \leq i \leq s-1),$ $u_1 t^m p_1^i (0 \leq i \leq k-1), u_1 t^m p_3$	$k+s+1$
$4m+2$	$v_0 t^m, v_3 t^m p_1^i (0 \leq i \leq k-1),$ $v_1 t^m p_2^i (0 \leq i \leq s-1),$	$k+s+1$
$4m+3$	$w_1 t^m, w_0 t^m, u_2 v_1 t^m p_2^i (0 \leq i \leq s-2),$ $v_3 u_1 t^m p_1^i (0 \leq i \leq k-1), v_0 u_1 t^m$	$k+s+2$

Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму.

Пусть f – некоторый ненулевой моном вида (2.19), имеющий нормальную форму. Заметим сразу, что из 2.1.1 и (2.20) следует, что все образующие кроме p_1 и p_2 входят в (2.19) не более чем в первой степени. Рассмотрим теперь последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_0. Тогда из соотношений из 2.1.1 следует, что в f не входят $w_1, u_2, v_1, v_0, u_1, p_2, p_3$; кроме того, с помощью анализа списка элементарных шагов редукции (2.20) заключаем, что в f не входят v_3, p_1. Тогда $f = w_0 t^m$.

2) Предположим, что w_0 не входит в f, но входит w_1. Тогда с помощью анализа списка элементарных шагов редукции (2.20) заключаем, что в f не входят v_1, v_3, v_2, p_1, p_2; кроме того, ввиду соотношений, из 2.1.1, в f не входят u_2, v_0, u_1, p_3. Тогда $f = w_1 t^m$.

3) Предположим, что w_0, w_1 не входят в f, но входит u_2. Тогда в f не входят v_3, p_1 (ввиду подходящих редукций из (2.20)), а также v_0, u_1, p_3 (ввиду некоторых соотношений из 2.1.1). Следовательно,

$$f = u_2 v_1^{\gamma_1} t^m p_2^l;$$

при этом $l \leq s-1$ (ввиду (2.6)). Кроме того, если $\gamma_1 = 1$, то (ввиду редукции $p_2^{s-1} u_2 v_1 \mapsto p_1^{k-1} v_3 u_1$) $l \leq s-2$. Отсюда непосредственно получаем, что f содержится в списке:

$$u_2 t^m p_2^l \ (0 \leq l \leq s-1), u_2 v_1 t^m p_2^l \ (0 \leq l \leq s-2).$$

4) Пусть в f не входят w_0, w_1, u_2, и предположим, что v_0 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в f не могут входить также v_1, v_3, p_1, p_2 и p_3. Следовательно, f равно либо $v_0 t^m$, либо $v_0 u_1 t^m$.

5) Пусть в f не входят w_0, w_1, u_2, v_0, и предположим, что v_1 входит в f. Аналогично, получаем, что в f не могут входить v_3, u_1, p_1, p_3. Следовательно, $f = v_1 t^m p_2^l$; где $l \leq s-1$ (по 2.1.6).

6) Предположим, что w_0, w_1, u_2, v_0, v_1 не входят, а v_3 входит в f. Легко видеть, что тогда в f не входят p_2, p_3, и, таким образом, $f = v_3 u_1 t^m p_1^j$ или $f = v_3 t^m p_1^j$; здесь $j \leq k-1$ (по 2.1.6).

7) Пусть $w_0, w_1, u_2, v_0, v_1, v_3$ не входят, а u_1 входит в f. Тогда в f не входит p_2. Поэтому f совпадает с одним из мономов из списка

$$u_1 t^m p_1^i, \ u_1 t^m p_3;$$

где $i \leq k-1$, вследствие соотношения (2.5).

8) Наконец, если в f не входят $w_0, w_1, u_2, v_0, v_1, v_3, u_1$, то ясно, что f совпадает с одним из мономов:

$$t^m p_1^j, \text{ где } 0 \leq j \leq k; \ t^m p_2^l, \text{ где } 1 \leq l \leq s; \ t^m p_3.$$

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведенном выше списке, что с учётом теоремы 2.2 из [8] завершает доказательство равенства (2.21). □

2.2. k **кратно 3,** s **не кратно 3.** В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k кратно 3, а s не кратно 3.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

– степени 0 : p_1, p_2, p_3 из [6, 3.0.2];

– степени 1 : $u_1 := [\alpha, 0, 0, 0]$, $u_2' := [0, 0, -(s-1)\alpha\gamma b^{k-1}, \eta^2]$;

– степени 2 : v_0, v_1, v_3 из (2.1);

– степени 3 : w_0 из (2.2), $w_2 := [0, \eta]$;

– степени 4 : $t := [e_0, e_1]$.

Предложение 2.2.1. *Пусть k кратно 3, s не кратно 3. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2 = \{p_i\}_{i=1}^3 \cup \{u_1, u_2'\} \cup \{v_0, v_1, v_3\} \cup \{w_0, w_2, t\} \tag{2.22}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (2.4), (2.5), (2.7), (2.8), (2.9), (2.10), *а также следующие соотношения*:

$$p_1 u_2' = p_3 u_2' = p_2^{s-1} u_2' = 0; \tag{2.23}$$

$$p_2^{s-1} v_1 = 0,\ p_1^{k-1} v_3 = p_3 v_0,\ u_1 u_2' = (u_2')^2 = u_1^2 = 0; \tag{2.24}$$

$$p_1 w_2 = p_3 w_2 = 0,\ p_2 w_2 = u_2' v_1,\ u_2' v_0 = u_2' v_3 = 0, \tag{2.25}$$

$$u_1 v_1 = 0,\ p_2^{s-2} u_2' v_1 = -p_1^{k-1} u_1 v_3,$$

$$p_2^s t = 0; \tag{2.26}$$

$$u_1 w_i = u_2' w_i = 0 \ \text{ для } \ i \in \{0, 2\};$$

$$v_0 w_2 = v_3 w_2 = 0,\ v_1 w_2 = -p_2 u_2' t, \tag{2.27}$$

$$w_0^2 = w_2^2 = w_0 w_2 = 0.$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений проводится аналогично доказательству предложения 2.1.1. При этом мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_2$, для которых они не были вычислены ранее (см. лемму 2.1.2 и замечание 2.1.3). Все детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю. □

Лемма 2.2.2. *В качестве трансляций элементов u_1, u_2', w_2 можно взять следующие отображения*:

$$\mathrm{T}^0(u_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(s-1)\alpha\gamma b^{k-1}\otimes e_1 & \eta^2\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (s-1)e_0\otimes\eta^2 & 0 \\ -(s-1)\gamma\otimes\beta a^{k-1} & 0 & -(s-1)\gamma\otimes\eta & -\sum\limits_{i=2}^{s-1}(i-1)\eta^i\otimes\eta^{s-i-1} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_1) = \begin{pmatrix} \star & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i\otimes g^{k-i-1} & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i\otimes\gamma b^{k-i-1} & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^{i-1}\otimes a^{k-i} & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i\otimes\alpha g^{k-i-1} & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i-1}\otimes\alpha\gamma b^{k-i-1} & 0 \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^{i-1}\otimes\beta a^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i-1}\otimes\beta\alpha g^{k-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i-1}\otimes b^{k-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{11} = \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha + \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^{i-1}\otimes\gamma\beta a^{k-i-1},$$

$$\mathrm{T}^0(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta\otimes e_1 \end{pmatrix}, \mathrm{T}^1(w_2) = \begin{pmatrix} -a^{k-1}\otimes a^k & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha g^{k-1}\otimes\beta\alpha g^{k-1} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{s}(i+1)\eta^i\otimes\eta^{s-i} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0\otimes b^k - a^{k-1}\alpha\otimes\eta^{s-1} & \beta\alpha g^{k-1}\otimes\eta \\ 0 & \eta\otimes\beta\alpha g^{k-1} & 0 & -\eta\otimes\eta^2 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{22} = -e_1\otimes a^k + (s+1)(\eta^s\otimes e_0 + \eta^{s-1}\otimes\alpha g^{k-1});$$

$$\mathrm{T}^3(w_2) = \begin{pmatrix} \gamma\beta a^{k-1}\otimes\alpha g^{k-1} + g^k\otimes g^{k-1} & 0 & \alpha g^{k-1}\otimes\gamma\eta & 0 \\ -\gamma b^{k-1}\otimes\beta\alpha g^{k-1} & -\eta\otimes\beta\alpha g^{k-1} & -\alpha\gamma b^{k-1}\otimes\eta & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{24} = e_1\otimes\eta^s + \eta^s\otimes e_1 + \sum_{i=1}^{s} i\eta^i\otimes\eta^{s-i} - \sum_{i=1}^{s-1}\eta^i\otimes\eta^{s-i};$$

Предложение 2.2.3. *Пусть k кратно 3, а s не кратно 3. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в (2.22), порождает $\mathrm{HH}^*(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.1.4. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_2$ из (1.10), а I_2 – соответствующий идеал соотношений. Аналогично случаю k и s кратных 3, часть 2) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 2.2.4. *Для любого $m \geq 0$* $\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R)$.

Доказательство. Сначала отметим некоторое дополнительное соотношение, выполняющееся в алгебре $\mathcal{A}_2$.

Лемма 2.2.5. *В алгебре $\mathcal{A}_2$ выполняется соотношение: $p_1^k v_3 = 0$.* □

На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$, где $\mathcal{X}_2$ из (1.10), введем лексикографический порядок такой, что $w_2 > w_0 > v_0 > v_1 > v_3 > u_1 > u_2' > t > p_3 > p_1 > p_2$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству предложения 2.1.5. □

2.3. k не кратно 3, s кратно 3. В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k не кратно 3, а s кратно 3.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{aligned}
&- \text{степени } 0: && p_1, p_2, p_3 \text{ из } [6,\ 3.0.2]; \\
&- \text{степени } 1: && u_{12} := [\alpha, -\beta, 0, \eta]; && (2.28)\\
&- \text{степени } 2: && v_0,\ v_1,\ v_3 \text{ из } (2.1); \\
&- \text{степени } 3: && w_{01} = [e_0, -e_1],\ w_3 = [\gamma\beta\alpha, 0]; && (2.29)\\
&- \text{степени } 4: && t := [e_0, e_1].
\end{aligned}$$

Предложение 2.3.1. *Пусть k не кратно 3, s кратно 3. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3 = \{p_i\}_{i=1}^3 \cup \{u_{12}\} \cup \{v_0,\ v_1,\ v_3\} \cup \{w_{01}, w_3, t\} \tag{2.30}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются соотношения (2.4), (2.7), (2.9), а также следующие соотношения:

$$p_1^k u_{12} = p_2^s u_{12} = 0;$$
$$p_2^{s-1} v_1 = p_3 v_0,\ p_1^{k-1} v_3 = 0, \tag{2.31}$$
$$u_{12}^2 = 0;\ p_1 w_{01} = p_3 w_{01} = 0,\ p_2 w_{01} = -u_{12} v_1,\ u_{12} v_3 = 0,$$
$$p_2 w_3 = p_3 w_3 = 0, \tag{2.32}$$
$$p_1^{k-1} w_3 = -p_2^{s-1} u_{12} v_1,$$
$$p_1^k t = 0; \tag{2.33}$$
$$u_{12} w_{01} = u_{12} w_3 = 0;\ v_0 w_{01} = v_3 w_{01} = 0,\ v_1 w_{01} = p_2 u_{12} t,$$
$$v_0 w_3 = v_1 w_3 = 0, \tag{2.34}$$
$$v_3 w_3 = -p_1^2 u_{12} t;\ w_{01}^2 = w_3^2 = w_{01} w_3 = 0.$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений проводится аналогично доказательству предложения 2.1.1. При этом мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_3$, для которых они не были вычислены ранее (см. леммы 2.1.2, 2.2.2). Все детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю.

Лемма 2.3.2. *В качестве трансляций элементов u_{12}, w_{01}, w_3 можно взять следующие отображения*:

$$\mathrm{T}^0(u_{12}) = \begin{pmatrix} \alpha \otimes e_0 & -\beta \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_{12}) = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & \sum\limits_{i=1}^{k} b^{i-1}\beta\otimes g^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k} a^{i-1}\otimes\gamma b^{k-i} & 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\gamma\otimes a^{k-i-1} & \eta\otimes e_0 & 0 & 0 \\ -\sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\beta a^{k-i-1} & 0 & e_0\otimes\eta & \beta\otimes e_1 \\ 0 & 0 & -\gamma\otimes e_1 & -\sum\limits_{i=1}^{s-2} i\eta^i\otimes\eta^{s-i-2} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_{01}) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 \\ 0 & -e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_{01}) = \begin{pmatrix} \star & \sum\limits_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i} \\ -\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha\gamma b^{i-1} \otimes a^{k-i} - \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma b^{i-1} \otimes \alpha g^{k-i} & -\sum\limits_{i=1}^{k} b^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i} \\ 0 & 0 \\ 0 & -\sum\limits_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-i-1} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_{01}))_{11} = \sum_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i} + \sum_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1} \otimes g^{k-i} + \alpha^2 \otimes e_0 + \alpha \otimes \alpha + e_0 \otimes \alpha^2;$$

$$\mathrm{T}^2(w_{01}) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes \alpha^2 - \alpha^2 \otimes e_0 & \beta \otimes \alpha & \alpha \otimes \gamma & -\beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} \\ 0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha g^{k-1} \otimes \eta^{s-2} & -\eta\beta \otimes e_1 \\ \gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1} & -e_1 \otimes \beta\alpha g^{k-1} & 0 & \eta \otimes \eta \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_{01}))_{22} = \beta\gamma \otimes e_0 + \eta^{s-2} \otimes \alpha g^{k-1},$$

$$\mathrm{T}^3(w_{01}) = \begin{pmatrix} (\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*1} & (\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*2} & (\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*3} & (\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*4} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы $\mathrm{T}^3(w_{01})$ *описываются следующим образом:*

$$(\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*1} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k} g^{i-1} \otimes \gamma\beta a^{k-i} - \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1} \otimes a^{k-i} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \gamma b^{i-1} \otimes \beta a^{k-i} \end{pmatrix}, (\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*2} = \begin{pmatrix} \eta\beta \otimes e_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*3} = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha g^{i-1} \otimes \gamma b^{k-i} - \sum\limits_{i=1}^{k-1} a^i \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha\gamma b^{i-1} \otimes b^{k-i} \end{pmatrix},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_{01}))_{*4} = \begin{pmatrix} \beta \otimes \gamma \\ -\sum\limits_{i=1}^{s-1} i\eta^i \otimes \eta^{s-i-1} - \sum\limits_{i=1}^{s} \eta^{i-1} \otimes \eta^{s-i} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma\otimes\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{T}^1(w_3) \quad = \begin{pmatrix} \star & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i\otimes\gamma b^{k-i} \\ \star & -\sum\limits_{i=1}^{k} ib^i\otimes\alpha\gamma b^{k-i} \\ \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^i\otimes b^{k-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{11} = -\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i\otimes g^{k-i} - \sum_{i=1}^{k-1} ia^{i+1}\otimes\gamma\beta a^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{21} = -\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-i} - \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i\otimes a^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{31} = \sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1}\otimes\beta\alpha g^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i+1}\otimes\beta a^{k-i-1};$$

$$\mathrm{T}^2(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta\alpha\gamma\otimes\gamma\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(w_3) = \begin{pmatrix} \star & \star & \star & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i\otimes\beta a^{k-i} & -\sum\limits_{i=1}^{k} ib^i\otimes\beta\alpha g^{k-i} & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i\otimes b^{k-i} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_3))_{11} = -\sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i\otimes a^{k-i} - \sum_{i=1}^{k-1} ig^{i+1}\otimes\gamma\beta a^{k-i-1},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_3))_{12} = \sum_{i=1}^{k-1} i\beta a^i\otimes\alpha g^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^i\otimes g^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_3))_{13} = \sum_{i=1}^{k-1} ia^{i+1}\otimes\alpha\gamma b^{k-i-1} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^{i+1}\otimes\gamma b^{k-i-1}.$$

□

Предложение 2.3.3. *Пусть k не кратно 3, а s кратно 3. Множество $\mathcal{Y}_3$, указанное в (2.30), порождает $\mathrm{HH}^*(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.1.4.

Необходимо отметить, что в [8] в предпоследней фразе имеется опечатка в описании элемента, образ которого образует базис пространства кограниц, следует читать: образ $[e_0, e_1]$ образует базис B^4. □

Пусть $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_3$ из (1.17), а I_3 – соответствующий идеал соотношений. Снова часть 3) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 2.3.4. *Для любого $m \geq 0$* $\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R)$.

Доказательство. Сначала отметим некоторые дополнительные соотношения, выполняющиеся в алгебре $\mathcal{A}_3$. Заметим, что эти соотношения выполняются и в алгебре $\mathcal{A}_4$ и пригодятся в дальнейшем.

Лемма 2.3.5. *В алгебрах $\mathcal{A}_3$ и $\mathcal{A}_4$ выполняются соотношения: $p_2^s v_1 = 0$, $p_1^k w_3 = 0$.* □

На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$, где $\mathcal{X}_3$ из (1.17), введем лексикографический порядок такой, что $w_3 > w_{01} > v_0 > v_1 > v_3 > u_{12} > t > p_3 > p_1 > p_2$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству предложения 2.1.5.

□

2.4. k и s не кратны 3. В этом разделе мы предполагаем, если не оговорено противное, что k и s не кратны 3.

Рассмотрим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{aligned}
&\text{– степени } 1: && u_2' \text{ из (2.2)},\ u_3 := [\alpha g, 0, 0, 0],\ u_4 := [a^k, 0, 0, 0];\\
&\text{– степени } 2: && v_0,\ v_1,\ v_3 \text{ из (2.1)};\\
&\text{– степени } 3: && w_2 \text{ из (2.2)},\ w_3 \text{ из (2.29)},\ w_4 := [\alpha, 0];\\
&\text{– степени } 4: && t := [e_0, e_1].
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Напомним, что ранее мы выделили элементы из $\mathrm{HH}^0(R)$: p_1, p_2, p_3 (см. [6, 3.0.2]).

Предложение 2.4.1. *Пусть k и s не кратны 3. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_4 = \{p_i\}_{i=1}^3 \cup \{u_2', u_3, u_4, v_0, v_1, v_3, w_2, w_3, w_4, t\} \tag{2.36}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (2.4), (2.23), (2.7), (2.25), (2.32), (2.9), (2.26),(2.33), (2.27), (2.34), *а также следующие соотношения*:

$$p_2u_3 = p_3u_3 = p_1^{k-1}u_3 = 0,\ u_4p_i = 0 \ \text{ для } 1 \le i \le 3;$$
$$(u_2')^2 = u_3^2 = u_4^2 = 0,\ u_2'u_3 = u_2'u_4 = u_3u_4 = 0,\ p_3v_0 = p_1^{k-1}v_3 = p_2^{s-1}v_1 = 0;$$
$$p_1w_4 = p_2w_4 = 0,\ p_2^{s-1}w_2 = -p_1^{k-1}w_3 = -p_3w_4 = -u_4v_0,\ p_1w_3 = u_3v_3,$$
$$u_4v_1 = u_4v_3 = u_3v_0 = u_3v_1 = 0;\quad u_2'w_i = u_3w_i = u_4w_i = 0 \ \text{ для } 2 \le i \le 4;$$
$$v_0w_4 = v_1w_4 = v_3w_4 = 0,\ v_3w_3 = p_1u_3t;\ w_i^2 = w_iw_j = 0 \ \text{ для } 2 \le i < j \le 4.$$

Доказательство. Проверка приведенных выше соотношений проводится аналогично доказательству предложения 2.1.1. При этом мы используем следующую лемму, в которой приведены трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_4$, для которых они не были вычислены ранее (см. леммы 2.1.2, 2.2.2 и 2.3.2). Все детали соответствующих вычислений мы оставляем читателю.

Лемма 2.4.2. *В качестве трансляций элементов* u_3, u_4, w_4 *можно взять следующие отображения*:

$$\mathrm{T}^0(u_3) = \begin{pmatrix} \alpha g \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_3) = \begin{pmatrix} \star & -\sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^{i+1} \otimes g^{k-i-1} & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^{i+1} \otimes \gamma b^{k-i-1} & 0 \\ -\sum\limits_{i=1}^{k-2} i\gamma b^{i+1} \otimes a^{k-i-1} & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^{i+1} \otimes \alpha g^{k-i-1} & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^{i} \otimes \alpha\gamma b^{k-i-1} & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k-1} ig^{i+1} \otimes \beta a^{k-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^{i} \otimes \beta\alpha g^{k-i-1} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\alpha g^{i} \otimes b^{k-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_3))_{11} = -\alpha g \otimes e_0 - \sum_{i=1}^{k-2} i\gamma\beta a^{i+1} \otimes \gamma\beta a^{k-i-2},$$

$$\mathrm{T}^0(u_4) = \begin{pmatrix} a^k \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{T}^1(u_4) = \begin{pmatrix} a^k \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^k \otimes b^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(w_4) = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_o & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{T}^1(w_4) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} a^{i-1} \otimes a^{k-i+1} - \sum\limits_{i=1}^{k} g^i \otimes g^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k} \beta a^{i-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-i} \\ \gamma b^{k-1} \otimes \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(w_4) = \begin{pmatrix} a^k\otimes e_0+e_0\otimes g^k-\sum\limits_{i=1}^{k-1} a^i\otimes g^{k-i} & 0 & -\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1}\otimes\gamma b^{k-i} & \eta\beta\otimes\gamma b^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma\eta\otimes\beta a^{k-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(w_4) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{k} g^{i-1}\otimes g^{k-i+1}+\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma\beta a^{i-1}\otimes\alpha g^{k-i} & -\beta a^{k-1}\otimes\gamma\beta a^{k-1} & \gamma\beta a^{k-1}\otimes\gamma b^{k-1} & 0 \\ -\sum\limits_{i=1}^{k} \gamma b^{i-1}\otimes\beta\alpha g^{k-i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Предложение 2.4.3. *Пусть k и s не кратны* 3. *Множество $\mathcal{Y}_4$, указанное в* (2.36), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.1.4. □

Пусть $\mathcal{A}_4 = K[\mathcal{X}_4]/I_4$ – градуированная K-алгебра, определенная в разделе 1, где $\mathcal{X}_4$ из (1.22), а I_4 – соответствующий идеал соотношений. И, наконец, часть 4) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 2.4.4. *Для любого $m \geq 0$* $\dim_K \mathcal{A}_4^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R)$.

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_4]$ введем лексикографический порядок такой, что $u_4 > w_4 > w_2 > v_0 > v_1 > v_3 > u_2' > w_3 > u_3 > t > p_3 > p_1 > p_2$. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству предложения 2.1.5. □

Литература

1. S. Eilenberg and S. MacLane, *Cohomology theory in abstract groups*, I. — Ann. Math. **48** (1947), 51–78.
2. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра.* М. (1960).
3. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math. **78** (1963), 267–288.
4. M. Gerstenhaber and S. D. Schack, *Algebraic cohomology and deformation theory.* — In: Deformation theory of algebras and structures and applications, eds. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber, Kluwer Acad. Publ., NATO ASI Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci. **247** (1988), 11–264.
5. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lecture Notes in Math. **1428** Berlin, Heidelberg (1990).
6. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134,

7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
8. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия* $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ *в характеристике не* 2. — Вестник СПбГУ, Серия 1, Выпуск 1, 2010, 63–72.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. —- Алгебра и анализ **16**, вып. 6 (2004), 53–122.
10. K. Erdmann and A. Skowroński, *The stable Calabi–Yau dimension of tame symmetric algebras.* — J. Math. Soc. Japan **58**, No. 1 (2006), 97–128.
11. Th. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type.* — J. Algebra **211** (1999), 159–205.

Ivanov A. A. Hochschild cohomology of algebras of quaternion type. The family $Q(2\mathcal{B})_1$ in characteristic 3.

In the present paper, the Hochschild cohomology is investigated for algebras of quaternion type from the family $Q(2\mathcal{B})_1$ over an algebraically closed field of characteristic 3. Using previously constructed 4-periodic bimodule resolution, we describe Hochschild cohomology algebra of the above algebras in terms of generators and relations.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.a.ivanov.spb@gmail.com

Поступило 30 мая 2011 г.