Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 388, 2011 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ГРУППОВОГО КОЛЬЦА ПОЛУДИЭДРАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Введение

Пусть K – коммутативное кольцо с единицей, R – ассоциативная K-алгебра, являющаяся конечно порождённым проективным K-модулем, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). На абелевой группе

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$$

вводится структура ассоциативной алгебры с использованием $\smile$-произведения [1, §5]; [2, Гл. XI]; [3]; эту алгебру называют *алгеброй когомологий Хохшильда.*

В последние годы возрос интерес к исследованию структуры алгебры когомологий Хохшильда, и особенно заметный прогресс отмечен в решении этой задачи для конечномерных алгебр над полями. В [4] было получено описание алгебры когомологий Хохшильда для групповой алгебры симметрической группы S_3 над полем $\mathbb{F}_3$, а также для групповой алгебры знакопеременной группы A_4 и для групповых алгебр диэдральных 2-групп над полем $\mathbb{F}_2$. В [5] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для случая, когда R – полуцепная QF-алгебра. В работе автора [6] алгебра когомологий Хохшильда описана для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [7]).

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, полудиэдральная группа, целочисленное групповое кольцо.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00635. Кроме того, работы автора поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории”.

В последующем подход из [6] был применён к некоторым сериям алгебр кватернионного типа, а именно, в [8] алгебра когомологий Хохшильда была вычислена для одной из серий локальных алгебр кватернионного типа, а в [9, 10] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для серии $Q(2\mathcal{B})_1$ над основным полем характеристики 2. Этот же подход был использован для вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр Лю–Шульца (см. [11]), а также для целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[D_{4m}]$ "чётных" диэдральных групп (т.е. порядка $4m$) [12]. Отметим, что независимое описание алгебры $\mathrm{HH}^*(\mathbb{Z}[D_{2m}])$ для всех диэдральных групп получил Хайями в [13], где использованы методы работы [4]; этими же методами Хайями вычислил алгебру когомологий Хохшильда для целочисленного группового кольца обобщённой группы кватернионов (см. [14, 15]).

Имеются также частичные результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, полученные для групповых блоков ручного типа представления, имеющих один или три простых модуля [16], для так называемой алгебры Мёбиуса (см. [17, 18]), а также для алгебр кватернионного типа из серии $Q(2\mathcal{B})_1$ над основным полем характеристики, отличной от 2 [19].

В настоящей работе мы описываем группы когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(\mathbb{Z}[SD_{2^k}])$ для группового кольца $\mathbb{Z}[SD_{2^k}]$ полудиэдральной группы порядка 2^k. Аналогично работе [6] в соответствующих вычислениях используется бимодульная резольвента алгебры $\mathbb{Z}[SD_{2^k}]$. Однако в отличие, например, от статьи [12] мы сначала находим обычную проективную (=свободную) резольвенту тривиального SD_{2^k}-модуля $\mathbb{Z}$, при этом используются приёмы работы [6], когда опираясь на некоторые эмпирические наблюдения, выдвигается гипотеза о строении проективных резольвент тех или иных модулей, и после обоснования такой гипотезы резольвенты используются для вычисления соответствующих алгебр когомологий [1]. Затем с помощью одного результата из [20] получаем и указанную бимодульную резольвенту. Отметим, что найденная резольвента SD_{2^k}-модуля $\mathbb{Z}$ значительно проще той резольвенты, которую можно было бы получить методами работы [21].[2]

[1]Автор выражает благодарность Д. Б. Романовой, принявшей участие в обсуждении предварительных вариантов соответствующей гипотезы.

[2]На завершающей стадии работы над рукописью статьи автор узнал, что полное описание алгебры Хохшильда кольца $\mathbb{Z}[SD_{2^k}]$ получено в [22].

§1. Резольвенты

Полудиэдральная группа SD_{2^k} порядка 2^k, $k \geq 4$, может быть задана как полупрямое произведение циклической группы $C_{2^{k-1}}$ порядка 2^{k-1} на циклическую группу C_2:

$$SD_{2^k} = C_{2^{k-1}} \rtimes C_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^{2^{k-1}} = 1, aba = b^{2^{k-2}-1} \rangle. \tag{1.1}$$

Любой элемент группы SD_{2^k} однозначно представляется одним из следующих "слов" (в "алфавите" $\{a, b\}$):

$$b^i,\ ab^i\ (0 \leq i \leq 2^{k-1} - 1).$$

Такое представление элементов группы SD_{2^k} будем называть *стандартным.* Для элемента x групповой алгебры $\mathbb{Z}[G]$, где $G = SD_{2^k}$, представление в виде $x = \sum_{g \in G} x_g g$, где $x_g \in \mathbb{Z}$, а все элементы $g \in G$ имеют стандартное представление, назовём *каноническим разложением.*

Пусть $G = SD_{2^k}$, $R = R_k = \mathbb{Z}[G]$. Рассмотрим следующие элементы алгебры R:

$$\zeta_1 = b^{2^{k-3}+1} - 1,\ \ \zeta_2 = \sum_{i=0}^{2^{k-3}} b^i - a \cdot \sum_{i=0}^{2^{k-3}-2} b^i, \tag{1.2}$$

$$\rho = \left(b^{2^{k-3}+1} - 1\right)\left(b^{2^{k-3}-1} - 1\right), \tag{1.3}$$

$$\tau = (a+1)\left(b^{2^{k-3}-1} - 1\right),\ \ s = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} b^i.$$

В категории (левых) R-модулей построим следующий бикомплекс, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$
\mathcal{B}_{\bullet\bullet}:\quad
\begin{tikzcd}
 & & & & & \cdots \arrow[d, "s"'] & \\
 & & & R \arrow[d, "b-1"'] & R \arrow[l, "\zeta_2"'] \arrow[d, "\zeta_1"'] & R \arrow[l, "-\tau"'] \arrow[d, "\rho"'] & \cdots \arrow[l, "-(a-1)"'] \\
 & & & R \arrow[d, "s"'] & R \arrow[l, "a-1"'] \arrow[d, "s"'] & R \arrow[l, "a+1"'] \arrow[d, "s"'] & \cdots \arrow[l, "a-1"'] \\
R \arrow[d, "b-1"'] & R \arrow[l, "\zeta_2"'] \arrow[d, "\zeta_1"'] & R \arrow[l, "-\tau"'] & R \arrow[d, "\rho"'] & R \arrow[l, "-(a-1)"'] \arrow[d, "\rho"'] & R \arrow[l, "-(a+1)"'] \arrow[d, "\rho"'] & \cdots \arrow[l, "-(a-1)"'] \\
R & R \arrow[l, "a-1"'] & R \arrow[l, "a+1"'] & R & R \arrow[l, "a-1"'] & R \arrow[l, "a+1"'] & R \arrow[l, "a-1"'] & \cdots
\end{tikzcd}
\tag{1.4}
$$

(здесь гомоморфизм умножения справа $x^*\colon R \to R$ на элемент $x \in R$ мы обозначаем просто через x).

Теорема 1.1. *Тотализация* $T_\bullet = (T_n, d_n) = \mathrm{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* (1.4) *представляет собой свободную резольвенту тривиального* G-*модуля* $\mathbb{Z}$.

Замечание 1.2. Непосредственная проверка показывает, что диаграмма (1.4) действительно представляет собой бикомплекс, т.е. её строки и столбцы являются дифференциальными последовательностями, а все квадраты антикоммутативны.

Замечание 1.3. Отметим, что $\varepsilon\colon T_0 = R \to \mathbb{Z}$ – это обычное пополняющее отображение, и тогда точность соответствующей последовательности в члене T_0 – это следствие того, что фундаментальный идеал $I_G \lhd R$ порождён (как левый модуль) элементами $a-1$ и $b-1$.

Предложение 1.4. $\mathrm{Ker}\, d_0 = \mathrm{Im}\, d_1$.

Доказательство. Через h_1, h_2 обозначим столбцы матрицы дифференциала d_1:

$$
d_1 = \begin{pmatrix} a+1 & \zeta_1 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix}.
$$

В доказательстве предложения 1.4 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1.5. (а) $\operatorname{Ker} s = \operatorname{Im}(b-1)$, $\quad \operatorname{Ker}(b-1) = \operatorname{Im} s$.
(б) $\operatorname{Ker}(a-1) = \operatorname{Im}(a+1)$, $\quad \operatorname{Ker}(a+1) = \operatorname{Im}(a-1)$.

Доказательство. (а) Пусть $H = \langle b \rangle$. Используя известную 2-периодическую резольвенту для групповой алгебры $\mathbb{Z}[H]$, получаем точную последовательность

$$\mathbb{Z}[H] \xleftarrow{\cdot(b-1)} \mathbb{Z}[H] \xleftarrow{\cdot s} \mathbb{Z}[H] \xleftarrow{\cdot(b-1)} \mathbb{Z}[H].$$

Остаётся применить к ней точный функтор $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}[H]} -$.

Часть (б) доказывается аналогично. □

Лемма 1.6.

$$u := \begin{pmatrix} b^{2^{k-2}-1} - 1 \\ \sum\limits_{i=0}^{2^{k-2}-2} b^i - a \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} d_1. \tag{1.5}$$

Доказательство. Считаем, что $k > 4$, так как при $k = 4$ утверждение леммы очевидно. Введём обозначение

$$\Theta := b^{2^{k-3}-2} + \sum_{j=3\cdot 2^{k-4}}^{2^{k-2}-2} b^{2j+1}(a+1).$$

Прямыми вычислениями доказывается, что

$$\sum_{i=0}^{2^{k-2}-2} b^i - a = \Theta \cdot \zeta_2.$$

Тогда

$$w := u - \Theta \cdot h_2 = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} d_0,$$

следовательно, $w_{1,1} \cdot (a-1) = 0$. Ввиду леммы 1.5 $w_{1,1} \in \operatorname{Im}(a+1)^*$, т. е. $w \in \operatorname{Im} d_1$, и таким образом, $u \in \operatorname{Im} d_1$. □

Следующие два утверждения также доказываются прямыми вычислениями.

Лемма 1.7.

$$s = \left(\sum_{i=0}^{2^{k-3}} b^{i(2^{k-2}-1)} + a \sum_{i=0}^{2^{k-3}-2} b^i \right) \cdot \zeta_2.$$

Следствие 1.8.

$$\binom{0}{s} = -a\sum_{i=0}^{2^{k-3}} b^i \cdot (b^{2^{k-3}-1}-1)\cdot h_1 + \left(\sum_{i=0}^{2^{k-3}} b^{i(2^{k-2}-1)} + a\sum_{i=0}^{2^{k-3}-2} b^i\right)\cdot h_2.$$

Продолжим доказательство предложения 1.4. Пусть $x = (q_1, q_2)^{\mathrm{T}} \in \operatorname{Ker} d_0$. Мы будем последовательно видоизменять x, используя элементы из $\operatorname{Im} d_1$, так что после нескольких шагов таких изменений мы придём к элементу, лежащему в $\operatorname{Im} d_1$, и тем самым будет доказано включение $\operatorname{Ker} d_0 \subset \operatorname{Im} d_1$ (обратное включение следует из замечания 1.2).

Пусть

$$q_1 = \sum_{g\in G} \lambda_g g, \quad q_2 = \sum_{g\in G} \mu_g g \tag{1.6}$$

– канонические разложения (и таким образом, $\lambda_g, \mu_g \in \mathbb{Z}$). Переходя от x к

$$x - \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \lambda_{ab^i} b^{i(2^{k-2}-1)} h_1,$$

можем считать, что уже в исходном $x \in \operatorname{Ker} d_0$ имеем $\lambda_{ab^i} = 0$ для всех i. Далее, так как $q_1\cdot(a-1) + q_2\cdot(b-1) = 0$, то получаем следующие условия на коэффициенты разложений (1.6):

$$\begin{cases} -\lambda_{b^i} + \mu_{b^{i-1}} - \mu_{b^i} = 0 \\ -\lambda_{b^{i(2^{k-2}-1)}} + \mu_{ab^{i-1}} - \mu_{ab^i} = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

для всех i. Заменяя x на

$$x + \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \mu_{ab^i} b^{i(2^{k-2}-1)} \cdot u$$

(где u из (1.5)), можем считать, что в исходном x для всех i имеем $\mu_{ab^i} = 0$. Тогда из первого уравнения в (1.7) вытекает, что $\lambda_{b^i} = 0$ для всех i, а из второго уравнения в (1.7) получаем, что $\mu_{b^{i-1}} = \mu_{b^i}$ для всех i. Следовательно, x кратен вектору $(0, s)^{\mathrm{T}}$, который ввиду следствия 1.8 принадлежит $\operatorname{Im} d_1$. □

Лемма 1.9. $\operatorname{Ker}\zeta_2 = \operatorname{Im}\tau$.

Доказательство. Включение $\operatorname{Im}\tau \subset \operatorname{Ker}\zeta_2$ уже было отмечено (см. замечание 1.2). Теперь предположим, что $q = \sum_{g\in G}\lambda_g g \in \operatorname{Ker}\zeta_2$ (для $\lambda_g \in \mathbb{Z}$). Из соотношения $q\cdot\zeta_2 = 0$ следует, что

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k-3}}\lambda_{b^i}b^{i+j} = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k-3}-2}\lambda_{ab^i}b^{i(2^{k-2}-1)+j}, \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k-3}}\lambda_{ab^i}ab^{i+j} = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k-3}-2}\lambda_{b^i}ab^{i(2^{k-2}-1)+j}. \tag{1.9}$$

Равенство (1.8) можно переписать в виде

$$\sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1}\left(\sum_{j=0}^{2^{k-3}}\lambda_{b^{\ell-j}}\right)b^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{2^{k-1}-1}\left(\sum_{j=0}^{2^{k-3}-2}\lambda_{ab^{(\ell-j)(2^{k-2}-1)}}\right)b^{\ell}. \tag{1.10}$$

Суммируя коэффициенты левой части и соответственно правой части этого равенства, приходим к соотношению

$$(2^{k-3}+1)\sum_{t=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{b^t} = (2^{k-3}-1)\sum_{t=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{ab^t}. \tag{1.11}$$

Аналогично соотношение (1.9) приводит к равенству

$$(2^{k-3}+1)\sum_{t=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{ab^t} = (2^{k-3}-1)\sum_{t=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{b^t}. \tag{1.12}$$

Тогда из (1.11) и (1.12) следует, что

$$\sum_{t=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{b^t} = 0 = \sum_{t=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{ab^t}. \tag{1.13}$$

Для фиксированного $j \in \mathbb{Z}$, $1 \le j \le 2^{k-1}-1$, найдём наименьшее натуральное i такое, что $i(2^{k-3}+1) \equiv j(\mod 2^{k-1})$. Так как

$$\tau = \left(b^{2^{k-3}+1}-1\right)a + \left(b^{2^{k-3}-1}-1\right),$$

то

$$q_j := \sum_{\ell=0}^{i-1} b^{(2^{k-3}+1)\ell}\cdot\tau = (b^j-1)a + \varphi_j(b),$$

где $\varphi_j(b)$ – многочлен (с целыми коэффициентами) от b. Переходя от q к

$$q - \sum_{j=1}^{2^{k-1}-1} \lambda_{ab^{j(2^{k-2}-1)}} q_j,$$

можем считать что уже в q имеем $\lambda_{ab^t} = 0$ для $t = 1, \dots, 2^{k-1} - 1$, а тогда ввиду (1.13) и $\lambda_a = 0$. Теперь из (1.10) следует, что для любого t

$$\sum_{j=0}^{2^{k-3}} \lambda_{b^{t-1-j}} = 0 = \sum_{j=0}^{2^{k-3}} \lambda_{b^{t-j}},$$

и, следовательно, $\lambda_{b^t} = \lambda_{b^{t-(2^{k-3}+1)}}$. Так как $2^{k-3}+1$ взаимно просто с порядком b, то для любого i имеем $\lambda_{b^i} = \lambda_1$, а тогда ввиду (1.13) получаем, что $\lambda_{b^i} = 0$ для всех i. Это завершает доказательство включения $\operatorname{Ker}\zeta_2 \subset \operatorname{Im}\tau$. □

Лемма 1.10. $\operatorname{Ker}\tau = \operatorname{Im}(a-1) + \operatorname{Im} s$.

Доказательство. Включение $\operatorname{Im}(a-1) + \operatorname{Im} s \subset \operatorname{Ker}\tau$ было отмечено ранее (см. замечание 1.2).

Теперь предположим, что $q = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in \operatorname{Ker}\tau$ (для $\lambda_g \in \mathbb{Z}$). Используя подходящие кратные элемента $a-1$, можем считать, что уже в исходном q имеем $\lambda_{ab^i} = 0$ для всех i. Тогда

$$0 = q\cdot\tau = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \lambda_{b^i} \left(ab^{i(2^{k-2}-1)+(2^{k-3}-1)} - ab^{i(2^{k-2}-1)} + b^{i+(2^{k-3}-1)} - b^i \right).$$

Следовательно, $\lambda_{b^i} = \lambda_{b^{i+(2^{k-3}-1)}}$ для всех i. Так как $2^{k-3}-1$ взаимно просто с порядком b, то для всех i имеем $\lambda_1 = \lambda_{b^i}$ и, таким образом, q кратно s. □

Доказательство теоремы 1.1. Рассмотрим спектральную последовательность бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ из (1.4):

$$\mathrm{H}^v_p \mathrm{H}^h_q(\mathcal{B}_{\bullet\bullet}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_{p+q}(\operatorname{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})), \tag{1.14}$$

и докажем, что её второй лист вырождается.

Используя леммы 1.5 и 1.9, получаем, что первый лист спектральной последовательности (1.14) содержит ненулевые члены только в столбцах с чётными номерами, а именно, в столбце с номером $2l$, $l > 0$, они

составляют последовательность

$$\operatorname{Coker}\zeta_2 \xrightarrow{\overline{b-1}} \operatorname{Coker}(a-1) \xrightarrow{\overline{s}} \operatorname{Ker}\tau/\operatorname{Im}(a-1). \tag{1.15}$$

То, что $\overline{b-1}$ – мономорфизм, легко получается с помощью предложения 1.4. Сюръективность $\overline{s}$ непосредственно вытекает из леммы 1.10.

Докажем точность последовательности (1.15) в её среднем члене $\operatorname{Coker}(a-1)$. Пусть $q = \sum_{g\in G}\lambda_g g \in R$ (для $\lambda_g \in \mathbb{Z}$) таков, что $q\cdot s \in \operatorname{Im}(a-1) = \operatorname{Ker}(a+1)$. Так как q можно выбирать по модулю $\operatorname{Im}(a-1)$, то считаем, что $\lambda_{ab^i} = 0$ для всех i. Тогда из соотношения $q\cdot s(a+1) = 0$ следует, что

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{b^j}b^{i+j} = 0,$$

следовательно, $\sum_{j=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{b^j} = 0$. Отсюда вытекает, что

$$q = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}\lambda_{b^i}(b^i-1) \in \operatorname{Im}(b-1),$$

и точность последовательности (1.15) доказана.

Наконец, в столбце с номером ноль ненулевые члены составляют последовательность $\operatorname{Coker}\zeta_2 \xrightarrow{\overline{b-1}} \operatorname{Coker}(a-1)$, и ясно, что $\operatorname{Coker}\overline{b-1} \simeq \mathbb{Z}$.

Таким образом, доказано, что $T_\bullet = \operatorname{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ является R-свободной резольвентой модуля $\mathbb{Z}$. $\square$

Теперь рассмотрим следующий бикомплекс в категории Λ-модулей:

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}:\quad
\begin{tikzcd}
 & & & & \cdots \arrow[d, "\mathrm{S}"'] & \\
 & & \Lambda \arrow[d, "B^-"'] & \Lambda \arrow[l, "\mathrm{Z}_2"'] \arrow[d, "\mathrm{Z}_1"'] & \Lambda \arrow[l, "-\mathrm{T}"'] \arrow[d, "\mathrm{P}"'] & \cdots \arrow[l, "-A^-"'] \\
 & & \Lambda \arrow[d, "\mathrm{S}"'] & \Lambda \arrow[l, "A^-"'] \arrow[d, "\mathrm{S}"'] & \Lambda \arrow[l, "A^+"'] \arrow[d, "\mathrm{S}"'] & \cdots \arrow[l, "A^-"'] \\
\Lambda \arrow[d, "B^-"'] & \Lambda \arrow[l, "\mathrm{Z}_2"'] \arrow[d, "\mathrm{Z}_1"'] & \Lambda \arrow[l, "-\mathrm{T}"'] \arrow[d, "\mathrm{P}"'] & \Lambda \arrow[l, "-A^-"'] \arrow[d, "\mathrm{P}"'] & \Lambda \arrow[l, "-A^+"'] \arrow[d, "\mathrm{P}"'] & \cdots \arrow[l, "-A^-"'] \\
\Lambda & \Lambda \arrow[l, "A^-"'] & \Lambda \arrow[l, "A^+"'] & \Lambda \arrow[l, "A^-"'] & \Lambda \arrow[l, "A^+"'] & \cdots \arrow[l, "A^-"'] ;
\end{tikzcd}
\tag{1.16}$$

здесь мы применяем следующие обозначения для Λ-гомоморфизмов, используемых в описании $\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}$:

$$A^{\pm} = a \otimes a \pm 1 \otimes 1,\ \ B^- = b \otimes b^{-1} - 1 \otimes 1,$$

$$\mathrm{Z}_1 = b^{2^{k-3}+1} \otimes b^{-(2^{k-3}+1)} - 1 \otimes 1,$$

$$\mathrm{Z}_2 = \sum_{i=0}^{2^{k-3}} b^i \otimes b^{-i} - a \otimes a \cdot \sum_{i=0}^{2^{k-3}-2} b^i \otimes b^{-i},$$

$$\mathrm{P} = \left(b^{2^{k-3}+1} \otimes b^{-(2^{k-3}+1)} - 1 \otimes 1\right)\left(b^{2^{k-3}-1} \otimes b^{-(2^{k-3}-1)} - 1 \otimes 1\right),$$

$$\mathrm{T} = (a \otimes a + 1 \otimes 1)\left(b^{2^{k-3}-1} \otimes b^{-(2^{k-3}-1)} - 1 \otimes 1\right),$$

$$\mathrm{S} = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} b^i \otimes b^{-i}.$$

Из теоремы 1.1 и [20, теорема 2] вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.11. *Тотализация* $Q_\bullet = \mathrm{Tot}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* (1.16) *представляет собой свободную резольвенту* Λ*-модуля* R.

Рассмотрим бикомплекс $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых столбцов в бикомплексе $\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}$ с номерами 0 и 1 (а остальные столбцы в $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$.

Предложение 1.12. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{\imath} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0,$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение предложения вытекает непосредственно из строения бикомплекса $\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}$. □

Замечание 1.13. Из строения бикомплекса (1.16) непосредственно получаем, что в резольвенте $Q_\bullet \to R$ из следствия 1.11 n-й член является свободным Λ-модулем ранга

$$r_n = \begin{cases} 2\left[\frac{n}{4}\right] + 1, & \text{если } n \equiv 0 (\mod 4), \\ 2\left[\frac{n}{4}\right] + 2 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

§2. Группы когомологий

По-прежнему R обозначает групповую алгебру $\mathbb{Z}[G]$, где $G = SD_{2^k}$. В этом разделе мы с использованием Λ-свободной резольвенты $Q_\bullet = \mathrm{Tot}(\widetilde{\mathcal{B}}_{\bullet\bullet}) = (Q_n, d_n^Q)$ Λ-модуля R, полученной в предыдущем разделе (см. следствие 1.11), вычислим группы когомологий $\mathrm{HH}^i(R)$, $i \geq 0$. Для этого мы изучим комплекс

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \delta^n := (d_n^Q)^*\Big) \tag{2.1}$$

и вычислим его когомологии:

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R)) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R) = \mathrm{HH}^n(R),$$

а именно мы докажем основной результат этого раздела.

Теорема 2.1. *Пусть $R = \mathbb{Z}[SD_{2^k}]$. Тогда*

$$\mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{2^{k-2}+3}, & \text{если } n = 0, \\ (\mathbb{Z}_2)^{n+1} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus (\mathbb{Z}_{2^{k-1}})^{2^{k-2}+1}, & \text{если } n \equiv 0 (\mod 4), n > 0, \\ (\mathbb{Z}_2)^{n-1}, & \text{если } n \equiv 1 (\mod 4), \\ (\mathbb{Z}_2)^{n+4} \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus (\mathbb{Z}_{2^{k-1}})^{2^{k-2}-1}, & \text{если } n \equiv 2 (\mod 4), \\ (\mathbb{Z}_2)^{n-2}, & \text{если } n \equiv 3 (\mod 4). \end{cases}$$

Замечание 2.2. Мы доказываем теорему 2.1, основываясь на прямом вычислении когомологий комплекса (2.1), хотя можно было бы использовать редукцию к обычным когомологиям групп (см., например, [4, лемма 4.2]). Это связано с тем, что в следующей части работы мы предполагаем использовать явное описание базисных элементов групп $\mathrm{HH}^n(R)$ при вычислении умножений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$.

Для описания гомоморфизмов из $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ (см. обозначения из (2.1)) мы зафиксируем разложение

$$Q_n = \sum_{i+j=n} \widetilde{B}_{ij} \tag{2.2}$$

в порядке возрастания второго индекса j.

Поскольку Q_n – свободный Λ-модуль ранга r_n (см. замечание 1.13), то $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R) \simeq R^{r_n}$, а всякий Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ отождествляется с набором своих значений $\Big(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_{r_n})\Big)$, где $\{e_i\}_{1\le i\le r_n}$ – канонический базис свободного Λ-модуля Λ^{r_n}. В дальнейшем, когда в этом наборе значений f встречается подпоследовательность, состоящая из нулей, скажем, из r штук, то мы такую подпоследовательность обозначаем через O_r. Аналогично, нулевую $r \times s$-матрицу обозначаем через $\mathrm{O}_{r,s}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Отметим, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм (абелевых групп)

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)\colon\ \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

Тогда дифференциал $\delta^0\colon R \to R^2$ можно описать так: для $r \in R$

$$\delta^0(r) = \Big(A^- * r,\ \ B^- * r\Big) = (ar - ra, br - rb). \tag{2.3}$$

Пусть $Z(R)$ – центр алгебры R. Тогда из известных свойств групповых алгебр вытекает следующее утверждение (оно также может быть непосредственно выведено из анализа соотношения $\delta^0(r) = 0$ с использованием (2.3)).

Предложение 2.3. *Группа* $\mathrm{HH}^0(R) \simeq Z(R)$ *является свободным* $\mathbb{Z}$-*модулем с базисом*

$$\{b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)} \mid 0 \le i \ \le 2^{k-4} - 1\} \tag{2.4}$$

$$\cup\{b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)} \mid 2^{k-3} \le i \ \le 3 \cdot 2^{k-4} - 1\} \tag{2.5}$$

$$\cup\{b^{2i} + b^{-2i} \mid 1 \le i \le 2^{k-3} - 1\} \tag{2.6}$$

$$\cup\{1, b^{2^{k-2}}, \sum_{i=0}^{2^{k-2}-1} ab^{2i}, \sum_{i=0}^{2^{k-2}-1} ab^{2i+1}\}. \tag{2.7}$$

В частности,

$$\mathrm{HH}^0(R) \simeq \mathbb{Z}^{2^{k-2}+3}.$$

Следствие 2.4. *Группа* $\operatorname{Im}\delta^0$ *является свободным* $\mathbb{Z}$-*модулем ранга* $3(2^{k-2} - 1)$.

Доказательство. Так как $\operatorname{Im}\delta^0 \subset R^2$, то $\operatorname{Im}\delta^0$ – свободный $\mathbb{Z}$-модуль, и тогда

$$\operatorname{rk}\operatorname{Im}\delta^0 = \operatorname{rk} R - \operatorname{rk}\operatorname{Ker}\delta^0 = 3(2^{k-2} - 1).$$

□

Замечание 2.5. В связи с описанием базиса $\mathrm{HH}^0(R)$ в (2.4)–(2.6) введём следующие сокращённые обозначения для множеств индексов:

$$\mathcal{L}_1 := \{0 \le i \le 2^{k-4} - 1\} \cup \{2^{k-3} \le i \le 3 \cdot 2^{k-4} - 1\},$$
$$\mathcal{L}_2 := \{1 \le i \le 2^{k-3} - 1\}.$$

Кроме того, в связи с (2.7) будет удобно использовать сокращённое обозначение для следующего элемента групповой алгебры

$$S^{(2)} := \sum_{i=0}^{2^{k-2}-1} b^{2i}. \tag{2.8}$$

Замечание 2.6. С учётом следствия 2.4 легко проверяется, что следующее множество служит базисом $\mathbb{Z}$-модуля $\operatorname{Im}\delta^0$:

$$\left\{\left(b^{2i+1} - b^{2^{k-2}-(2i+1)}, 0\right) \mid i \in \mathcal{L}_1\right\} \cup \left\{\left(b^{2i} - b^{-2i}, 0\right) \mid i \in \mathcal{L}_2\right\}$$
$$\cup \left\{\left(ab^{i(2^{k-2}-1)} - ab^i, ab^{i+2^{k-2}-2} - ab^i\right) \mid 0 \le i \le 2^{k-1} - 3\right\}.$$

Поскольку дифференциал d_1^Q представляется (относительно прямых разложений, указанных в (2.2)) матрицей

$$d_1^Q = \begin{pmatrix} A^+ & \mathrm{Z}_1 \\ 0 & \mathrm{Z}_2 \end{pmatrix},$$

получаем, что включение $(r_1, r_2) \in \operatorname{Ker} \delta^1$ равносильно выполнимости системы следующих уравнений (над R):

$$\left.\begin{aligned} A^+ * r_1 &= 0, \\ \mathrm{Z}_1 * r_1 + \mathrm{Z}_2 * r_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

или более подробно:

$$\left.\begin{aligned} & a \cdot r_1 \cdot a + r_1 = 0, \\ & b^{2^{k-3}+1} \cdot r_1 \cdot b^{-(2^{k-3}+1)} - r_1 \\ & + \sum_{i=0}^{2^{k-3}} b^i \cdot r_2 \cdot b^{-i} - \sum_{i=0}^{2^{k-3}-2} ab^i \cdot r_2 \cdot b^{-i} a = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Предложение 2.7. $\mathrm{HH}^1(R) = 0$.

Доказательство. Пусть $(r_1, r_2) \in \operatorname{Ker} \delta^1$, и пусть

$$r_1 = \sum_{g \in G} \lambda_g g, \quad r_2 = \sum_{g \in G} \mu_g g, \tag{2.10}$$

– канонические разложения (где $\lambda_g, \mu_g \in \mathbb{Z}$). Из первого уравнения в (2.9) следует, что

$$\lambda_{b^i} + \lambda_{b^{i(2^{k-2}-1)}} = 0 \ \text{ и } \ \lambda_{ab^i} + \lambda_{ab^{i(2^{k-2}-1)}} = 0 \text{ для } 0 \le i \le 2^{k-1} - 1. \tag{2.11}$$

В частности, $\lambda_1 = \lambda_{b^{2^{k-2}}} = \lambda_a = \lambda_{ab^{2^{k-2}}} = 0$.

Поскольку элементы $\left(b^{i(2^{k-2}-1)} - b^i, 0\right) = \delta^0(b^i)$, где $i \notin \{0, 2^{k-2}\}$, лежат в $\operatorname{Im} \delta^0 \subset \operatorname{Ker} \delta^1$, то вычитая подходящую линейную комбинацию этих элементов из (r_1, r_2), можем считать, что уже для первоначальных r_1, r_2 имеем

$$\lambda_{b^i} = 0 \ \text{ для } \ 0 \le j \le 2^{k-1} - 1.$$

Из второго уравнения в (2.9) следует, что для всех i имеем

$$(2^{k-3} + 1)\mu_{b^i} - (2^{k-3} - 1)\mu_{b^{i(2^{k-2}-1)}} = 0. \tag{2.12}$$

Тогда сразу получаем, что $\mu_1 = \mu_{b^{2^{k-2}}} = 0$. Кроме того, если $i \notin \{0, 2^{k-2}\}$, то из (2.12) выделяется система из двух уравнений, которой удовлетворяют μ_{b^i} и $\mu_{b^{i(2^{k-2}-1)}}$:

$$\left.\begin{aligned}(2^{k-3}+1)\mu_{b^i} - (2^{k-3}-1)\mu_{b^{i(2^{k-2}-1)}} &= 0,\\ -(2^{k-3}-1)\mu_{b^i} + (2^{k-3}+1)\mu_{b^{i(2^{k-2}-1)}} &= 0,\end{aligned}\right\}$$

и поскольку определитель матрицы коэффициентов этой системы отличен от нуля, то получаем, что $\mu_{b^i} = 0$ для всех i.

Далее, положим

$$\xi_i := \delta^0(ab^i) = \left(ab^{i(2^{k-2}-1)} - ab^i, ab^{i+2^{k-2}-2} - ab^i\right) \in \operatorname{Im}\delta^0;$$

считаем индекс в ξ_i определённым по модулю 2^{k-1}. Для фиксированного натурального l $(1 \le l \le 2^{k-2}-1)$ найдём наименьшее положительное $j \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$j(2^{k-3}-1) \equiv l(\mod 2^{k-2}), \tag{2.13}$$

и определим

$$\theta'_j := \sum_{i=0}^{j} \xi_{i(2^{k-2}-2)} = \left(*\,,\ ab^{2l} - a\right).$$

Вычитая из (r_1, r_2) подходящую линейную комбинацию элементов θ'_j, можем считать, что уже для первоначального r_2 имеем

$$\mu_{ab^{2l}} = 0 \ \text{ для } \ l > 0.$$

Аналогично используя элементы

$$\theta''_j := \sum_{i=0}^{j} \xi_{i(2^{k-2}-2)+1} = \left(*\,,\ ab^{2l+1} - ab\right)$$

(здесь j и l по-прежнему связаны соотношением (2.13)), можем считать, что

$$\mu_{ab^{2l+1}} = 0 \ \text{ для } \ l > 0.$$

Теперь из второго уравнения в (2.9) получаем следующие соотношения:

$$\lambda_{ab^{i(2^{k-2}-2)+2}} - \lambda_{ab^{i(2^{k-2}-2)}} + \mu_a = 0 \ \text{ для } \ 1 \le i \le 2^{k-3}, \tag{2.14}$$

$$\lambda_{ab^{-i(2^{k-2}-2)+2}} - \lambda_{ab^{-i(2^{k-2}-2)}} - \mu_a = 0 \ \text{ для } \ 1 \le i \le 2^{k-3}-2, \tag{2.15}$$

$$\lambda_{ab^2} - \lambda_a = 0, \tag{2.16}$$

$$\lambda_a - \lambda_{ab^{-2}} = 0. \tag{2.17}$$

Складывая соотношения (2.14)–(2.17), получаем, что

$$\left(2^{k-3} - (2^{k-3} - 2)\right) \mu_a = 0,$$

и таким образом, $\mu_a = 0$. Тогда для любого i имеем $\lambda_{ab^{2i}} = \lambda_a$, но ввиду соотношений (2.11) отсюда следует, что $\lambda_{ab^{2i}} = 0$ для всех i. Аналогично доказывается, что $\mu_{ab} = 0$, а затем что $\lambda_{ab^{2i+1}} = 0$ для любого i.

Отсюда следует включение $\operatorname{Ker} \delta^1 \subset \operatorname{Im} \delta^0$. □

Предложение 2.8. *Свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\operatorname{Im} \delta^1$ допускает в качестве базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big(2, 0\Big),\ \Big(2b^{2^{k-2}}, 0\Big),\ \Big(0, 2\Big),\ \Big(0, 2b^{2^{k-2}}\Big); \tag{2.18}$$

$$\Big(b^{2i+1} - b^{2^{k-2}-(2i+1)}, 0\Big) \quad \text{для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.19}$$

$$\Big(b^{2i} - b^{-2i}, 0\Big) \quad \text{для } i \in \mathcal{L}_2; \tag{2.20}$$

$$\Big(ab^{i(2^{k-2}-1)} + ab^i, ab^{i-2} - ab^i\Big) \quad \text{для } 2 \le i \le 2^{k-1} - 1; \tag{2.21}$$

$$\Big(0, (2^{k-3}+1)b^i - (2^{k-3}-1)b^{i(2^{k-2}-1)}\Big)$$
$$\text{для } 1 \le i \le 2^{k-1} - 1, i \ne 2^{k-2}; \tag{2.22}$$

$$\Big(2a, -2a\Big),\ \Big(0, 4ab^{2^{k-3}-1}\Big), \tag{2.23}$$

$$\Big(2aS^{(2)}, 0\Big),\ \Big(abS^{(2)}, 2ab^{2^{k-3}-1}\Big). \tag{2.24}$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что указанное выше множество порождает свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\operatorname{Im} \delta^1$. Так как его мощность совпадает с

$$\operatorname{rk} \operatorname{Im} \delta^1 = \operatorname{rk} R^2 - \operatorname{rk} \operatorname{Ker} \delta^1 = \operatorname{rk} R^2 - \operatorname{rk} \operatorname{Im} \delta^0 = 5 \cdot 2^{k-2} + 3,$$

то получаем требуемое утверждение. □

Замечание 2.9. Для дальнейшего важно заметить, что подмножество (2.22) в указанном выше базисе $\operatorname{Im}\delta^1$ можно заменить на следующее:

$$\left\{\left(0, (2^{k-2}+1)b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)}\right) \mid i \in \mathcal{L}_1\right\} \tag{2.25}$$

$$\cup \left\{\left(0, 2^{k-1}b^{2i+1}\right) \mid i \in \mathcal{L}_1\right\} \tag{2.26}$$

$$\cup \left\{\left(0, (2^{k-2}+1)b^{2i} + b^{-2i}\right) \mid i \in \mathcal{L}_2\right\} \tag{2.27}$$

$$\cup \left\{\left(0, 2^{k-1}b^{2i}\right) \mid i \in \mathcal{L}_2\right\}. \tag{2.28}$$

Так как

$$d_2^Q = \begin{pmatrix} A^- & \mathrm{P} \\ 0 & -\mathrm{T} \end{pmatrix},$$

то условие, что $(r_1, r_2) \in \operatorname{Ker}\delta^2$, равносильно следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A^- * r_1 &= 0, \\ \mathrm{P} * r_1 - \mathrm{T} * r_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

Предложение 2.10. *Свободный $\mathbb{Z}$-модуль* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве базиса множество, состоящее из элементов* (2.19)–(2.21), *а также из следующих элементов*:

$$\left(1, 0\right),\ \left(b^{2^{k-2}}, 0\right),\ \left(0, 1\right),\ \left(0, b^{2^{k-2}}\right), \tag{2.30}$$

$$\left(a, -a\right), \left(aS^{(2)}, 0\right), \tag{2.31}$$

$$\left(0, ab^{2^{k-3}-1}\right), \left(abS^{(2)}, 0\right); \tag{2.32}$$

$$\left(0, (2^{k-2}+1)b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)}\right) \ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.33}$$

$$\left(0, b^{2i+1}\right) \ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.34}$$

$$\left(0, (2^{k-2}+1)b^{2i} + b^{-2i}\right) \ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_2; \tag{2.35}$$

$$\left(0, b^{2i}\right) \ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_2. \tag{2.36}$$

Доказательство. Пусть $x = (r_1, r_2) \in \operatorname{Ker}\delta^2$, где r_1 и r_2 представлены в виде (2.10). Тогда из первого уравнения системы (2.29) следует,

что

$$\lambda_{b^i} = \lambda_{b^{i(2^{k-2}-1)}} \text{ для } 1 \le i \le 2^{k-1}-1, i \ne 2^{k-2}, \tag{2.37}$$

$$\lambda_{ab^i} = \lambda_{ab^{i(2^{k-2}-1)}} \text{ для } 1 \le i \le 2^{k-1}-1, i \ne 2^{k-2}, \tag{2.38}$$

а из второго уравнения в (2.29) получаем соотношения

$$\begin{aligned} 2\lambda_{ab^i} - \lambda_{ab^{i+2}} - \lambda_{ab^{i-2}} - \mu_{ab^{i(2^{k-2}-1)-2}} \\ - \mu_{ab^{i-2}} + \mu_{ab^{i(2^{k-2}-1)}} + \mu_{ab^i} = 0 \text{ для } 0 \le i \le 2^{k-1}-1. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Так как элементы вида

$$\delta^1(ab^{2i}, 0) = \Big(\star\,,\ ab^{2i-2} - ab^{2i}\Big)$$

лежат в $\operatorname{Im}\delta^1$, то, используя их подходящие кратные, мы можем изменить исходный элемент x так, что в полученном элементе коэффициенты во второй компоненте при ab^{2i} равны нулю для $i = 1, 2, \ldots, 2^{k-2}-1$. Таким образом, можем считать, что уже в исходном x имеем $\mu_{ab^{2i}} = 0$ $(i = 1, \ldots, 2^{k-2}-1)$. Поскольку $(a, -a) \in \operatorname{Ker}\delta^2$, то аналогично предыдущему можем дополнительно считать, что $\mu_a = 0$. Тогда из соотношений (2.39) следует, что для любых i

$$\lambda_{ab^{2i}} - \lambda_{ab^{2i+2}} = \lambda_{ab^{2i-2}} - \lambda_{ab^{2i}}. \tag{2.40}$$

Кроме того, из (2.38) следует, что $\lambda_{ab^2} = \lambda_{ab^{-2}}$, а тогда из (2.39) (при $i = 0$) получаем равенство $2\lambda_a = 2\lambda_{ab^2}$. Следовательно, $\lambda_{ab^{2i}} = \lambda_a$ для всех i. Используя элемент

$$\Big(\sum_{i=0}^{2^{k-2}-1} ab^{2i}, 0\Big) = \Big(aS^{(2)}, 0\Big) \in \operatorname{Ker}\delta^2,$$

можем свести наши рассмотрения к случаю, когда $\lambda_{ab^{2i}} = 0$ для всех i.

Вновь используя то, что элементы вида

$$\delta^1(ab^{2i+1}, 0) = \Big(\star\,,\ ab^{2i-1} - ab^{2i+1}\Big)$$

лежат в $\operatorname{Im}\delta^1$, можем считать, что все $\mu_{ab^{2i+1}}$ равны нулю за исключением одного, например, за исключением $\mu_{ab^{2^{k-3}-1}}$. Однако $\Big(0, ab^{2^{k-3}-1}\Big)$ $\in \operatorname{Ker}\delta^2$, и мы можем считать, что все $\mu_{ab^{2i+1}}$ нулевые. Тогда из (2.39) следует, что

$$\lambda_{ab^{2i+1}} - \lambda_{ab^{2i-1}} = \lambda_{ab^{2i+3}} - \lambda_{ab^{2i+1}}.$$

Ввиду соотношений (2.38) отсюда получаем, что $\lambda_{ab^{2i+1}} = \lambda_{ab}$ для всех i. Но поскольку $\Big(abS^{(2)}, 0\Big) \in \operatorname{Ker}\delta^2$, то используя подходящее кратное этого элемента, сводим ситуацию к элементу x, для которого все $\lambda_{ab^{2i+1}}$ нулевые.

Далее, так как выполняются соотношения (2.37), а элементы

$$\delta^1(b^i, 0) = \Big(b^{i(2^{k-2}-1)} + b^i, 0\Big),$$

лежат в $\operatorname{Im}\delta^1$, то используя подходящие кратные таких элементов, сводим ситуацию к случаю, когда $\lambda_{b^i} = 0$ для $i \notin \{0, 2^{k-2}\}$. Так как $(1,0), (b^{2^{k-2}}, 0) \in \operatorname{Ker}\delta^2$, то можем считать также, что $\lambda_1 = \lambda_{b^{2^{k-2}}} = 0$. Наконец, ясно, что $\big(0, b^i\big) \in \operatorname{Ker}\delta^2$, и потому можно считать, что $\mu_{b^i} = 0$ для всех i. При этом важно заметить, что подгруппа в $\operatorname{Ker}\delta^2$, порождённая парой элементов $\Big(0, b^j\Big)$ и $\Big(0, b^{j(2^{k-2}-1)}\Big)$ при фиксированном $j \notin \{0, 2^{k-2}\}$, порождается также парой $\Big(0, b^j\Big)$ и $\Big(0, (2^{k-2}+1)b^j + b^{j(2^{k-2}-1)}\Big)$ (ср. (2.33)–(2.34) и (2.35)–(2.36)). Мы показали, что множество, указанное в формулировке предложения 2.10, порождает $\operatorname{Ker}\delta^2$, а так как его мощность совпадает с $\operatorname{rk}\operatorname{Ker}\delta^2 = \operatorname{rk}\operatorname{Im}\delta^1$, то оно образует базис $\operatorname{Ker}\delta^2$. □

Предложение 2.11. *Группа* $\mathrm{HH}^2(R)$ *порождается множеством образующих, состоящим из когомологических классов следующих элементов*

$$u_1 := \Big(1, 0\Big),\ u_1' := \Big(0, 1\Big),\ u_2 := \Big(b^{2^{k-2}}, 0\Big),\ u_2' := \Big(0, b^{2^{k-2}}\Big),$$
$$u_3 := \Big(a, -a\Big),\ u_3' := \Big(aS^{(2)}, 0\Big), u_4 := \Big(0, ab^{2^{k-3}-1}\Big),$$
$$u_5^{(i)} := \Big(0, b^{2i+1}\Big) \ \text{ для } \ i \in \mathcal{L}_1,$$
$$u_6^{(i)} := \Big(0, b^{2i}\Big) \ \text{ для } \ i \in \mathcal{L}_2,$$

подчинённых соотношениям:

$$2u_j = 2u_j' = 0 \ \text{ для } \ j \in \{1, 2, 3\};$$
$$4u_4 = 0;$$
$$2^{k-1}u_5^{(i)} = 0 \ \text{ для } \ i \in \mathcal{L}_1;$$
$$2^{k-1}u_6^{(i)} = 0 \ \text{ для } \ i \in \mathcal{L}_2.$$

При этом

$$\mathrm{HH}^2(R) \simeq \left(\mathbb{Z}_2\right)^6 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \left(\mathbb{Z}_{2^{k-1}}\right)^{2^{k-2}-1}.$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что для групп $\operatorname{Ker}\delta^2$ и $\operatorname{Im}\delta^1$ мы можем выбрать так называемые согласованные базисы: для $\operatorname{Im}\delta^1$ берём базис, состоящий из элементов, указанных в (2.19)–(2.21), (2.23), (2.24) и в (2.25)–(2.28), а для $\operatorname{Ker}\delta^2$ – базис, полученный из базиса, приведённого в предложении 2.10, заменой элемента $\left(abS^{(2)}, 0\right)$ из (2.32) на элемент $\left(abS^{(2)}, 2ab^{2^{k-3}-1}\right)$. □

Предложение 2.12. *Свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\operatorname{Im}\delta^2$ допускает в качестве базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$\left(b^{2i+1} - b^{2^{k-2}-(2i+1)}, 0\right) \quad \text{для } i \in \mathcal{L}_1, \tag{2.41}$$

$$\left(b^{2i} - b^{-2i}, 0\right) \quad \text{для } i \in \mathcal{L}_2, \tag{2.42}$$

$$\left(ab^{2^{k-2}-(2i+1)} - ab^{2i+1}\ ,\ 2ab^{2i+1} - ab^{2i-1} - ab^{2i+3}\right) \quad \text{для } 0 \le i \le 2^{k-2}-2, \tag{2.43}$$

$$\left(ab^{-2i} - ab^{2i}\ ,\ 2ab^{2i} - ab^{2i-2} - ab^{2i+2}\right) \quad \text{для } 0 \le i \le 2^{k-2}-1, i \notin \{2^{k-3}-1, 2^{k-3}\}, \tag{2.44}$$

$$\left(0, 2a - 2ab^{2^{k-2}}\right). \tag{2.45}$$

В частности, $\operatorname{rk}\operatorname{Im}\delta^2 = 3\cdot 2^{k-2} - 3$.

Доказательство. Отметим, что элементы из (2.43) и (2.44) совпадают с элементами вида $\delta^2(ab^j, 0)$ для подходящих значений j (нечётных для (2.43), чётных для (2.44)). Далее нам понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 2.13.

$$\left(0, 2a - 2ab^{2^{k-2}}\right) = \delta^2(a - ab^{2^{k-2}}, 0)$$
$$+ (2^{k-3}-2)\delta^2(a,0) + \sum_{t=1}^{2^{k-3}-2} (2^{k-3}-1-t)\delta^2(ab^{2t} + ab^{-2t}, 0).$$

Эта формула доказывается прямыми вычислениями.

Лемма 2.14. *Пусть $\mathcal{M}$ – подгруппа в $\operatorname{Im}\delta^2$, состоящая из элементов вида $\delta^2(r,0)$ для всех $r \in R$. Тогда для любого j имеем $\delta^2(0, ab^j) \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Поскольку $\delta^2(x_{2i}, ab^{2i-2} - ab^{2i}) = 0$ для некоторых $x_{2i} \in R$ (см. (2.21)), то

$$\delta^2(0, ab^{2i-2}) \equiv \delta^2(0, ab^{2i}) \pmod{\mathcal{M}}.$$

Кроме того, $\delta^2(a, -a) = 0$, и потому $\delta^2(0, a) = \delta^2(a, 0) \in \mathcal{M}$, а тогда и для любого i $\delta^2(0, ab^{2i}) \in \mathcal{M}$.

Аналогично для любых i

$$\delta^2(0, ab^{2i-1}) \equiv \delta^2(0, ab^{2i+1}) \pmod{\mathcal{M}}.$$

Но $\delta^2(0, ab^{2^{k-3}-1}) = 0$, и потому $\delta^2(0, ab^{2i+1}) \in \mathcal{M}$ для любого i. □

Продолжим доказательство предложения 2.12. Через $\mathcal{N}$ обозначим подгруппу в $\operatorname{Im}\delta^2$, порождённую элементами из (2.41)–(2.45). Так как

$$\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} \delta^2(ab^{2i}, 0) = 0,$$

то с помощью леммы 2.13 получаем, что $\delta^2(ab^{2^{k-2}-2}, 0)$ и $\delta^2(ab^{2^{k-2}}, 0)$ лежат в $\mathcal{N}$. Отсюда с помощью леммы 2.14 следует, что $\operatorname{Im}\delta^2 \subset \mathcal{N}$. □

Так как

$$d_3^Q = \begin{pmatrix} A^+ & \mathrm{P} & 0 \\ 0 & -A^- & \mathrm{S} \end{pmatrix},$$

то условие, что $(r_1, r_2) \in \operatorname{Ker}\delta^3$, равносильно следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A^+ * r_1 &= 0, \\ \mathrm{P} * r_1 - A^- * r_2 &= 0, \\ \mathrm{S} * r_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.46}$$

Пусть $x = (r_1, r_2) \in \operatorname{Ker}\delta^3$, где r_1 и r_2 представлены в виде (2.10). Тогда из первого уравнения системы (2.46) следует, что

$$\lambda_{b^i} + \lambda_{b^{i(2^{k-2}-1)}} = 0, \tag{2.47}$$

$$\lambda_{ab^i} + \lambda_{ab^{i(2^{k-2}-1)}} = 0 \tag{2.48}$$

для $0 \le i \le 2^{k-1} - 1$; в частности, имеем

$$\lambda_1 = \lambda_{b^{2^{k-2}}} = \lambda_a = \lambda_{ab^{2^{k-2}}} = 0. \tag{2.49}$$

Далее, из второго уравнения в (2.46) получаем соотношения

$$2\lambda_{ab^i} - \lambda_{ab^{i+2}} - \lambda_{ab^{i-2}} - \mu_{ab^{i(2^{k-2}-1)}} + \mu_{ab^i} = 0 \tag{2.50}$$

для $0 \le i \le 2^{k-1} - 1$. Кроме того, из третьего уравнения в (2.46) следует, что

$$\mu_{b^i} = 0 \quad \text{для} \quad 0 \le i \le 2^{k-1} - 1, \tag{2.51}$$

$$\sum_{i=0}^{2^{k-2}-1} \mu_{ab^{2i}} = 0, \quad \sum_{i=0}^{2^{k-2}-1} \mu_{ab^{2i+1}} = 0. \tag{2.52}$$

Предложение 2.15. *Группа* $\mathrm{HH}^3(R)$ *изоморфна* $\mathbb{Z}_2$ *и порождается когомологическим классом элемента*

$$v := \left(0\,,\, a - ab^{2^{k-2}}\right).$$

Доказательство. Ввиду предложения 2.12 достаточно доказать, что $\operatorname{Ker}\delta^3$ порождается множеством

$$\operatorname{Im}\delta^2 \cup \left\{\left(0\,,\, a - ab^{2^{k-2}}\right)\right\}.$$

Пусть $x = (r_1, r_2) \in \operatorname{Ker}\delta^3$, где r_1, r_2 записаны в виде (2.10). Так как элементы вида $\left(ab^{i(2^{k-2}-1)} - ab^i\ ,\ \star\right) = \delta^2(ab^i, 0)$ лежат в $\operatorname{Im}\delta^2$, то прибавляя к x подходящие кратные таких элементов, можем (с учётом соотношений (2.48)) считать, что $\lambda_{ab^i} = 0$ для всех i (см. также (2.49)). Аналогично с использованием элементов вида $\left(b^{i(2^{k-2}-1)} - b^i\ ,\ 0\right) = \delta^2(b^i, 0)$ сводим ситуацию к случаю, когда в исходном x имеем $\lambda_{b^i} = 0$ для всех i. Таким образом, мы можем считать, что $r_1 = 0$. Тогда из (2.50) следует, что

$$\mu_{ab^i} = \mu_{ab^{i(2^{k-2}-1)}}$$

для всех i, отличных от 0 и 2^{k-2}. Далее,

$$\left(0\,, ab^{-(2i+2)} + ab^{2i+2} - ab^{-2i} - ab^{2i}\right) = \delta^2(0, ab^{2i}) \in \operatorname{Im}\delta^2,$$

потому, прибавляя последовательно к x подходящие кратные таких элементов, мы сведём ситуацию к случаю, когда все коэффициенты $\mu_{ab^{2i}} = 0$ для всех i, отличных от 0 и 2^{k-2}. Тогда из (2.52) получим $\mu_a + \mu_{ab^{2^{k-2}}} = 0$. Но $\left(0\,,\, a - ab^{2^{k-2}}\right) \in \operatorname{Ker}\delta^3$, и изменяя x с помощью некоторого кратного последнего элемента, мы можем считать, что $\mu_{ab^{2i}} = 0$ для всех i. Наконец, видоизменяя x, мы можем свести

ситуацию к случаю, когда и все $\mu_{ab^{2i+1}}$ нулевые (и тогда $x=0$). Действительно, прибавляя последовательно к x подходящие кратные элементов

$$\begin{aligned}
\delta^2\Big(0\,,\,ab^{2^{k-3}-3}\Big) &= \Big(0\,,\,ab^{2^{k-3}+1}+ab^{2^{k-3}-1}-ab^{2^{k-3}+3}-ab^{2^{k-3}-3}\Big),\\
\delta^2\Big(0\,,\,ab^{2^{k-3}-5}\Big) &= \Big(0\,,\,ab^{2^{k-3}+3}+ab^{2^{k-3}-3}-ab^{2^{k-3}+5}-ab^{2^{k-3}-5}\Big),\\
&\vdots\\
\delta^2\Big(0\,,\,ab\Big) &= \Big(0\,,\,ab^{2^{k-2}-3}+ab^{3}-ab^{2^{k-2}-1}-ab\Big),
\end{aligned}$$

мы сводим ситуацию к случаям, где мы последовательно можем считать

$$\mu_{ab^{2^{k-3}-1}},\ \mu_{ab^{2^{k-3}-3}},\dots,\ \mu_{ab^3}$$

нулевыми, а тогда нулевыми являются также

$$\mu_{ab^{2^{k-3}+1}},\ \mu_{ab^{2^{k-3}+3}},\dots,\ \mu_{ab^{2^{k-2}-3}}.$$

Аналогично используя последовательно элементы

$$\delta^2\Big(0\,,\,ab^{2^{k-2}+1}\Big),\ \delta^2\Big(0\,,\,ab^{2^{k-2}+2}\Big),\dots,\delta^2\Big(0\,,\,ab^{3\cdot 2^{k-3}-3}\Big),$$

можем дополнительно считать, что $\mu_{ab^{2^{k-2}+3}},\ \dots\ ,\ \mu_{ab^{3\cdot 2^{k-3}-1}}$ равны нулю, а тогда и $\mu_{ab^{2^{k-1}-3}},\dots,\ \mu_{ab^{3\cdot 2^{k-3}+1}}$ нулевые.

Таким образом, нам осталось рассмотреть такой $x=(0,r_2)\in\operatorname{Ker}\delta^3$, что $\mu_{ab^i}=0$ для $i\notin\big\{1,\,2^{k-2}-1,\,2^{k-2}+1,\,2^{k-1}-1\big\}$. Но ввиду (2.49) получаем

$$\mu_{ab}=\mu_{ab^{2^{k-2}-1}}\,,\ \mu_{ab^{2^{k-2}+1}}=\mu_{ab^{2^{k-1}-1}}\,,$$

и тогда ввиду (2.52) имеем $2\mu_{ab}+2\mu_{ab^{2^{k-1}-1}}=0$. Отсюда следует, что $r_2=\mu_{ab}\cdot\delta^2\Big(0\,,\,ab^{2^{k-1}-1}\Big)$, и это завершает доказательство включения

$$\operatorname{Ker}\delta^3\subset\operatorname{Im}\delta^2+\mathbb{Z}\cdot\Big(0\,,\,a-ab^{2^{k-2}}\Big).$$

Обратное включение очевидно. $\square$

Рассмотрим следующие элементы из $\mathbb{Z}^3$:

$$\Big(1, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}_2\Big); \tag{2.53}$$

$$\Big(a, a - ab^2, 0\Big),\ \Big(ab^{2^{k-2}}, ab^{2^{k-2}} - ab^{2^{k-2}+2}, 0\Big); \tag{2.54}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, 1\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2, b^{2^{k-2}}\Big); \tag{2.55}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, aS^{(2)}\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2, abS^{(2)}\Big); \tag{2.56}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)}\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.57}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, b^{2i} + b^{-2i}\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_2. \tag{2.58}$$

Предложение 2.16. *Группа* $\operatorname{Ker}\delta^4$ *порождается множеством*

$$\operatorname{Im}\delta^3 \cup \mathcal{Y},$$

где $\mathcal{Y}$ *состоит из элементов, описанных в* (2.53)–(2.58).

Доказательство. Через $\mathcal{M}$ обозначим подгруппу в $\operatorname{Ker}\delta^4$, порождённую множеством $\operatorname{Im}\delta^3 \cup \mathcal{Y}$. Пусть $x = (r_1, r_2, r_3) \in \operatorname{Ker}\delta^4$, и пусть

$$r_1 = \sum_{g\in G} \lambda_g g, \quad r_2 = \sum_{g\in G} \mu_g g, \quad r_3 = \sum_{g\in G} \nu_g g$$

– канонические разложения, где $\lambda_g, \mu_g, \nu_g \in \mathbb{Z}$. Поскольку

$$d_4^Q = \begin{pmatrix} A^- & \mathrm{P} & 0 & 0 \\ 0 & -A^+ & \mathrm{S} & 0 \\ 0 & 0 & A^- & B^- \end{pmatrix},$$

то условие, что $(r_1, r_2, r_3) \in \operatorname{Ker}\delta^4$, равносильно следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A^- * r_1 &= 0, \\ \mathrm{P} * r_1 - A^+ * r_2 &= 0, \\ \mathrm{S} * r_2 + A^- * r_3 &= 0, \\ B^- * r_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.59}$$

Из первого уравнения системы (2.59) следуют соотношения (2.37). Из второго уравнения системы (2.59) получаем:

$$\mu_{b^i} + \mu_{b^{i(2^{k-2}-1)}} = 0 \text{ для } 1 \le i \le 2^{k-1} - 1, i \ne 2^{k-2}, \tag{2.60}$$

$$\mu_1 = 0 = \mu_{b^{2^{k-2}}}, \tag{2.61}$$

$$2\lambda_{ab^i} - \lambda_{ab^{i+2}} - \lambda_{ab^{i-2}} - \mu_{ab^{i(2^{k-2}-1)}} - \mu_{ab^i} = 0 \text{ для всех } i. \tag{2.62}$$

Третье уравнение в (2.59) приводит к следующим условиям:

$$2^{k-1} \cdot \mu_{b^i} + \nu_{b^{i(2^{k-2}-1)}} - \nu_{b^i} = 0 \text{ для } 1 \le i \le 2^{k-1} - 1, i \ne 2^{k-2}; \tag{2.63}$$

$$2 \sum_{j=0}^{2^{k-2}-1} \mu_{ab^{2j+1}} + \nu_{ab^{2^{k-2}-(2i+1)}} - \nu_{ab^{2i+1}} = 0 \text{ для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.64}$$

$$2 \sum_{j=0}^{2^{k-2}-1} \mu_{ab^{2j}} + \nu_{ab^{-2i}} - \nu_{ab^{2i}} = 0 \text{ для } i \in \mathcal{L}_2. \tag{2.65}$$

Используя подходящие кратные элементов

$$\left(b^i + b^{i(2^{k-2}-1)}, 0, 0\right) = \delta^3(b^i, 0),$$

а также элементов $\left(1, \mathrm{O}_2\right)$, $\left(b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}_2\right)$ (см. (2.53)), ввиду соотношений (2.37) можем считать, что $\lambda_{b^i} = 0$ для всех i. Аналогично с использованием элементов вида

$$\left(ab^i + ab^{i(2^{k-2}-1)}, \star\right) = \delta^3(ab^i, 0),$$

а также элементов из (2.54), можем считать, что в первоначальном x имеем $\lambda_{ab^i} = 0$ для всех i, т.е. можем предположить, что r_1.

В этом случае из соотношений (2.62) следует, что для всех i

$$\mu_{ab^{i(2^{k-2}-1)}} + \mu_{ab^i} = 0; \tag{2.66}$$

в частности, $\mu_a = 0 = \mu_{ab^{2^{k-2}}}$. Так как для любого $i \notin \{0, 2^{k-2}\}$ имеем

$$\left(0, ab^{2i} - ab^{-2i}, 0\right) = \delta^3(0, ab^{2i} - a) \in \mathcal{M},$$

то ввиду соотношений (2.66) можем считать, что $\mu_{ab^{2i}} = 0$ для всех i. Аналогично доказывается, что мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда для всех i имеем $\mu_{ab^{2i+1}} = 0$. Поскольку

$$\left(0, b^i - b^{i(2^{k-2}-1)}, 2^{k-1}b^i\right) = \delta^3(0, b^i) \in \mathcal{M},$$

то с учетом соотношений (2.60) и (2.61) можем считать, что для всех i имеем $\mu_{b^i} = 0$, т.е. можем предположить, что в первоначальном x также $r_2 = 0$. Но тогда из предложения 2.3 следует, что любой элемент вида $x = (0, 0, r_3)$ из $\operatorname{Ker}\delta^4$ лежит в подгруппе, порождённой элементами из (2.55)–(2.58). Отсюда следует, что $\operatorname{Ker}\delta^4 \subset \mathcal{M}$. $\square$

Предложение 2.17.

$$\mathrm{HH}^4(R) \simeq \Big(\mathbb{Z}_2\Big)^5 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \Big(\mathbb{Z}_{2^{k-1}}\Big)^{2^{k-2}+1}.$$

При этом группа $\mathrm{HH}^4(R)$ *порождается множеством образующих, состоящим из когомологических классов следующих элементов*

$$\begin{aligned}
&t_1 := \Big(1, \mathrm{O}_2\Big),\ t_1' := \Big(b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}_2\Big),\\
&t_2 := \Big(a, a - ab^2, 0\Big),\ t_2' := \Big(ab^{2^{k-2}}, ab^{2^{k-2}} - ab^{2^{k-2}+2}, 0\Big),\\
&t_3 := \Big(\mathrm{O}_2, aS^{(2)}\Big),\ t_4 := \Big(\mathrm{O}_2, abS^{(2)}\Big),\\
&t_5 := \Big(\mathrm{O}_2, 1\Big),\ t_5' := \Big(\mathrm{O}_2, b^{2^{k-2}}\Big),\\
&t_6^{(i)} := \Big(\mathrm{O}_2, b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)}\Big)\ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_1,\\
&t_7^{(i)} := \Big(\mathrm{O}_2, b^{2i} + b^{-2i}\Big)\ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_2,
\end{aligned}$$

подчиненных соотношениям:

$$\begin{aligned}
&2t_1 = 2t_1' = 2t_2 = 2t_2' = 2t_3 = 0,\ \ 4t_4 = 0,\\
&2^{k-1}t_5 = 2^{k-1}t_5' = 0,\\
&2^{k-1}t_6^{(i)} = 0\ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_1,\\
&2^{k-1}t_7^{(i)} = 0\ \textit{для}\ i \in \mathcal{L}_2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим подмножество в $\operatorname{Im}\delta^3$, состоящее из следующих элементов

$$\Big(2, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(2b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}_2\Big); \tag{2.67}$$

$$\Big(b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)}, \mathrm{O}_2\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.68}$$

$$\Big(b^{2i} + b^{-2i}, \mathrm{O}_2\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_2; \tag{2.69}$$

$$\Big(2a, 2a - 2ab^2, 0\Big),\ \Big(2ab^{2^{k-2}}, 2ab^{2^{k-2}} - 2ab^{2^{k-2}+2}, 0\Big); \tag{2.70}$$

$$\Big(ab^{2i+1} + ab^{2^{k-2}-(2i+1)}, 2ab^{2i+1} - ab^{2i-1} - ab^{2i+3}, 0\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.71}$$

$$\Big(b^{2i} + b^{-2i}, 2ab^{2i} - ab^{2i-2} - ab^{2i+2}, 0\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_2; \tag{2.72}$$

$$\Big(0, ab^{2i+1} - ab^{2^{k-2}-(2i+1)}, 2abS^{(2)}\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.73}$$

$$\Big(0, ab^{2i} - ab^{-2i}, 0\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_2; \tag{2.74}$$

$$\Big(0, b^{2i+1} - b^{2^{k-2}-(2i+1)}, 2^{k-1}b^{2i+1}\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.75}$$

$$\Big(0, b^{2i} - b^{-2i}, 2^{k-1}b^{2i}\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_2; \tag{2.76}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, 2^{k-1}\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2, 2^{k-1}b^{2^{k-2}}\Big); \tag{2.77}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, 2aS^{(2)}\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2, 4abS^{(2)}\Big); \tag{2.78}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, 2^{k-1}(b^{2i+1} + b^{2^{k-2}-(2i+1)})\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_1; \tag{2.79}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, 2^{k-1}(b^{2i} + b^{-2i})\Big) \text{ для } i \in \mathcal{L}_2. \tag{2.80}$$

Непосредственно проверяется, что это множество порождает $\operatorname{Im}\delta^3$, а тогда оно является базисом $\operatorname{Im}\delta^3$, поскольку его мощность совпадает с

$$\operatorname{rk}\operatorname{Im}\delta^3 = \operatorname{rk} R^2 - \operatorname{rk}\operatorname{Ker}\delta^3 = \operatorname{rk} R^2 - \operatorname{rk}\operatorname{Im}\delta^2 = 5\cdot 2^{k-2} + 3.$$

Остаётся заметить (используя предложение 2.16), что подмножество в $\operatorname{Ker}\delta^4$, состоящее из элементов, указанных в (2.53)–(2.58), а также в (2.68), (2.69), (2.71)–(2.76), образует базис $\operatorname{Ker}\delta^4$, согласованный с описанным выше базисом $\operatorname{Im}\delta^3$ (см. (2.67)–(2.80)). $\square$

Предложение 2.18. *Для любого* $n \geq 5$

$$\mathrm{HH}^n(R) \simeq \mathrm{HH}^{n-4}(R) \oplus \mathbb{Z}_2^4. \tag{2.81}$$

Доказательство. Из предложения 1.12 следует, что имеется следующая короткая точная последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{\imath^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

где $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, которая в свою очередь приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\ldots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \ldots . \tag{2.82}$$

Нам необходимо вычислить когомологии вспомогательного комплекса $\mathcal{X}^\bullet$.

Лемма 2.19. *Для* $n \geq 4$ $\quad \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathbb{Z}_2^4$.

Доказательство. Заметим, что $\mathcal{X}^n \simeq R^2$ для $n \geq 1$, и мы можем, как и в начале раздела, отождествлять коцепи из $\mathcal{X}^n$ с набором их значений на соответствующих образующих. Отметим также, что, начиная с члена $\mathcal{X}^3$, комплекс $\mathcal{X}^\bullet$ 2-периодичен.

а) Если n нечётно, то условие, что $(r_1, r_2) \in \mathrm{Ker}\,\delta^n_{\mathcal{X}}$, равносильно системе уравнений, которую можно получить из (2.46), отбрасывая

третье уравнение. Рассуждая аналогично доказательству предложений 2.10 и 2.15 получаем, что $\operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}}$ имеет базис, состоящий из элементов

$$(0,1),\ \left(0,b^{2^{k-2}}\right),\ (0,a),\ \left(0,ab^{2^{k-2}}\right), \tag{2.83}$$

$$\left(b^{2i+1}-b^{2^{k-2}-(2i+1)},0\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_1, \tag{2.84}$$

$$\left(b^{2i}-b^{-2i},0\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_2, \tag{2.85}$$

$$\left(ab^{2i+1}-ab^{2^{k-2}-(2i+1)},2ab^{2i+1}-ab^{2i-1}-ab^{2i+3}\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_1, \tag{2.86}$$

$$\left(ab^{2i}-ab^{-2i},2ab^{2i}-ab^{2i-2}-ab^{2i+2}\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_2, \tag{2.87}$$

$$\left(0,b^{2i+1}+b^{2^{k-2}-(2i+1)}\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_1, \tag{2.88}$$

$$\left(0,b^{2i}+b^{-2i}\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_2, \tag{2.89}$$

$$\left(0,ab^{2i+1}+ab^{2^{k-2}-(2i+1)}\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_1, \tag{2.90}$$

$$\left(0,ab^{2i}+ab^{-2i}\right) \text{ для } i\in\mathcal{L}_2. \tag{2.91}$$

Непосредственно убеждаемся что базисом для $\operatorname{Im}\delta^{n-1}_{\mathcal{X}}$ служит набор, состоящий из элементов (2.84)–(2.91), а также из элементов

$$2(0,1),\ 2\left(0,b^{2^{k-2}}\right),\ 2(0,a),\ 2\left(0,ab^{2^{k-2}}\right).$$

Поскольку указанные базисы $\mathbb{Z}$-модулей $\operatorname{Im}\delta^{n-1}_{\mathcal{X}}\subset\operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}}$ согласованы, то получаем требуемое утверждение. При этом когомологические классы элементов из (2.83) составляют множество образующих для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ (и порядок в группе $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ каждого класса из этого множества равен 2).

б) Для случая, когда n чётно, требуемое утверждение доказывается аналогично. При этом в качестве множества образующих для $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ можно взять когомологические классы элементов

$$(1,0),\ \left(b^{2^{k-2}},0\right),\ \left(a,a-ab^2\right),\ \left(ab^{2^{k-2}},ab^{2^{k-2}}-ab^{2^{k-2}+2}\right), \tag{2.92}$$

причём порядок каждого из этих классов равен 2. □

Продолжим доказательство предложения 2.18. Мы докажем сначала, что связывающие гомоморфизмы Δ^n из последовательности (2.82) при $n\geq 4$ нулевые.

Случай 1: пусть $n = 2\ell + 1, \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2$. Рассмотрим $(2\ell+1)$-коцикл $f = (r_1, r_2) \in \mathcal{X}^{2\ell+1}$, т.е. имеем $\delta_{\mathcal{X}}^{2\ell+1}(f) = 0$. Определим $\widetilde{f} = f \circ \nu$, где $\nu\colon Q_{2\ell+1} \to X_{2\ell+1}$ — проекция на соответствующее прямое слагаемое; иными словами, отображение $\widetilde{f}$ получено из f с помощью доопределения нулем на дополнительном прямом слагаемом к $X_{2\ell+1}$ в $Q_{2\ell+1}$, и, таким образом, $\widetilde{f} = (r_1, r_2, \mathrm{O})$. Тогда $\imath^*(\widetilde{f}) = \widetilde{f} \circ \imath = f \circ \nu \circ \imath = f$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell-3}, R) \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "\delta^{2\ell-3}"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell+1}, R) \arrow[r, "\imath^*"] \arrow[d, "\delta^{2\ell+1}"] & \mathcal{X}^{2\ell+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{\mathcal{X}}^{2\ell+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell-2}, R) \arrow[r, "\pi^*"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell+2}, R) \arrow[r, "\imath^*"] & \mathcal{X}^{2\ell+2} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

По построению связывающего гомоморфизма имеем $\Delta^{2\ell+1}(\mathrm{cl}\, f) = \mathrm{cl}\, g$, где $g\colon Q_{2\ell-2} \to R$ – некоторый коцикл, для которого $\pi^*(g) = \delta^{2\ell+1}(\widetilde{f})$.

Ввиду описания образующих для $\mathrm{H}^{2\ell+1}(\mathcal{X}^\bullet)$ (см. (2.83)) можно считать, что $r_2 \in \{1, b^{2^{k-2}}, a, ab^{2^{k-2}}\}$. Если $r_2 = 1$ или $r_2 = b^{2^{k-2}}$, то рассмотрим коцепь

$$\varphi = \Big(2^{k-2}, \mathrm{O}\Big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell-3}, R).$$

Тогда $\pi^*(\delta^{2\ell-3}(\varphi)) = \delta^{2\ell+1}(\widetilde{f})$, и для $g = \delta^{2\ell-3}(\varphi)$ получаем $\Delta^{2\ell+1}(\mathrm{cl}\, f) = \mathrm{cl}\, g = 0$. Аналогично поступаем в случае, когда $r_2 = a$ или $r_2 = ab^{2^{k-2}}$, но берём в качестве φ элемент $\Big(aS^{(2)}, \mathrm{O}\Big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell-3}, R)$.

Случай 2: предположим, что $n = 2\ell, \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq 2$. Рассмотрим 2ℓ-коцикл $f \in \mathcal{X}^{2\ell} = (r_1, r_2) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X_{2\ell}, R)$. Можем считать, что (r_1, r_2) – это один из элементов, указанных в (2.92). Пусть $\widetilde{f} = f \circ \nu$, где $\nu\colon Q_{2\ell} \to X_{2\ell}$ – проекция на соответствующее прямое слагаемое. Тогда $\delta^{2\ell}(\widetilde{f}) = 0$, и, следовательно, $\Delta^{2\ell}(\mathrm{cl}\, f) = 0$.

Таким образом, мы получаем для любого $n \geq 5$ короткую точную последовательность

$$0 \to \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{\imath^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \to 0. \tag{2.93}$$

Поскольку $\mathrm{HH}^1(R) = 0$ (см. предложение 2.7), то из (2.93) с помощью леммы 2.19 получаем: $\mathrm{HH}^5(R) \simeq \mathbb{Z}_2^4$. Кроме того, из (2.93) следует равенство

$$\big|\,\mathrm{HH}^n(R)\big| = \big|\mathrm{HH}^{n-4}(R)\big| + 2^4. \tag{2.94}$$

Теперь предположим, что n нечётно: $n = 2\ell+1$, $\ell \geq 3$. Легко видеть, что следующие коцепи из $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2\ell+1}, R)$:

$$f_1 := \Big(0, 1, -2^{k-2}, \mathrm{O}\Big), \quad f_2 := \Big(0, b^{2^{k-2}}, -2^{k-2}b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}\Big),$$
$$f_3 := \Big(0, a, -2S^{(2)}, \mathrm{O}\Big), \quad f_4 := \Big(0, ab^{2^{k-2}}, -2S^{(2)}, \mathrm{O}\Big)$$

являются коциклами. Рассмотрим также коцепи из $\mathrm{Hom}(Q_{2\ell}, R)$:

$$g_1 := (0, -1, \mathrm{O}), \quad g_2 := \Big(0, -b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}\Big),$$
$$g_3 := (0, -a, \mathrm{O}), \quad g_4 := \Big(0, -ab^{2^{k-2}}\ \mathrm{O}\Big).$$

Непосредственно проверяется, что $\delta^{2\ell}(g_i) = 2f_i$ для $1 \leq i \leq 4$. Пусть L – подгруппа в $\mathrm{HH}^{2\ell+1}(R)$, порождённая множеством $\{\mathrm{cl}\, f_i\}_{i=1}^4$. Ясно, что $|L| \leq 16$. При этом $\imath^*(L) = \mathrm{H}^{2\ell+1}(\mathcal{X}^\bullet)$. Отсюда с учётом (2.94) получаем, что $|L| = 16$ и $L \cap \pi^*(\mathrm{HH}^{2l-3}(R)) = 0$. Следовательно,

$$\mathrm{HH}^{2l+1}(R) = \pi^*(\mathrm{HH}^{2l-3}(R)) \oplus L,$$

и соотношение (2.81) в этом случае доказано.

Если же n чётно: $n = 2\ell$, $\ell \geq 3$, то соотношение (2.81) доказывается аналогично. В этом случае в качестве L берём подгруппу в $\mathrm{HH}^{2\ell}(R)$, порождённую классами $\mathrm{cl}\, f_i, 1 \leq i \leq 4$, где

$$f_1 := (1, \mathrm{O}), \qquad f_2 := \Big(b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}\Big),$$
$$f_3 := \Big(a, a - ab^2, \mathrm{O}\Big), \quad f_4 := \Big(ab^{2^{k-2}}, ab^{2^{k-2}} - ab^{2^{k-2}+2}, \mathrm{O}\Big);$$

при этом используем то, что $2f_i = \delta^{2\ell-1}(g_i)$, $1 \leq i \leq 4$, для следующих коцепей из $\mathrm{Hom}(Q_{2\ell-1}, R)$:

$$g_1 := (1, \mathrm{O}), \qquad g_2 := \Big(b^{2^{k-2}}, \mathrm{O}\Big),$$
$$g_3 := (a, a - ab^2, \mathrm{O}), \quad g_4 := \Big(ab^{2^{k-2}}, ab^{2^{k-2}} - ab^{2^{k-2}+2}, \mathrm{O}\Big).$$

□

Доказательство теоремы 2.1. Утверждение теоремы следует непосредственно из предложения 2.18 и вычисления групп $\mathrm{HH}^n(R)$ для $0 \leq n \leq 4$ (см. предложения 2.3, 2.7, 2.11, 2.15, 2.17). □

Литература

1. S. Eilenberg and S. MacLane, *Cohomology theory in abstract groups.* I. — Ann. Math. **48** (1947), 51–78.
2. А. Картан, С. Эйленберг, *Гомологическая алгебра.* М. (1960).
3. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math. **78** (1963), 267–288.
4. S. F. Siegel and S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra.* — Proc. London Math. Soc. **79** (1999), 131–157.
5. K. Erdmann and Th. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math. **11** (1999), 177–201.
6. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16**, вып. 6 (2004), 53–122.
7. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* Lecture Notes in Math. **1428**. Berlin; Heidelberg (1990).
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18**, вып. 1 (2006), 55–107.
9. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
11. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18**, вып. 4 (2006), 39–82.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19**, вып. 5 (2007), 70–123.
13. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of dihedral groups.* — Tsukuba J. Math. **31** (2007), 99–127.
14. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the generalized quaternion group.* — SUT J. Math. **38**, No. 1 (2002), 83–126.
15. T. Hayami, *On Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the quaternion group.* — Tsukuba J. Math. **29**, No. 2 (2005) 363–387.
16. Th. Holm, *Hochschild cohomology of tame blocks.* — J. Algebra **271** (2002), 798–826.
17. K. Erdmann, Th. Holm and N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* II. — Algebras and Repr. Theory **5** (2002), 457–482.
18. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
19. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 63–72.
20. А. И. Генералов, С. О. Иванов, *Бимодульная резольвента групповой алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 143–150.

21. C. T. C. Wall, *Resolutions for extensions of groups.* — Proc. Cambridge Phil. Soc. **57**, No. 2 (1961), 251–255.
22. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of the semidihedral 2-groups.* — Algebra Colloq. **18**, No. 2 (2011), 241–258.

Generalov A. I. Hochschild cohomology for the integer group ring of the semidihedral group.

We compute the Hochschild cohomology group for the integer group ring of the semidihedral 2-group SD_{2^k}. In calculations, we use the free bimodule resolution of the corresponding group ring. In turn, to construct that, we first construct the usual resolution of the trivial SD_{2^k}-module $\mathbb{Z}$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 16 мая 2011 г.