Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 388, 2011 г.

**Ю. В. Волков**

# КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА НЕСТАНДАРТНЫХ САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА $D_n$

## §1. Введение

Пусть $R$ – самоинъективная базисная алгебра над алгебраически замкнутым полем, имеющая конечный тип представления. Стабильный $AR$-колчан такой алгебры можно описать с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое должно совпадать с одной из схем Дынкина $A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$ или $E_8$ (см. [1]). Если для алгебры $R$ это ассоциированное дерево имеет тип $A_n$, то ввиду результатов [2] алгебра $R$ стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо так называемой "алгебре Мёбиуса". В работе [3] была вычислена алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для полуцепных самоинъективных алгебр, а для алгебры Мёбиуса в [4] была вычислена подалгебра $\mathrm{HH}^{*r}(R)$ алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая однородными элементами, степень которых делится на $r$, где $r$ – некоторый параметр, связанный с определяющими соотношениями алгебры $R$. В этих двух работах существенно использовался тот факт, что сизигия подходящего порядка $R$-бимодуля $R$ описывается как скрученный бимодуль. Более прямой подход к вычислению когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса $R$ был предложен в [5], где была построена периодическая минимальная проективная резольвента для алгебры $R$, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй. Затем в [6] эта

*Ключевые слова*: когомологии Хохшильда, самоинъективные алгебры, конечный тип представления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00635), а также при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2010-1.1-111-128-033, госконтракт 14.740.11.0344). Кроме того, работа автора поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного университета, "Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической $K$-теории" .

резольвента была использована для вычисления аддитивной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, т.е. для алгебры Мёбиуса $R$ были вычислены размерности групп $\mathrm{HH}^t(R)$.

Если для алгебры $R$ это ассоциированное дерево имеет тип $D_n$, то ввиду результатов [7] алгебра $R$ стабильно эквивалентна алгебре одного из 5 видов, из которых 4 соответствуют стандартным и один – нестандартным алгебрам. Их колчаны с соотношениями представлены в этой же работе. В работах [8, 9] и [10] с помощью техники, использованной в [5], была построена периодическая минимальная проективная резольвента для алгебр трех из этих видов. В двух из этих трех случаев полученная резольвента была сразу же использована для описания аддитивной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. В данной работе рассматривается тот вид, который соответствует нестандартным алгебрам. Для него строится периодическая бимодульная резольвента (см. теорему 1), затем вычисляются размерности групп $\mathrm{HH}^t(R)$ (см. теорему 2), а потом дается описание алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ в терминах образующих с соотношениями (см. теорему 3).

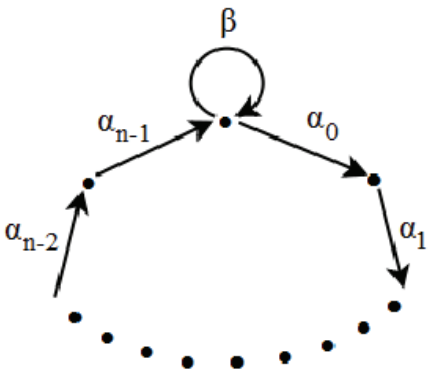
Отметим, что периодичность минимальной бимодульной резольвенты для стандартных самоинъективных алгебр конечного типа представления была доказана в [11] во всех случаев, за исключением серии алгебр, рассматриваемой в работе [9]. Наконец, совсем недавно для всех самоинъективных алгебр конечного типа представления была доказана периодичность минимальной бимодульной резольвенты (см. [12]). Данная работа вместе с работами [11] и [9] тоже дает доказательство периодичности минимальной бимодульной резольвенты для всех самоинъективных алгебр конечного типа представления. Кроме того, в данной статье находится точное значение периода минимальной бимодульной резольвенты для нестандартных алгебр. Отметим, что в работе [12] указывается три возможных значения периода такой резольвенты, но не указывается, в каких случаях они принимаются.

## §2. Бимодульная резольвента

Пусть $k$ – алгебраически замкнутое поле, $\operatorname{char} k = 2$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Введём следующий колчан с соотношениями $(\mathcal{Q}, I)$. Множество вершин колчана $\mathcal{Q}$ равно $\mathcal{Q}_0 = \{i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant i \leqslant n-1\}$; на самом деле мы отождествляем $\mathcal{Q}_0$ с $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, т.е. считаем элементы из $\mathcal{Q}_0$ определенными по модулю $n$. Множество стрелок $\mathcal{Q}_1$ колчана $\mathcal{Q}$

состоит из следующих элементов:

$$\beta : 0 \to 0, \quad \alpha_i : i \to i+1 \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1).$$




Идеал $I$ порождён следующими элементами алгебры путей $k\mathcal{Q}$ колчана $\mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned} &\alpha_0\alpha_{n-1} + \alpha_0\beta\alpha_{n-1}, \\ &\beta^2 - \alpha_{n-1}\dots\alpha_0, \\ &\alpha_t\dots\alpha_0\alpha_{n-1}\dots\alpha_t, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $t = 1, \dots, \max(n-2, 1)$. Легко понять, что элементы вида (2.1) для $t \in \{0, n-1\}$ тоже лежат в $I$; ясно также, что $\beta^4 \in I$.

Рассмотрим $k$-алгебру $R = k\mathcal{Q}/I$. Из [7] следует, что $R$ имеет древесный тип $D_{3n}$. Через $\Lambda = R \otimes_k R^{\mathrm{op}}$ обозначим обёртывающую алгебру алгебры $R$. Через $e_i$ обозначаем примитивный идемпотент алгебры $R$, соответствующий $i$-ой вершине колчана $\mathcal{Q}$. Тогда $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2}\}_{i_1,i_2}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов алгебры $\Lambda$. Через $P_i = Re_i$ обозначим проективный $R$-модуль, соответствующий $i$-ой вершине колчана $\mathcal{Q}$, через $S_i$ – соответствующий ей простой $R$-модуль. Через $P_{[i_1][i_2]} = \Lambda e_{i_1} \otimes e_{i_2}$ обозначим проективный $\Lambda$-модуль, соответствующий идемпотенту $e_{i_1} \otimes e_{i_2}$. Если $w$ – некоторый путь в колчане $\mathcal{Q}$ из вершины $i_1$ в вершину $i_2$, то умножение справа на $w$ индуцирует гомоморфизм из $P_{i_2}$ в $P_{i_1}$, который

мы будем обозначать через $w$. Таким образом, если $w_1$ – путь из вершины $i_1$ в вершину $i_2$, а $w_2$ – путь из вершины $i_3$ в вершину $i_4$, то $w_1 \otimes w_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i_2][i_3]}, P_{[i_1][i_4]})$.

Введём вспомогательные обозначения:

$$\tau_{i_1,i_2} = \alpha_{i_1-1} \dots \alpha_{i_2}, \quad \mu_i = \alpha_{i-1} \dots \alpha_0, \quad \nu_i = \alpha_{n-1} \dots \alpha_i.$$

**Замечание 1.** Здесь и в дальнейшем мы, для единообразия обозначений, дополнительно предполагаем, что пустое произведение стрелок колчана отождествляется с подходящим идемпотентом алгебры $R$; например, $\mu_0 = \nu_n = e_0$, $\tau_{i,i} = e_i$.

Через $Q_i(S)$ $(i \geqslant 0)$ обозначим $i$-ый модуль в минимальной проективной резольвенте простого $R$-модуля $S$, а через $Q_i$ – $i$-ый модуль в бимодульной проективной резольвенте $\Lambda$-модуля $R$. Тогда по лемме Хаппеля [13] (см. также [5, стр. 45]), если $Q_t(S_i) = \bigoplus\limits_{k=1}^{l_i} P_{i_{k,i}}$, то

$$Q_t = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{k=1}^{l_i} P_{[i_{k,i}][i]}.$$

Построим минимальные проективные резольвенты модулей $S_i$.

**Лемма 1.** 1. *Пусть $1 \leqslant i \leqslant n-2$. Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля $S_i$ имеет следующий вид:*

$$0 \leftarrow S_i \longleftarrow P_i \xleftarrow{\alpha_i} P_{i+1} \xleftarrow{\rho_i} P_{i+1},$$

*где*

$$\rho_i = \mu_{i+1}\nu_{i+1};$$

*при этом $\Omega^2(S_i) \cong S_{i+1}$.*

2. *Начало минимальной проективной резольвенты модуля $S_{n-1}$ имеет следующий вид:*

$$0 \leftarrow S_{n-1} \longleftarrow P_{n-1} \xleftarrow{\alpha_{n-1}} P_0 \xleftarrow{\nu} P_1 \xleftarrow{\rho_{n-1}} P_1,$$

*где*

$$\nu = \alpha_0(\beta + e_0),$$
$$\rho_{n-1} = \alpha_0\nu_1;$$

*при этом $\Omega^3(S_{n-1}) \cong S_1$.*

3. (1) *Пусть* $n \vdots 2$. *Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля* $S_0$ *имеет вид*

$$0 \leftarrow S_0 \longleftarrow Q_0(S_0) \overset{\varphi_0(S_0)}{\longleftarrow} Q_1(S_0) \overset{\varphi_1(S_0)}{\longleftarrow} \dots \overset{\varphi_{2n-2}(S_0)}{\longleftarrow} Q_{2n-1}(S_0),$$

*где*

$$Q_{4k}(S_0) = P_0 \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\right),$$

$$Q_{4k+1}(S_0) = P_0 \oplus P_{2k+1} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\right),$$

$$Q_{4k+2}(S_0) = P_0 \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\right),$$

$$Q_{4k+3}(S_0) = P_{2k+2} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\right),$$

$$\varphi_{4k}(S_0) = (\beta, \mu_{2k+1}) \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\right),$$

$$\varphi_{4k+1}(S_0) = \begin{pmatrix} \beta \\ \nu_{2k+1} \end{pmatrix} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\right),$$

$$\varphi_{4k+2}(S_0) = \mu_{2k+2}\beta \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}\right),$$

$$\varphi_{4k+3}(S_0) = \beta\nu_{2k+2} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-4}{2}\right);$$

*при этом* $\Omega^{2n-1}(S_0) \cong S_0$.

3. (2) *Пусть* $n \not\vdots 2$. *Тогда начало минимальной проективной резольвенты модуля* $S_0$ *имеет вид*

$$0 \leftarrow S_0 \longleftarrow Q_0(S_0) \overset{\varphi_0(S_0)}{\longleftarrow} Q_1(S_0) \overset{\varphi_1(S_0)}{\longleftarrow} \dots \overset{\varphi_{4n-3}(S_0)}{\longleftarrow} Q_{4n-2}(S_0),$$

*где*

$$Q_{4k}(S_0) = P_0 \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\right),$$

$$Q_{4k+1}(S_0) = P_0 \oplus P_{2k+1} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),$$

$$
\begin{aligned}
Q_{4k+2}(S_0) &= P_0 \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
Q_{4k+3}(S_0) &= P_{2k+2} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
Q_{2n-1+4k}(S_0) &= P_0 \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\right),\\
Q_{2n-1+4k+1}(S_0) &= P_{2k+1} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\right),\\
Q_{2n-1+4k+2}(S_0) &= P_0 \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
Q_{2n-1+4k+3}(S_0) &= P_0 \oplus P_{2k+2} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
\varphi_{4k}(S_0) &= (\beta, \mu_{2k+1}) \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
\varphi_{4k+1}(S_0) &= \begin{pmatrix} \beta \\ \nu_{2k+1} \end{pmatrix} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
\varphi_{4k+2}(S_0) &= \mu_{2k+2}\beta \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
\varphi_{4k+3}(S_0) &= \beta\nu_{2k+2} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
\varphi_{2n-2}(S_0) &= \beta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{2n-1+4k}(S_0) &= \mu_{2k+1}\beta \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\right),\\
\varphi_{2n-1+4k+1}(S_0) &= \beta\nu_{2k+1} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
\varphi_{2n-1+4k+2}(S_0) &= (\beta, \mu_{2k+2}) \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right),\\
\varphi_{2n-1+4k+3}(S_0) &= \begin{pmatrix} \beta \\ \nu_{2k+2} \end{pmatrix} \quad \left(0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}\right);
\end{aligned}
$$

*при этом* $\Omega^{4n-2}(S_0) \cong S_0$.

**Доказательство.** Проверить все пункты не представляет труда. $\square$

Следующие два утверждения непосредственно вытекают из леммы 1.

**Следствие 1.** *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant n-1$. *Тогда первые* $2n-1$ *члена минимальной проективной резольвенты модуля* $S_i$ *таковы:*

$$\begin{aligned} Q_{2m}(S_i) &= P_{i+m} && (m = 0, \dots, n-1-i), \\ Q_{2m+1}(S_i) &= P_{i+m+1} && (m = 0, \dots, n-2-i), \\ Q_{2n-1-2i}(S_i) &= P_0, \\ Q_{2m}(S_i) &= P_{i+m-(n-1)} && (m = n-i, \dots, n-1), \\ Q_{2m+1}(S_i) &= P_{i+m-(n-1)} && (m = n-i, \dots, n-2). \end{aligned}$$

*Кроме того,* $Q_{m+2n-1}(S_i) = Q_m(S_i)$.

**Следствие 2.** 1) *Пусть* $n \vdots 2$. *Тогда для любого* $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *имеем* $\Omega^{2n-1}(S_i) \cong S_i$.

2) *Пусть* $n \not\vdots 2$. *Тогда для любых* $0 \leqslant i \leqslant n-1$ *имеем* $\Omega^{4n-2}(S_i) \cong S_i$.

Введём $k$-линейное отображение $\sigma : R \to R$, удовлетворяющее условию $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ и такое, что

$$\sigma(e_i) = e_i, \quad \sigma(\alpha_i) = \alpha_i \quad (0 \leqslant i \leqslant n-1), \quad \sigma(\beta) = \beta + \beta^2 + \beta^3.$$

Ясно, что $\sigma$ – автоморфизм алгебры $R$. Легко видеть также, что $\sigma$ не является внутренним автоморфизмом и имеет порядок 2.

Будем обозначать через $\rho\Lambda$ категорию конечно порождённых проективных (левых) $\Lambda$-модулей. Введём следующий $k$-линейный функтор $\sigma : \rho\Lambda \to \rho\Lambda$. Положим $\sigma(V) = V$ для любого $V \in \rho\Lambda$. Пусть $V_1$, $V_2$ – модули из $\rho\Lambda$, $V_1 = \bigoplus\limits_{l \in L} P_{[i_{1,l}][i_{2,l}]}$, $d : V_1 \to V_2$ – гомоморфизм $\Lambda$-модулей такой, что $d|_{P_{[i_{1,l}][i_{2,l}]}} = \sum\limits_{t \in T} u_{l,t} w_{l,t,1} \otimes w_{l,t,2}$, где $u_{l,t} \in k$, $w_{l,t,1}, w_{l,t,2} \in R$. Тогда $\sigma(d)|_{P_{[i_{1,l}][i_{2,l}]}} = \sum\limits_{t \in T} u_{l,t} \sigma(w_{l,t,1}) \otimes w_{l,t,2}$.

Введём в рассмотрение следующие модули:

$$T_{2l} = P_{[0][0]} \oplus \Big( \bigoplus_{i=1}^{n-1-l} P_{[i+l][i]} \Big) \oplus \Big( \bigoplus_{i=n-l}^{n-1} P_{[i+l-(n-1)][i]} \Big) \qquad (l = 0, \dots, n-1), \tag{2.2}$$

$$T_{2l+1} = P_{[0][0]} \oplus \Big( \bigoplus_{i=0}^{n-2-l} P_{[i+l+1][i]} \Big) \oplus \Big( \bigoplus_{i=n-1-l}^{n-1} P_{[i+l-(n-1)][i]} \Big) \qquad (l = 0, \dots, n-1), \tag{2.3}$$

$$T'_{2l+1} = \Big( \bigoplus_{i=0}^{n-2-l} P_{[i+l+1][i]} \Big) \oplus \Big( \bigoplus_{i=n-1-l}^{n-1} P_{[i+l-(n-1)][i]} \Big) \qquad (l = 0, \dots, n-1). \tag{2.4}$$

Отметим, что $T_0 \subset T_{2n-1}$ и $T'_{2n-1} = T_0$.

Теперь из следствия 1 и леммы Хаппеля получаем следующее описание членов минимальной проективной резольвенты $\Lambda$-модуля $R$.

1. При $n \vdots 2$: $Q_{2k} = T_{2k}$ для $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $Q_{4k+1} = T_{4k+1}$, $Q_{4k+3} = T'_{4k+3}$ для $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$. При этом $Q_{l(2n-1)+t} = Q_t$ для $0 \leqslant t \leqslant 2n-2$.

2. При $n \not\vdots 2$: $Q_{2k} = T_{2k}$ для $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $Q_{4k+1} = T_{4k+1}$, $Q_{4k+3} = T'_{4k+3}$ для $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}$, $Q_{2n-1+2k} = T_{2k}$ для $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $Q_{2n-1+4k+1} = T'_{4k+1}$ для $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$, $Q_{2n-1+4k+3} = T_{4k+3}$ для $0 \leqslant k \leqslant \frac{n-3}{2}$. При этом $Q_{l(4n-2)+t} = Q_t$ для $0 \leqslant t \leqslant 4n-3$.

Пусть $\mu : Q_0 \to R$ – гомоморфизм, определённый на $w_1 \otimes w_2 \in P_{[i][i]}$, $i = 0, \dots, n-1$, по формуле $\mu(w_1 \otimes w_2) = w_1 w_2$. Далее мы построим гомоморфизмы $s_{2l} : T_{2l+1} \to T_{2l}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$, $s_{2l+1} : T_{2l+2} \to T_{2l+1}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-2)$, $s'_{2l} : T'_{2l+1} \to T_{2l}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$, $s'_{2l+1} : T_{2l+2} \to T'_{2l+1}$ $(0 \leqslant l \leqslant n-2)$, определив их на прямых слагаемых модулей $T_{2l+1}$, $T_{2l+2}$, $T'_{2l+1}$, $T'_{2l+2}$ следующим образом:

$$s_{2l}|_{P_{[0][0]}} = \beta \otimes e_0 + \sum_{q=n-l}^{n-1} \nu_{q+l-(n-1)} \otimes \mu_q + e_0 \otimes \beta,$$

$$s_{2l}|_{P_{[i+l+1][i]}} = \alpha_{i+l} \otimes e_i + e_{i+l+1} \otimes \alpha_i \ (1 \leqslant i \leqslant n-2-l),$$

$$s_{2l}|_{P_{[i+l-(n-1)][i]}} = \sum_{q=i}^{n-1} \mu_{i+l-(n-1)} \nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,i} + \mu_{i+l-(n-1)}$$

$$\otimes (e_0 + \beta)\nu_i + \sum_{q=n-l}^{i} \tau_{i+l-(n-1),q+l-(n-1)} \otimes \mu_q \nu_i \ (n-l \leqslant i \leqslant n-1).$$

Кроме того, для $0 \leqslant l \leqslant n-2$:

$$s_{2l}|_{P_{[0][n-1-l]}} = \alpha_{n-1} \otimes e_{n-1-l} + \sum_{q=n-l}^{n-1} \beta\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,n-1-l} + e_0 \otimes \nu_{n-1-l},$$

$$s_{2l}|_{P_{[l+1][0]}} = \mu_{l+1} \otimes e_0 + \sum_{q=n-l}^{n-1} \tau_{l+1,q+l-(n-1)} \otimes \mu_q\beta + e_{l+1} \otimes \alpha_0,$$

$$s_{2l+1}|_{P_{[0][0]}} = \beta \otimes e_0 + \sum_{q=0}^{n-1-l} \nu_{q+l+1} \otimes \mu_q + e_0 \otimes \beta,$$

$$s_{2l+1}|_{P_{[i+l+1][i]}} = \sum_{q=i}^{n-1-l} \mu_{i+l+1}\beta\nu_{q+l+1} \otimes \tau_{q,i} + \mu_{i+l+1} \otimes \nu_i$$

$$+ \sum_{q=0}^{i} \tau_{i+l+1,q+l+1} \otimes \mu_q\beta\nu_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2-l).$$

Кроме того,

$$s_{2l+1}|_{P_{[1][n-1-l]}} = \alpha_0(e_0+\beta) \otimes e_{n-1-l} + \alpha_0 \otimes \nu_{n-1-l} + e_1 \otimes \alpha_{n-1-l},$$
$$s_{2l+1}|_{P_{[i+l-(n-2)][i]}} = \alpha_{i+l-(n-1)} \otimes e_i + e_{i+l-(n-2)} \otimes \alpha_i$$
$$(n-l \leqslant i \leqslant n-2),$$
$$s_{2l+1}|_{P_{[l+1][n-1]}} = \alpha_l \otimes e_{n-1} + e_{l+1} \otimes (e_0+\beta)\alpha_{n-1}$$

для $1 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$s_1|_{P_{[1][n-1]}} = \alpha_0(e_0+\beta) \otimes e_{n-1} + \alpha_0 \otimes \alpha_{n-1} + e_1 \otimes (e_0+\beta)\alpha_{n-1},$$
$$s'_{2l}|_{P_{[i+l+1][i]}} = \alpha_{i+l} \otimes e_i + e_{i+l+1} \otimes \alpha_i \ (1 \leqslant i \leqslant n-2-l),$$
$$s'_{2l}|_{P_{[i+l-(n-1)][i]}} = \sum_{q=i}^{n-1} \mu_{i+l-(n-1)}\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,i} + \mu_{i+l-(n-1)}\beta \otimes \nu_i$$

$$+\mu_{i+l-(n-1)} \otimes \beta\nu_i + \sum_{q=n-l}^{i} \tau_{i+l-(n-1),q+l-(n-1)} \otimes \mu_q\nu_i \quad (n-l \leqslant i \leqslant n-1).$$

Кроме того,

$$s'_{2l}|_{P_{[0][n-1-l]}} = \alpha_{n-1} \otimes e_{n-1-l} + \sum_{q=n-l}^{n-1} \beta\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,n-1-l}$$
$$+ (\beta + \beta^2) \otimes \nu_{n-1-l} + (e_0 + \beta) \otimes \beta\nu_{n-1-l},$$
$$s'_{2l}|_{P_{[l+1][0]}} = \mu_{l+1}\beta \otimes (e_0 + \beta) + \mu_{l+1} \otimes (\beta + \beta^2)$$
$$+ \sum_{q=n-l}^{n-1} \tau_{l+1,q+l-(n-1)} \otimes \mu_q\beta + e_{l+1} \otimes \alpha_0$$

для $0 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$s'_{2n-2}|_{P_{[0][0]}} = \beta^3 \otimes e_0 + \beta^2 \otimes (\beta + \beta^2 + \beta^3) + \beta \otimes \beta^2 + e_0 \otimes \beta^3$$
$$+ \sum_{q=1}^{n-1} \beta\nu_q \otimes \mu_q + \sum_{q=1}^{n-1} \beta\nu_q \otimes \mu_q\beta + \sum_{q=1}^{n-1} \nu_q \otimes \mu_q\beta.$$

$$s'_{2l+1}|_{P_{[0][0]}} = \beta^2 \otimes \mu_{n-1-l} + \nu_{l+1} \otimes \beta^2 + \sum_{q=0}^{n-1-l} \beta\nu_{q+l+1} \otimes \mu_q$$
$$+ \sum_{q=0}^{n-1-l} \beta\nu_{q+l+1} \otimes \mu_q\beta + \sum_{q=0}^{n-1-l} \nu_{q+l+1} \otimes \mu_q\beta,$$
$$s'_{2l+1}|_{P_{[i+l+1][i]}} = \sum_{q=i}^{n-1-l} \mu_{i+l+1}\beta\nu_{q+l+1} \otimes \tau_{q,i} + \sum_{q=0}^{i} \tau_{i+l+1,q+l+1} \otimes \mu_q\beta\nu_i$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n-2-l).$$

Кроме того,

$$s'_{2l+1}|_{P_{[1][n-1-l]}} = \alpha_0(e_0 + \beta) \otimes e_{n-1-l} + e_1 \otimes \alpha_{n-1-l},$$
$$s'_{2l+1}|_{P_{[i+l-(n-2)][i]}} = \alpha_{i+l-(n-1)} \otimes e_i + e_{i+l-(n-2)} \otimes \alpha_i \ (n-l \leqslant i \leqslant n-2),$$
$$s'_{2l+1}|_{P_{[l+1][n-1]}} = \alpha_l \otimes e_{n-1} + e_{l+1} \otimes (e_0 + \beta)\alpha_{n-1}$$

для $1 \leqslant l \leqslant n-2$ и

$$s'_1|_{P_{[1][n-1]}} = \alpha_0(e_0 + \beta) \otimes e_{n-1} + e_1 \otimes (e_0 + \beta)\alpha_{n-1}.$$

Наконец, определим гомоморфизмы $d_i\colon Q_{i+1} \to Q_i$ следующим образом:

1) если $n \vdots 2$, то для $0 \leqslant i \leqslant 2n-2$

$$d_i = \begin{cases} s_i, & \text{если } \ i = 4k \ \text{ или } \ i = 4k+1, \ \text{ где } \ k \in \mathbb{Z} \\ s'_i, & \text{если } \ i = 4k+2 \ \text{ или } \ i = 4k+3, \ \text{ где } \ k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

2) если $n \not\vdots 2$, то для $0 \leqslant i \leqslant 4n-3$

$$d_i = \begin{cases} s_i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant 2n-3, i = 4k \\ & \text{или } i = 4k+1, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ s'_i, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant 2n-3, i = 4k+2 \\ & \text{или } i = 4k+3, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ s_{2n-2}|_{T_0}, & \text{если } i = 2n-2, \\ \sigma(s'_{i-(2n-1)}), & \text{если } 2n-1 \leqslant i \leqslant 4n-3, i = 2n-1+4k \\ & \text{или } i = 2n-1+4k+1, \text{ где } k \in \mathbb{Z}, \\ \sigma(s_{i-(2n-1)}), & \text{если } 2n-1 \leqslant i \leqslant 4n-3, i = 2n-1+4k+2 \\ & \text{или } i = 2n-1+4k+3, \text{ где } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следующая теорема описывает минимальную проективную бимодульную резольвенту $R$.

**Теорема 1.** 1. *Пусть $n \vdots 2$. Тогда минимальная $\Lambda$-проективная резольвента модуля $R$ представляется последовательностью:*

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\mu} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \cdots \xleftarrow{d_{2n-3}} Q_{2n-2} \xleftarrow{d_{2n-2}} Q_{2n-1} \xleftarrow{d_{2n-1}} Q_{2n} \xleftarrow{d_{2n}} \dots, \tag{2.5}$$

*где модули $Q_i$ для $i = 0, \dots, 2n-1$ и гомоморфизмы $d_i$ для $i = 0, \dots, 2n-2$ описаны выше; кроме того, $Q_{l(2n-1)+t} = Q_t$, $d_{l(2n-1)+t} = \sigma^l(d_t)$, где $0 \leqslant t \leqslant 2n-2$.*

2. *Пусть $n \not\vdots 2$. Тогда минимальная $\Lambda$-проективная резольвента модуля $R$ представляется последовательностью:*

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\mu} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \cdots \xleftarrow{d_{4n-4}} Q_{4n-3} \xleftarrow{d_{4n-3}} Q_{4n-2} \xleftarrow{d_{4n-2}} Q_{4n-1} \xleftarrow{d_{4n-1}} \dots, \tag{2.6}$$

*где модули $Q_i$ для $i = 0, \dots, 4n-2$ и гомоморфизмы $d_i$ для $i = 0, \dots, 4n-3$ описаны выше; кроме того, $Q_{l(4n-2)+t} = Q_t$, $d_{l(4n-2)+t} = d_t$, где $0 \leqslant t \leqslant 4n-3$.*

**Доказательство.** Докажем сначала, что $\mu d_0 = 0$ и $d_i d_{i+1} = 0$ для $i \geqslant 0$. Ясно, что, если $\varphi_1\varphi_2 = 0$, то $\sigma(\varphi_1)\sigma(\varphi_2) = 0$. Из этого утверждения следует, что нам достаточно доказать следующие равенства:

0. $\mu s_0 = 0$,
1. $s_{2l}s_{2l+1} = 0 \qquad (0 \leqslant l \leqslant n-2)$,
2. $s_{2l+1}s'_{2l+2} = 0 \qquad (0 \leqslant l \leqslant n-3)$,
3. $s'_{2l}s'_{2l+1} = 0 \qquad (0 \leqslant l \leqslant n-2)$,
4. $s'_{2l+1}s_{2l+2} = 0 \qquad (0 \leqslant l \leqslant n-3)$,
5. $s_{2n-3}s'_{2n-2} = 0$,
6. $s'_{2n-2}\sigma(s_0) = 0$,
7. $s'_{2n-3}s_{2n-2}|_{T_0} = 0$,
8. $s_{2n-2}|_{T_0}\sigma(s'_0) = 0$,

так как любая композиция гомоморфизмов $d_i d_{i+1}$ $(i \geqslant 0)$ имеет вид $\sigma^k(\varphi_1)\sigma^k(\varphi_2)$, где $k \in \{0,1\}$ и $\varphi_1\varphi_2$ – композиция гомоморфизмов, стоящая слева от знака равенства в одном из пунктов 1–8. Равенства в пунктах 0–8 проверяются прямыми, хотя и громоздкими, вычислениями, и это предоставляется сделать читателю.

Далее, из леммы 1 и её следствий, а также определения $Q_i$ и $d_i$ ясно, что для любого $x \in \mathcal{Q}_0$ последовательность

$$0 \leftarrow R \otimes_R S_x \xleftarrow{\mu\otimes_R 1_{S_x}} Q_0 \otimes_R S_x \xleftarrow{d_0\otimes_R 1_{S_x}} Q_1 \otimes_R S_x \xleftarrow{d_1\otimes_R 1_{S_x}} \cdots$$

является минимальной проективной резольвентой $R$-модуля $S_x$. Тогда из результатов работы [10] следует, что последовательности (2.5) и (2.6) являются минимальными $\Lambda$-проективными резольвентами модуля $R$ в случаях $n \vdots 2$ и $n \not\vdots 2$ соответственно.

Теорема 1 доказана. □

**Замечание 2.** Из теоремы 1 с использованием [5, лемма 6] следует, что, если $n$ чётно, то $(2n-1)$-я сизигия $\Omega^{2n-1}(R)$ $\Lambda$-модуля $R$ изоморфна скрученному модулю ${}_{\sigma^{-1}}R_1$, а, если $n$ нечётно, то $(4n-2)$-я сизигия $\Omega^{4n-2}(R)$ $\Lambda$-модуля $R$ изоморфна $R$ (если $\varphi$ – автоморфизм алгебры $R$, то ${}_{\varphi}R_1$ –это $R$ с бимодульной структурой такой, что $x*y*z = \varphi(x)\cdot y\cdot z$ для любых $x, y, z \in R$).

**Следствие 3.** *Минимальная проективная бимодульная резольвента нестандартной самоинъективной алгебры конечного типа представления древесного типа $D_{3n}$ периодична с периодом $4n-2$.*

## §3. Аддитивная структура алгебры когомологий Хохшильда

В этом параграфе сохраняются все обозначения, введённые в предыдущем. Кроме того, если $f : X \to Y$ – гомоморфизм $\Lambda$-модулей, то введём следующее обозначение:

$$f^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(f, R) : \mathrm{Hom}_\Lambda(Y, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, R).$$

Пусть $l$ и $m$ – некоторые целые числа. Рассмотрим следующие условия на $l$ и $m$:

$$\mathcal{P}_1(l,m) \equiv \begin{cases} l \vdots 2, & \text{если } n \not\vdots 2 \ \text{ или } \ m \vdots 2, \\ l \not\vdots 2, & \text{если } n \vdots 2 \ \text{ и } \ m \not\vdots 2; \end{cases}$$

$$\mathcal{P}_2(l,m) \equiv \begin{cases} l \vdots 2, & \text{если } n \vdots 2 \ \text{ или } \ m \vdots 2, \\ l \not\vdots 2, & \text{если } n \not\vdots 2 \ \text{ и } \ m \not\vdots 2. \end{cases}$$

**Теорема 2.** *Пусть* $\mathrm{HH}^t(R)$ *– $t$-ая группа когомологий Хохшильда алгебры $R$ с коэффициентами в $R$. Тогда:*

$\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = 2$, *если выполнено одно из условий:*

$$t = 2l + m(2n-1), \quad 1 \leqslant l \leqslant n-2, \ \textit{и не выполнено } \mathcal{P}_1(l,m), \tag{3.1}$$

$$t = 2l + 1 + m(2n-1), \ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \ \textit{и не выполнено } \mathcal{P}_2(l,m); \tag{3.2}$$

$\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = 3$, *если выполнено одно из условий:*

$$t = 2l + m(2n-1), \ 1 \leqslant l \leqslant n-2, \ \textit{и выполнено } \mathcal{P}_1(l,m), \tag{3.3}$$

$$t = 2l + 1 + m(2n-1), \ 0 \leqslant l \leqslant n-2, \ \textit{и выполнено } \mathcal{P}_2(l,m), \tag{3.4}$$

$$t = (m+1)(2n-1) - 1 \ \textit{или} \ t = (m+1)(2n-1), \ m \geqslant 0, m \vdots 2 \ \textit{и} \ n \vdots 2, \tag{3.5}$$

$$t = (m+1)(2n-1) - 1 \ \textit{или} \ t = (m+1)(2n-1), \ m \geqslant 0, m \not\vdots 2 \ \textit{и} \ n \not\vdots 2; \tag{3.6}$$

$\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = 4$, *если выполнено одно из условий:*

$$t = (m+1)(2n-1) - 1 \ \textit{или} \ t = (m+1)(2n-1), \ m \geqslant 0, m \not\vdots 2 \ \textit{и} \ n \vdots 2, \tag{3.7}$$

$$t = (m+1)(2n-1) - 1 \ \textit{или} \ t = (m+1)(2n-1), \ m \geqslant 0, m \vdots 2 \ \textit{и} \ n \not\vdots 2; \tag{3.8}$$

$\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = n + 2$, *если* $t = 0$.

Перед началом доказательства теоремы введём следующие определения. Пусть $w$ – путь из вершины $i_2$ в вершину $i_1$. Через $w^* : P_{[i_1][i_2]} \to R$ будем обозначать $\Lambda$-гомоморфизм, переводящий $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \in P_{[i_1][i_2]}$ в $w \in R$.

Пусть

$$X = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} P_{[i_{1,i}][i_{2,i}]},$$

где модули $P_{[i_{1,i}][i_{2,i}]}$ попарно не изоморфны. Пусть $w_{i,j}$ – путь из вершины $i_{2,i}$ в вершину $i_{1,i}$ $(1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q_i)$. Для $\chi = \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{q_i} \varkappa_{i,j} w_{i,j}$, где $\varkappa_{i,j} \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q_i)$, через $\chi^*$ будем обозначать гомоморфизм $\sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{q_i} \varkappa_{i,j} w_{i,j}^* \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, R)$, а через $V(\chi) \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(X, R)$ будем обозначать подпространство, порождённое над $k$ гомоморфизмом $\chi^*$.

**Лемма 2.** 1) *Пусть* $1 \leqslant l \leqslant n-2$. *Тогда:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(T_{2l}, R) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{3} V(\beta^q)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1-l} V(\tau_{i+l,i})\Big) \\ \oplus \Big(\bigoplus_{i=n-l}^{n-1} V(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)\Big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

2) *Пусть* $0 \leqslant l \leqslant n-2$. *Тогда:*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(T_{2l+1}, R) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{3} V(\beta^q)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-2-l} V(\tau_{i+l+1,i})\Big) \\ \oplus \Big(\bigoplus_{i=n-l}^{n-1} V(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)\Big) \oplus V(\mu_{l+1}) \\ \oplus V(\mu_{l+1}\beta) \oplus V(\nu_{n-1-l}) \oplus V(\beta\nu_{n-1-l}), \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Lambda(T'_{2l+1}, R) = \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-2-l} V(\tau_{i+l+1,i})\Big) \\ \oplus \Big(\bigoplus_{i=n-l}^{n-1} V(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)\Big) \oplus V(\mu_{l+1}) \\ \oplus V(\mu_{l+1}\beta) \oplus V(\nu_{n-1-l}) \oplus V(\beta\nu_{n-1-l}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

3) *Верно следующее равенство:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Lambda(T_{2n-2},R)=\mathrm{Hom}_\Lambda(T_0,R)=\Big(\bigoplus_{q=0}^{3}V(\beta^q)\Big)\\ \oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1}V(e_i)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1}V(\mu_i\nu_i)\Big).\end{aligned}\tag{3.12}$$

**Доказательство.** Заметим следующий факт. Рассмотрим линейное подпространство пространства $R$, порождённое над $k$ всеми путями, ведущими из вершины $i_2$ в вершину $i_1$. Пусть $(w_1,w_2,\dots,w_p)$ – его базис. Ясно, что $(w_1^*,w_2^*,\dots,w_p^*)$ – базис $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i_1][i_2]},R)$, то есть:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i_1][i_2]},R)=\bigoplus_{i=1}^{p}V(w_i).\tag{3.13}$$

Тогда легко проверить, что верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[0][0]},R)&=\bigoplus_{q=0}^{3}V(\beta^q),\\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i][0]},R)&=V(\mu_i)\oplus V(\mu_i\beta)&&(1\leqslant i\leqslant n-1),\\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[0][i]},R)&=V(\nu_i)\oplus V(\beta\nu_i)&&(1\leqslant i\leqslant n-1),\\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i_1][i_2]},R)&=V(\tau_{i_1,i_2})&&(1\leqslant i_2<i_1\leqslant n-1),\\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i_1][i_2]},R)&=V(\mu_{i_1}\nu_{i_2})&&(1\leqslant i_1<i_2\leqslant n-1),\\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[i][i]},R)&=V(e_i)\oplus V(\mu_i\nu_i)&&(1\leqslant i\leqslant n-1).\end{aligned}$$

Далее утверждение леммы следует из формул (2.2)–(2.4). □

**Лемма 3.** 1) *Пусть* $1\leqslant l\leqslant n-2$. *Тогда:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(s_{2l}^*)=V\Big(e_0+\sum_{i=1}^{n-1-l}\tau_{i+l,i}\Big)\oplus V(\beta^2)\\ \oplus V(\beta^3)\oplus\Big(\bigoplus_{i=n-l}^{n-1}V(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)\Big),\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\mathrm{Ker}(\sigma(s_{2l})^*)=V(\beta^2)\oplus V(\beta^3)\oplus\Big(\bigoplus_{i=n-l}^{n-1}V(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)\Big),\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}((s'_{2l})^*) = \operatorname{Ker}(\sigma(s'_{2l})^*) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{3} V(\beta^q)\Big)\\ \oplus\Big(\bigoplus_{i=n-l}^{n-1} V(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)\Big).\end{aligned} \tag{3.16}$$

2) *Пусть* $0 \leqslant l \leqslant n-2$. *Тогда:*

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(s^*_{2l+1}) &= V(e_0+\beta)\oplus V(\beta^2)\oplus V(\beta^3)\\ &\oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{n-2-l} V(\tau_{i+l+1,i}+\nu_{n-1-l})\Big)\oplus V(\mu_{l+1}+\nu_{n-1-l})\\ &\oplus V\Big(\sum_{i=n-l}^{n-1}\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i+\mu_{l+1}\beta+\beta\nu_{n-1-l}\Big),\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\sigma(s_{2l+1})^*) &= V(e_0+\nu_{n-1-l}+\beta\nu_{n-1-l})\\ &\oplus V(\beta+\beta\nu_{n-1-l})\oplus V(\beta^2)\oplus V(\beta^3)\\ &\oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{n-2-l} V(\tau_{i+l+1,i}+\nu_{n-1-l})\Big)\\ &\oplus V(\mu_{l+1}+\nu_{n-1-l})\\ &\oplus V\Big(\sum_{i=n-l}^{n-1}\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i+\mu_{l+1}\beta+\beta\nu_{n-1-l}\Big),\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}((s'_{2l+1})^*) &= \operatorname{Ker}(\sigma(s'_{2l+1})^*)\\ &= \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-2-l} V(\tau_{i+l+1,i})\Big)\oplus V(\mu_{l+1})\oplus V(\nu_{n-1-l})\\ &\oplus V\Big(\sum_{i=n-l}^{n-1}\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i+\mu_{l+1}\beta+\beta\nu_{n-1-l}\Big).\end{aligned} \tag{3.19}$$

3) *Выполнены равенства:*

$$\operatorname{Ker}(s^*_0) = V\Big(\sum_{i=0}^{n-1} e_i\Big)\oplus V(\beta^2)\oplus V(\beta^3)\oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} V(\mu_i\nu_i)\Big), \tag{3.20}$$

$$\operatorname{Ker}(\sigma(s_0)^*) = V(\beta^2)\oplus V(\beta^3)\oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} V(\mu_i\nu_i)\Big), \tag{3.21}$$

$$\mathrm{Ker}(\sigma(s_0')^*) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{3} V(\beta^q)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} V(\mu_i\nu_i)\Big). \tag{3.22}$$

4) *Пусть* $n \vdots 2$. *Тогда:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}((s'_{2n-2})^*) = \mathrm{Ker}(\sigma(s'_{2n-2})^*) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{3} V(\beta^q)\Big)\\ \oplus V\Big(\sum_{i=1}^{n-1} e_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} V(\mu_i\nu_i)\Big).\end{aligned} \tag{3.23}$$

5) *Пусть* $n \not\vdots 2$. *Тогда:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}((s_{2n-2}|_{T_0})^*) = V(e_0) \oplus V\Big(\beta + \sum_{i=1}^{n-1} e_i\Big)\\ \oplus V(\beta^2) \oplus V(\beta^3) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} V(\mu_i\nu_i)\Big),\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\mathrm{Ker}(\sigma(s'_{2n-2})^*) = \Big(\bigoplus_{q=0}^{3} V(\beta^q)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} V(\mu_i\nu_i)\Big). \tag{3.25}$$

**Доказательство.** 1) Пусть $w \in \mathrm{Hom}_\Lambda(T_{2l}, R)$, $1 \leqslant l \leqslant n-2$. Тогда

$$w = \sum_{q=0}^{3} a_q(\beta^q)^* + \sum_{i=1}^{n-1-l} b_i\tau^*_{i+l,i} + \sum_{i=n-l}^{n-1} c_i(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^*$$

для некоторых $a_q$, $b_i$, $c_i \in k$. В этом случае условие $w \in \mathrm{Ker}(s^*_{2l})$ равносильно тому, что $(w \circ s_{2l})(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) = 0$ для всех $i_1$, $i_2$ таких, что $P_{[i_1][i_2]}$ – одно из прямых слагаемых в разложении (2.3). Таким образом, получаем следующие равенства:

$$\begin{aligned}&b_i = b_{i+1} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2-l),\\ &a_1 = 0, b_{n-1-l} = a_0, a_0 = b_1.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Следовательно, условие $w \in \mathrm{Ker}(s_{2l}^*)$ равносильно тому, что

$$\begin{aligned} w = a_0\left(e_0^* + \sum_{i=1}^{n-1-l} \tau_{i+l,i}^*\right) + a_2(\beta^2)^* + a_3(\beta^3)^* \\ + \sum_{i=n-l}^{n-1} c_i(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^* \end{aligned} \tag{3.27}$$

для некоторых $a_0, a_2, a_3, c_i \in k$, т.е. тому, что $w$ содержится в правой части формулы (3.14). Если мы будем проверять выполнение условия $w \in \mathrm{Ker}(\sigma(s_{2l})^*)$ вместо $w \in \mathrm{Ker}(s_{2l}^*)$, то верными останутся все равенства (3.26) и, кроме того, дополнительно появится равенство $a_0 = 0$. Далее несложно получить равенство (3.15). Легко проверить, что для любых $a_q, b_i, c_i \in k$ верно равенство $\big(w \circ \big(s'_{2l} - \sigma(s'_{2l})\big)\big)\big|_{T'_{2l+1}} = 0$. Следовательно, $\mathrm{Ker}((s'_{2l})^*) = \mathrm{Ker}(\sigma(s'_{2l})^*)$. Аналогично предыдущим случаям получаем, что условие $w \in \mathrm{Ker}((s'_{2l})^*)$ равносильно тому, что выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} &b_i = b_{i+1} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2-l), \\ &b_{n-1-l} = 0, b_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Далее несложно показать, что равенства (3.28) равносильны тому, что $w$ содержится в правой части формулы (3.16).

2) Пусть $w \in \mathrm{Hom}_\Lambda(T_{2l+1}, R)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$. Тогда

$$\begin{aligned} w = \sum_{q=0}^{3} a_q(\beta^q)^* + \sum_{i=1}^{n-2-l} b_i \tau_{i+l+1,i}^* + \sum_{i=n-l}^{n-1} c_i(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^* \\ + g_0\mu_{l+1}^* + g_1(\mu_{l+1}\beta)^* + h_0\nu_{n-1-l}^* + h_1(\beta\nu_{n-1-l})^* \end{aligned}$$

для некоторых $a_q, b_i, c_i, g_0, g_1, h_0, h_1 \in k$. Как и в пункте 1), получаем, что условие $w \in \mathrm{Ker}(s_{2l+1}^*)$ равносильно тому, что выполнены следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &g_0 + \sum_{i=1}^{n-2-l} b_i + h_0 = 0, h_1 = g_1, \\ &c_i = c_{i+1} \quad (n-l \leqslant i \leqslant n-2), \\ &h_1 + a_0 + a_1 + c_{n-l} = 0, c_{n-1} = g_1 \quad (l \geqslant 1), \\ &h_1 + a_0 + a_1 + g_1 = 0 \quad (l = 0). \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

Следовательно, $h_1 = c_{n-1-l} = \dots = c_{n-1} = g_1$, $a_0 = a_1$ и $h_0 = g_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-2-l} b_i$. Тогда несложно показать, что равенства (3.29) равносильны тому, что $w$ содержится в правой части формулы (3.18). Если мы будем проверять выполнение условия $w \in \operatorname{Ker}(\sigma(s_{2l+1})^*)$ вместо $w \in \operatorname{Ker}(s^*_{2l+1})$, то верными останутся все равенства (3.29), кроме первых двух. Они же заменятся на равенство $g_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-2-l} b_i + h_0 + a_0 = 0$. Тогда $c_{n-1-l} = \dots = c_{n-1} = g_1$, $h_1 = g_1 + a_0 + a_1$, $h_0 = g_0 + \sum\limits_{i=1}^{n-2-l} b_i + a_0$. Далее несложно получить равенство (3.18). Пусть теперь $w \in \operatorname{Hom}_\Lambda(T'_{2l+1}, R)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$. Тогда

$$w = \sum_{i=1}^{n-2-l} b_i \tau^*_{i+l+1,i} + \sum_{i=n-l}^{n-1} c_i(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^* + g_0\mu^*_{l+1}$$
$$+ g_1(\mu_{l+1}\beta)^* + h_0\nu^*_{n-1-l} + h_1(\beta\nu_{n-1-l})^*$$

для некоторых $b_i, c_i, g_0, g_1, h_0, h_1 \in k$. Легко проверить, что $\big(w\circ\big(s'_{2l+1} - \sigma(s'_{2l+1})\big)\big)\big|_{T_{2l+2}} = 0$, то есть $\operatorname{Ker}((s'_{2l+1})^*) = \operatorname{Ker}(\sigma(s'_{2l+1})^*)$. Далее, условие $w \in \operatorname{Ker}((s'_{2l+1})^*)$ равносильно тому, что выполнены следующие равенства:

$$c_i = c_{i+1} \quad (n-l \leqslant i \leqslant n-2),$$
$$h_1 = c_{n-l}, c_{n-1} = g_1 \quad (l \geqslant 1),$$
$$h_1 = g_1 \quad (l = 0).$$

Следовательно, $h_1 = c_{n-1-l} = \dots = c_{n-1} = g_1$. Тогда условие $w \in \operatorname{Ker}((s'_{2l+1})^*)$ равносильно тому, что $w$ принадлежит правой части формулы (3.19).

3) Пусть $w \in \operatorname{Hom}_\Lambda(T_0, R)$. Легко проверить, что $(\mu_i\nu_i)^* \in \operatorname{Ker} d^*$ для $d \in \{s_0, \sigma(s_0), \sigma(s'_0)\}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Далее доказательство п. 3) в каждом из трех случаев получается из доказательства пункта 1) в соответствующем случае подстановкой $l = 0$ и прибавлением к получившемуся ответу $\bigoplus\limits_{i=1}^{n-1} V(\mu_i\nu_i) \subset \operatorname{Ker} d^*$, где $d$ – соответствующий гомоморфизм.

Прежде чем переходить к доказательству пунктов 4) и 5), сделаем ряд общих наблюдений. Пусть $w \in \operatorname{Hom}_\Lambda(T_{2n-2}, R)$, то есть

$w = \sum\limits_{q=0}^{3} a_q(\beta^q)^* + \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_i e_i^* + \sum\limits_{i=1}^{n-1} c_i(\mu_i\nu_i)^*$ для некоторых $a_q, b_i, c_i \in k$. Легко проверить, что для любых $a_q, b_i, c_i \in k$ выполнено равенство $\big(w\circ\big(s'_{2n-2}-\sigma(s'_{2n-2})\big)\big)\big|_{T'_0} = 0$, то есть $\mathrm{Ker}((s'_{2n-2})^*) = \mathrm{Ker}(\sigma(s'_{2n-2})^*)$. Далее, условие $w \in \mathrm{Ker}((s'_{n-2})^*)$ равносильно тому, что выполнены следующие равенства:

$$\sum_{q=i}^{n-1} b_q + \sum_{q=1}^{i} b_q = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1). \tag{3.30}$$

Получаем также, что условие $w \in \mathrm{Ker}((s_{n-2}|_{T_0})^*)$ равносильно тому, что выполнены равенства:

$$\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{n-1} b_q = 0, \\ &\sum_{q=i}^{n-1} b_q + a_1 + \sum_{q=1}^{i} b_q = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1). \end{aligned} \tag{3.31}$$

4) Пусть $n \vdots 2$. Тогда условие $w \in \mathrm{Ker}((s'_{n-2})^*)$ равносильно тому, что $\sum\limits_{q=1}^{n-1} b_q + b_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то есть тому, что $b_1 = \dots = b_{n-1} = b$ для некоторого $b \in k$. Следовательно, условие $w \in \mathrm{Ker}((s'_{2n-2})^*)$ равносильно тому, что $w$ содержится в правой части формулы (3.23).

5) Пусть $n \not\vdots 2$. Тогда условие $w \in \mathrm{Ker}\left((s_{n-2}\big|_{T_0})^*\right)$ равносильно тому, что $\sum\limits_{q=1}^{n-1} b_q + b_i + a_1 = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то есть тому, что $b_1 = \dots = b_{n-1} = a_1$, а это равносильно тому, что $w$ содержится в правой части формулы (3.24). Наконец, условие $w \in \mathrm{Ker}((s'_{n-2})^*)$ в этом случае равносильно выполнению равенства $\sum\limits_{q=1}^{n-1} b_q + b_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то есть тому, что $b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$. Несложно показать, что последнее равенство равносильно тому, что $w$ содержится в правой части формулы (3.25). $\square$

**Доказательство теоремы 2.** Все утверждения теоремы проверяются прямыми вычислениями с использованием леммы 3, формулы

$\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = \dim_k \mathrm{Ker}(d_t^*) + \dim_k \mathrm{Ker}(d_{t-1}^*) - \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t-1}, R)$ для $t > 0$ и формулы $\dim_k \mathrm{HH}^0(R) = \mathrm{Ker}(d_0^*)$ (все обозначения взяты из теоремы 1). При этом надо учитывать следующее. Если $t = m(2n-1) + 2l$, где $0 \leqslant l \leqslant n-1$, или $t = m(2n-1) + 2l + 1$, где $0 \leqslant l \leqslant n-2$, то

$$d_t = \begin{cases} s_t, & \text{если } m \vdots 2,\ l \vdots 2, \\ s'_t, & \text{если } m \vdots 2,\ l \not\vdots 2, \\ \sigma(s_t), & \text{если } m \not\vdots 2 \text{ и либо } n \vdots 2 \text{ и } l \vdots 2, \text{ либо } n \not\vdots 2 \text{ и } l \not\vdots 2, \\ \sigma(s'_t), & \text{если } m \not\vdots 2 \text{ и либо } n \vdots 2 \text{ и } l \not\vdots 2, \text{ либо } n \not\vdots 2 \text{ и } l \vdots 2, \end{cases}$$

за исключением случая $t = m(2n-1) + 2n - 2$, $m \vdots 2$, $n \not\vdots 2$, в котором $d_t = s_{2n-2}|_{T_0}$. □

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

**Следствие 4.** a) $\dim_k \mathrm{HH}^0(R) = n + 2$;

b) $\dim_k \mathrm{HH}^1(R) = 3$;

c) $\dim_k \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} 2, & \textit{если } n > 2, \\ 3, & \textit{если } n = 2. \end{cases}$

## §4. Базисы в $\mathrm{HH}^t(R)$

В этом параграфе для каждого $t \geqslant 0$ мы выделим в $\mathrm{Ker}\, d_t^*$ элементы, когомологические классы которых являются $k$-базисом $\mathrm{HH}^t(R)$. Если $f \in \mathrm{Ker}\, d_t^*$, то когомологический класс элемента $f$ мы будем обозначать через $f[t]$.

**Предложение 1.** 1) *Пусть* $t = 2l + m(2n-1)$, $1 \leqslant l \leqslant n-2$, $m \geqslant 0$. *Тогда:*

a) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \vdots 2$, *то элементы* $\big(e_0^* + \sum_{i=1}^{n-1-l} \tau_{i+l,i}^*\big)[t]$, $(\beta^2)^*[t]$ *и* $(\beta^3)^*[t]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^t(R)$;

b) *если* $m \not\vdots 2$ *и числа* $l$ *и* $n$ *имеют одинаковую четность, то элементы* $(\beta^2)^*[t]$ *и* $(\beta[t]^3)^*[t]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^t(R)$;

c) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \not\vdots 2$, *то элементы* $e_0^*[t]$ *и* $\beta^*[t]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^t(R)$;

d) *если* $m \not\vdots 2$ *и числа* $l$ *и* $n$ *имеют разную четность, то элементы* $e_0^*[t]$, $\beta^*[t]$ *и* $(\beta^3)^*[t]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^t(R)$.

2) *Пусть* $t = 2l + 1 + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, $m \geqslant 0$. *Тогда:*

a) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \vdots 2$, *то элементы* $\big(e_0^* + \beta^*\big)[t]$, $(\beta^2)^*[t]$ *и* $(\beta^3)^*[t]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^t(R)$;

b) *если* $m \not\vdots 2$ *и числа* $l$ *и* $n$ *имеют одинаковую четность, то элементы* $\big(e_0^* + \nu_{n-1-l}^* + (\beta\nu_{n-1-l})^*\big)[t]$, $\big(\beta^* + (\beta\nu_{n-1-l})^*\big)[t]$ *и* $(\beta^3)^*[t]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^t(R)$;

c) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \not\vdots 2$ *или* $m \not\vdots 2$, *а числа* $l$ *и* $n$ *имеют разную четность, то элементы* $\mu_{l+1}^*[t]$ *и* $\Big(\sum\limits_{i=n-l}^{n-1} (\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^* + (\mu_{l+1}\beta)^* + (\beta\nu_{n-1-l})^*\Big)[t]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^t(R)$.

3) *Пусть* $n \vdots 2$. *Тогда:*

a) *если* $m \geqslant 1$, *то элементы* $\Big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} e_i^*\Big)[m(4n-2)]$, $(\beta^2)^*[m(4n-2)]$, $(\beta^3)^*[m(4n-2)]$ *и* $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\mu_i\nu_i)^*\Big)[m(4n-2)]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^{m(4n-2)}(R)$;

b) *если* $m \geqslant 0$, *то элементы* $(\beta^2)^*[(2m+1)(2n-1)]$, $(\beta^3)^*[(2m+1)(2n-1)]$ *и* $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} (\mu_i\nu_i)^*\Big)[(2m+1)(2n-1)]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^{(2m+1)(2n-1)}(R)$;

c) *если* $m \geqslant 1$, *то элементы* $e_0^*[m(4n-2)-1]$, $\beta^*[m(4n-2)-1]$, $(\beta^3)^*[m(4n-2)-1]$ *и* $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i^*\Big)[m(4n-2)-1]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^{m(4n-2)-1}(R)$;

d) *если* $m \geqslant 0$, *то элементы* $e_0^*[(2m+1)(2n-1)-1]$, $\beta^*[(2m+1)(2n-1)-1]$ *и* $\Big(\sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i^*\Big)[(2m+1)(2n-1)-1]$ *образуют* $k$*-базис* $\mathrm{HH}^{(2m+1)(2n-1)-1}(R)$.

4) *Пусть* $n \not\vdots 2$. *Тогда:*

a) *если* $m \geqslant 1$, *то элементы* $\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} e_i^*\big)[m(4n-2)]$, $(\beta^2)^*[m(4n-2)]$, $(\beta^3)^*[m(4n-2)]$ *образуют* $k$-*базис* $\mathrm{HH}^{m(4n-2)}(R)$;

b) *если* $m \geqslant 0$, *то элементы* $e_0^*[(2m+1)(2n-1)]$, $\beta^*[(2m+1)(2n-1)]$, $(\beta^2)^*[(2m+1)(2n-1)]$ *и* $(\beta^3)^*[(2m+1)(2n-1)]$ *образуют* $k$-*базис* $\mathrm{HH}^{(2m+1)(2n-1)}(R)$;

c) *если* $m \geqslant 1$, *то элементы* $e_0^*[m(4n-2)-1]$, $\beta^*[m(4n-2)-1]$, $(\beta^3)^*[m(4n-2)-1]$ *образуют* $k$-*базис* $\mathrm{HH}^{m(4n-2)-1}(R)$;

d) *если* $m \geqslant 0$, *то элементы* $e_0^*[(2m+1)(2n-1)-1]$, $\big(\beta^* + \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_i^*\big)[(2m+1)(2n-1)-1]$, $(\beta^2)^*[(2m+1)(2n-1)-1]$ *и* $(\beta^3)^*[(2m+1)(2n-1)-1]$ *образуют* $k$-*базис* $\mathrm{HH}^{(2m+1)(2n-1)-1}(R)$.

5) *Элементы* $\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} e_i^*\big)[0]$, $(\beta^2)^*[0]$, $(\beta^3)^*[0]$ *и* $(\mu_i\nu_i)^*[0]$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ *образуют* $k$-*базис* $\mathrm{HH}^0(R)$.

**Лемма 4.** 1) *Пусть* $t = 2l + m(2n-1)$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$, $m \geqslant 0$. *Тогда:*

a) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \vdots 2$ *или* $m \not\vdots 2$, *а числа* $l$ *и* $n$ *имеют одинаковую четность, то*

$$(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^*[t] = 0 \ \ (n-l \leqslant i \leqslant n-1);$$

b) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \not\vdots 2$, *то*

$$(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^*[t] = (\beta^2)^*[t] = (\beta^3)^*[t] = 0 \ \ (n-l \leqslant i \leqslant n-1);$$

c) *если* $m \not\vdots 2$ *и числа* $l$ *и* $n$ *имеют разную четность, то*

$$(\mu_{i+l-(n-1)}\nu_i)^*[t] = (\beta^3)^*[t] \ \ (n-l \leqslant i \leqslant n-1), (\beta^2)^*[t] = 0.$$

2) *Пусть* $t = 2l + 1 + m(2n-1)$, $0 \leqslant l \leqslant n-2$, $m \geqslant 0$. *Тогда:*

a) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \vdots 2$, *то*

$$\Big(\sum_{q=n-l}^{n-1} (\mu_{q+l-(n-1)}\nu_q)^* + (\beta\nu_{n-1-l})^* + (\mu_{l+1}\beta)^*\Big)[t] = 0,$$
$$\big(\tau_{i+l+1,i}^* + \nu_{n-1-l}^*\big)[t] = \big(\mu_{l+1}^* + \nu_{n-1-l}^*\big)[t] = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-2-l);$$

b) *если* $m \not\vdots 2$ *и числа* $l$ *и* $n$ *имеют одинаковую четность, то*

$$\Big(\sum_{q=n-l}^{n-1}(\mu_{q+l-(n-1)}\nu_q)^* + (\beta\nu_{n-1-l})^* + (\mu_{l+1}\beta)^*\Big)[t] = (\beta^2)^*[t] = (\beta^3)^*[t],$$
$$\big(\tau^*_{i+l+1,i} + \nu^*_{n-1-l}\big)[t] = \big(\mu^*_{l+1} + \nu^*_{n-1-l}\big)[t] = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-2-l);$$

c) *если* $m \vdots 2$ *и* $l \not\vdots 2$ *или* $m \not\vdots 2$, *а числа* $l$ *и* $n$ *имеют разную четность, то*

$$\tau^*_{i+l+1,i}[t] = \mu^*_{l+1}[t] = \nu^*_{n-1-l}[t] \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-2-l).$$

3) *Пусть* $n \vdots 2$. *Тогда, если* $m \geqslant 1$, *то*

$$(\mu_i\nu_i)^*[m(2n-1)] = \Big(\sum_{q=1}^{n-1}(\mu_q\nu_q)^*\Big)[m(2n-1)] \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

4) *Пусть* $n \not\vdots 2$. *Тогда:*

a) *если* $m \geqslant 1$, *то*

$$(\mu_i\nu_i)^*[m(4n-2)] = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1);$$

b) *если* $m \geqslant 0$, *то*

$$(\mu_i\nu_i)^*[(2m+1)(2n-1)] = (\beta^2)^*[(2m+1)(2n-1)] \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

**Доказательство.** В каждом из пунктов надо показать, что некоторые элементы вида $f[t]$ равны 0, то есть, что для каждого $f$ существует такое $f' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t-1}, R)$, что $f' \circ d_{t-1} = f$. Для всех случаев мы просто перечислим элементы, которые надо брать в качестве $f'$ (в этих списках соответствующие элементы $f'$ стоят в том же порядке, что и указанные в каждом из подпунктов когомологические классы). Проверку необходимых равенств мы предоставляем читателю.

1a) $(\beta\nu_{n-l})^* + \sum\limits_{q=n-l+1}^{i}(\mu_{q+l-n}\nu_q)^*$ $(n-l \leqslant i \leqslant n-1)$.

1b) $\beta^* + \sum\limits_{q=n-l+1}^{i}(\mu_{q+l-n}\nu_q)^*$ $(n-l \leqslant i \leqslant n-1)$, $\nu^*_{n-l}$ и $\beta^* + (\beta\nu_{n-l})^*$.

1c) $(\beta\nu_{n-l})^* + \sum\limits_{q=n-l+1}^{i}(\mu_{q+l-n}\nu_q)^*$ $(n-l \leqslant i \leqslant n-1)$ и $\nu^*_{n-l}$.

2a) $\beta^*$, $\sum\limits_{q=i+1}^{n-1-l}\tau^*_{q+l,q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2-l)$ и $\sum\limits_{q=1}^{n-1-l}\tau^*_{q+l,q}$.

2b) $\beta^*$, $e_0^* + \sum\limits_{q=1}^{n-1-l} \tau^*_{q+l,q}$, $\sum\limits_{q=i+1}^{n-1-l} \tau^*_{q+l,q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2-l)$ и $\sum\limits_{q=1}^{n-1-l} \tau^*_{q+l,q}$.

2c) $\sum\limits_{q=i+1}^{n-1-l} \tau^*_{q+l,q}$ $(1 \leqslant i \leqslant n-2-l)$ и $\sum\limits_{q=1}^{n-1-l} \tau^*_{q+l,q}$.

3) $e_i^*$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

4a) $\sum\limits_{q=1}^{n-1} e_q^* + e_i^*$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

4b) $\beta^* + e_i^*$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. □

**Доказательство предложения 1.** Из лемм 3 и 4 следует, что в каждом из случаев, описанных в предложении, соответствующее множество элементов пространства $\mathrm{HH}^t(R)$ порождает его над $k$. Но во всех рассматриваемых случаях ввиду теоремы 2 получаем, что $\dim_k \mathrm{HH}^t(R)$ равно числу элементов в соответствующем множестве порождающих. Следовательно, предложение 1 доказано. □

## §5. Вычисление трансляций

Любой $t$-коцикл $f \in \operatorname{Ker} d_t^*$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\phi_z : Q_{t+z} \to Q_z\}_{z \geqslant 0}$. Гомоморфизм $\phi_z$ назовем $z$-ой трансляцией коцикла $f$ и будем обозначать через $T^z(f)$. Для коциклов $f \in \operatorname{Ker} d_s^*$ и $g \in \operatorname{Ker} d_t^*$ имеем

$$f[s] \cdot g[t] = \big(\mu T^0(f) T^s(g)\big)[s+t].$$

Поэтому для вычисления соотношений в алгебре когомологий Хохшильда требуются трансляции некоторых её элементов.

**Предложение 2.** 1)*Пусть $n \geqslant 3$. Обозначим*

$$e_0^* + \sum_{i=1}^{n-3} \tau^*_{i+2,i} \in \operatorname{Ker} d_4$$

*через $f$. Тогда $T^z(f)$ $(z \geqslant 0)$ можно задать на прямых слагаемых $Q_{z+4}$ следующим образом:*

1.1) *если $z = 2l + m(2n-1)$, где $m \geqslant 0$, $0 \leqslant l \leqslant n-3$, то:*

$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = e_0 \otimes e_0, T^z(f)|_{P_{[i+l+2][i]}} = e_{i+l+2} \otimes \tau_{i+2,i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3-l)$,

$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-3)][i]}} = e_{i+l-(n-3)} \otimes \tau_{i+2,i} \quad (n-2-l \leqslant i \leqslant n-3)$,

$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-3)][i]}} = 0 \quad (n-2 \leqslant i \leqslant n-1)$;

1.2) *если* $z = 2l + 1 + m(2n-1)$, *где* $m \geqslant 0$, $0 \leqslant l \leqslant n-4$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[i+l+3][i]}} = e_{i+l+3} \otimes \tau_{i+2,i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-4-l),$$
$$T^z(f)|_{P_{[0][n-3-l]}} = e_0 \otimes \tau_{n-1-l,n-3-l},$$
$$T^z(f)|_{P_{[l+3][0]}} = \sum_{q=0}^{2} \tau_{l+3,q+l+1} \otimes \mu_q,$$
$$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-3)][i]}} = e_{i+l-(n-3)} \otimes \tau_{i+2,i} \quad (n-2-l \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-3)][i]}} = \tau_{i+l-(n-3),l+1} \otimes (e_0+\beta)\nu_i \quad (n-2 \leqslant i \leqslant n-1).$$

*Если, кроме того,* $m \vdots 2$ *и* $l \vdots 2$ *или числа* $l$ *и* $n$ *имеют одинаковую чётность и* $m \not\vdots 2$, *то*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = e_0 \otimes e_0;$$

1.3) *если* $z = 2n-5+m(2n-1)$, *где* $m \geqslant 0$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[i][i]}} = e_i \otimes \tau_{i+2,i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^z(f)|_{P_{[i][i]}} = \tau_{i,n-2} \otimes (e_0+\beta)\nu_i \quad (n-2 \leqslant i \leqslant n-1),$$
$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=0}^{2} (e_0+\sigma^m(\beta))\nu_{q+n-2} \otimes \mu_q, & \text{если } (m+1)n \vdots 2, \\ e_0 \otimes e_0, & \text{если } (m+1)n \not\vdots 2; \end{cases}$$

1.4) *если* $z = 2n-4+m(2n-1)$, *где* $m \geqslant 0$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[i+1][i]}} = e_{i+1} \otimes \tau_{i+2,i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3), T^z(f)|_{P_{[n-1][n-2]}} = 0,$$
$$T^z(f)|_{P_{[1][0]}} = \begin{cases} e_1 \otimes \mu_2, & \text{если } (m+1)n \vdots 2, \\ e_1 \otimes \mu_2 + \alpha_0(e_0+\beta) \otimes e_0, & \text{если } (m+1)n \not\vdots 2, \end{cases}$$
$$T^z(f)|_{P_{[0][n-1]}} = \begin{cases} e_0 \otimes (e_0+\beta)\alpha_{n-1}, & \text{если } (m+1)n \vdots 2, \\ (e_0+\beta^2) \otimes (e_0+\beta)\alpha_{n-1}, & \text{если } (m+1)n \not\vdots 2. \end{cases}$$

*Кроме того, если* $(m+1)n \vdots 2$, *то*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = (e_0+\sigma^m(\beta)+\beta^2) \otimes e_0 + (e_0+\sigma^m(\beta)) \otimes \beta + e_0 \otimes \beta^2;$$

1.5) *если* $z = 2n-3+m(2n-1)$, *где* $m \geqslant 0$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[i+1][i]}} = e_{i+1} \otimes \tau_{i+2,i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^z(f)|_{P_{[n-1][n-2]}} = e_{n-1} \otimes (e_0+\beta)\nu_{n-2}, T^z(f)|_{P_{[1][n-1]}} = 0,$$
$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = \begin{cases} (e_0+\beta^2+\beta^3)\otimes e_0 \\ \qquad\qquad + (\beta^2+\beta^3)\otimes\beta, & \text{если } (m+1)n \vdots 2, \\ \sum\limits_{q=0}^{1} \nu_{q+n-1}\otimes\mu_q(e_0+\beta), & \text{если } (m+1)n \not\vdots 2; \end{cases}$$

1.6) *если* $z = 2n-2+m(2n-1)$, *где* $m \geqslant 0$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[i+2][i]}} = e_{i+2} \otimes \tau_{i+2,i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^z(f)|_{P_{[2][0]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{2} \tau_{2,q}\otimes\mu_q + \mu_2(e_0+\beta)\otimes e_0, & \text{если } (m+1)n \vdots 2, \\ \sum\limits_{q=1}^{2} \tau_{2,q}\otimes\mu_q + \mu_2\otimes(e_0+\beta) \\ \qquad + \sum\limits_{q=2}^{n-1} \mu_2\nu_q\otimes\mu_q, & \text{если } (m+1)n \not\vdots 2, \end{cases}$$
$$T^z(f)|_{P_{[0][n-2]}} = \begin{cases} e_0\otimes(e_0+\beta)\nu_{n-2}, & \text{если } (m+1)n \vdots 2, \\ 0, & \text{если } (m+1)n \not\vdots 2, \end{cases}$$
$$T^z(f)|_{[1][n-1]} = \begin{cases} \alpha_0(e_0+\beta)\otimes(e_0+\beta)\alpha_{n-1}, & \text{если } (m+1)n \vdots 2, \\ \alpha_0\otimes\alpha_{n-1}, & \text{если } (m+1)n \not\vdots 2. \end{cases}$$

*Кроме того, если* $(m+1)n \not\vdots 2$, *то*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = (e_0+\beta^2)\otimes e_0.$$

2) *Пусть* $n \vdots 2$. *Обозначим* $\beta^* + (\beta\alpha_{n-1})^* \in \operatorname{Ker} d_{2n}$ *через* $f$. *Тогда* $T^z(f)$ $(0 \leqslant z \leqslant 2n-2)$ *можно задать на прямых слагаемых* $Q_{z+2n}$ *следующим образом:*

2.1) *если* $z = 2l$, *где* $0 \leqslant l \leqslant n-2$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[0][n-1-l]}} = \begin{cases} \beta \otimes \nu_{n-1-l} + \sum\limits_{q=n-l}^{n-1} \beta\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,n-1-l}, & \text{если } l \vdots 2, \\ (\beta + \beta^2 + \beta^3) \otimes \nu_{n-1-l} & \\ \qquad + \sum\limits_{q=n-l}^{n-1} \beta\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,n-1-l}, & \text{если } l \not\vdots 2, \end{cases}$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l+1][i]}} = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-2-l),$$

$$T^z(f)|_{P_{[l+1][0]}} = \begin{cases} 0, & \text{если } l \vdots 2, \\ \mu_{l+1}\beta \otimes (e_0 + \beta), & \text{если } l \not\vdots 2, \end{cases}$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-1)][i]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=i}^{n-1} \mu_{i+l-(n-1)}\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,i}, & \text{если } l \vdots 2, \\ \mu_{i+l-(n-1)}\beta \otimes \nu_i & \\ \quad + \sum\limits_{q=i}^{n-1} \mu_{i+l-(n-1)}\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \tau_{q,i}, & \text{если } l \not\vdots 2 \end{cases}$$

$(n-l \leqslant i \leqslant n-1)$.

*Кроме того, если* $l \vdots 2$, *то*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = \beta \otimes e_0 + \sum_{q=n-l}^{n-1} \beta\nu_{q+l-(n-1)} \otimes \mu_q;$$

2.2) *если* $z = 2l+1$, *где* $0 \leqslant l \leqslant n-2$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = \begin{cases} \beta \otimes e_0 + \sum\limits_{q=0}^{n-1-l} \beta\nu_{q+l+1} \otimes \mu_q, & \text{если } l \vdots 2, \\ \beta^2 \otimes \mu_{n-1-l} + \nu_{l+1} \otimes \beta^3 & \\ \qquad + \sum\limits_{q=0}^{n-1-l} \beta\nu_{q+l+1} \otimes \mu_q, & \text{если } l \not\vdots 2, \end{cases}$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l+1][i]}} = \sum_{q=i}^{n-1-l} \mu_{i+l+1}\beta\nu_{q+l+1} \otimes \tau_{q,i} \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-2-l),$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-2)][i]}} = 0 \ \ (n-1-l \leqslant i \leqslant n-1);$$

2.3) $T^{2n-2}(f)|_{P_{[0][0]}} = \beta^3 \otimes (e_0 + \beta + \beta^2) + \beta \otimes \beta^2 + \sum\limits_{q=1}^{n-1} \beta\nu_q \otimes \mu_q,$

$$T^{2n-2}(f)|_{P_{[i][i]}} = \mu_i\beta \otimes \nu_i + \sum_{q=i}^{n-1} \mu_i\nu_q \otimes \tau_{q,i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

3) *Пусть* $n \not\vdots 2$. *Обозначим* $\beta^* + \sum\limits_{q=1}^{n-1} e_q^* \in \operatorname{Ker} d_{2n-2}$ *через* $f$. *Тогда* $T^z(f)$ $(0 \leqslant z \leqslant 2n-2)$ *можно задать на прямых слагаемых* $Q_{z+2n-2}$ *следующим образом:*

3.1)

$$T^0(f)|_{P_{[0][0]}} = e_0 \otimes \beta, \quad T^0(f)|_{P_{[i][i]}} = e_i \otimes e_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1);$$

3.2) *если* $z = 2l$, *где* $2 \leqslant l \leqslant n-1$, $l \vdots 2$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = \beta \otimes e_0 + \beta \otimes \beta + (e_0 + \beta^2) \otimes \beta^3 + \sum_{q=\frac{n-l+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \nu_{2q+l-n} \otimes \mu_{2q-1},$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l][i]}} = e_{i+l} \otimes e_i \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1-l),$$

$$T^z(f)|_{P_{[0][n-l]}} = (e_0 + \beta + \beta^2) \otimes \nu_{n-l} + (\beta + \beta^2) \otimes \beta\nu_{n-l} + \sum_{q=\frac{n-l+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \beta\nu_{2q+l-n} \otimes \tau_{2q-1,n-l} + \beta\nu_1 \otimes \mu_{n-l}\nu_{n-l},$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l-n][i]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=\frac{i}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \mu_{i+l-n}\nu_{2q+l-(n-1)} \otimes \tau_{2q,i} \\ \quad + \mu_{i+l-n}\beta \otimes \nu_i + \mu_{i+l-n} \otimes \beta\nu_i \\ \quad + \sum\limits_{q=\frac{n-l+1}{2}}^{\frac{i}{2}} \tau_{i+l-n,2q+l-n} \otimes \mu_{2q-1}\nu_i, & \text{если } i \vdots 2, \\ \sum\limits_{q=\frac{i+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \mu_{i+l-n}\nu_{2q+l-n} \otimes \tau_{2q-1,i} \\ \quad + \mu_{i+l-n}(e_0 + \beta) \otimes \nu_i \\ \quad + \sum\limits_{q=\frac{n-l+1}{2}}^{\frac{i-1}{2}} \tau_{i+l-n,2q+l-(n-1)} \otimes \mu_{2q}\nu_i, & \text{если } i \not\vdots 2 \end{cases}$$

$(n-l+1 \leqslant i \leqslant n-1)$,

$$T^z|_{P_{[l][0]}} = \mu_l \otimes (e_0+\beta+\beta^2)+\mu_l\beta\otimes(e_0+\beta)+\sum_{q=\frac{n-l+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \tau_{l,2q+l-(n-1)}\otimes\mu_{2q}\beta;$$

3.3) *если* $z=2l$, *где* $1\leqslant l\leqslant n-2$, $l\not\vdots 2$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[i+l][i]}} = e_{i+l}\otimes e_i \quad (1\leqslant i\leqslant n-1-l),$$

$$T^z(f)|_{P_{[0][n-l]}} = (\beta+\beta^2)\otimes(e_0+\beta)\nu_{n-l}+\sum_{q=\frac{n-l}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \beta\nu_{2q+l-(n-1)}\otimes\tau_{2q,n-l},$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l-n][i]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=\frac{i}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \mu_{i+l-n}\nu_{2q+l-(n-1)}\otimes\tau_{2q,i} \\ \quad +\mu_{i+l-n}\beta\otimes(e_0+\beta)\nu_i \\ \quad + \sum\limits_{q=\frac{n-l+2}{2}}^{\frac{i}{2}} \tau_{i+l-n,2q+l-n}\otimes\mu_{2q-1}\nu_i, \quad \text{если } i\vdots 2, \\ \sum\limits_{q=\frac{i+1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \mu_{i+l-n}\nu_{2q+l-n}\otimes\tau_{2q-1,i} \\ \quad +\mu_{i+l-n}(e_0+\beta)\otimes\beta\nu_i \\ \quad + \sum\limits_{q=\frac{n-l}{2}}^{\frac{i-1}{2}} \tau_{i+l-n,2q+l-(n-1)}\otimes\mu_{2q}\nu_i, \quad \text{если } i\not\vdots 2, \end{cases}$$

$(n-l+1\leqslant i\leqslant n-1)$,

$$T^z|_{P_{[l][0]}} = \mu_l(e_0+\beta)\otimes\beta+\sum_{q=\frac{n-l}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \tau_{l,2q+l-(n-1)}\otimes\mu_{2q}\beta;$$

3.4) *если* $z=2l+1$, *где* $0\leqslant l\leqslant n-3$, $l\vdots 2$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = e_0 \otimes \beta + \sum_{q=1}^{\frac{n-l-1}{2}} \nu_{2q+l} \otimes \mu_{2q-1},$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l][i]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=\frac{i}{2}}^{\frac{n-l-1}{2}} \mu_{i+l}\beta\nu_{2q+l+1} \otimes \tau_{2q,i} + \mu_{i+l} \otimes \nu_i \\ \quad + \sum\limits_{q=1}^{\frac{i}{2}} \tau_{i+l,2q+l} \otimes \mu_{2q-1}\beta\nu_i, & \text{если } i \vdots 2, \\ \sum\limits_{q=\frac{i+1}{2}}^{\frac{n-l-1}{2}} \mu_{i+l}\beta\nu_{2q+l} \otimes \tau_{2q-1,i} \\ \quad + \sum\limits_{q=0}^{\frac{i-1}{2}} \tau_{i+l,2q+l+1} \otimes \mu_{2q}\beta\nu_i, & \text{если } i \not\vdots 2, \end{cases}$$

$(1 \leqslant i \leqslant n-1-l)$,

$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-1)][i]}} = e_{i+l-(n-1)} \otimes e_i \ \ (n-l \leqslant i \leqslant n-1)$;

3.5) *если* $z = 2l+1$, *где* $1 \leqslant l \leqslant n-2$, $l \not\vdots 2$, *то:*

$$T^z(f)|_{P_{[0][0]}} = \sum_{q=1}^{\frac{n-l}{2}} (e_0+\beta)\nu_{2q+l} \otimes \mu_{2q-1}\beta + \beta^2 \otimes \mu_{n-l-1}\beta + \sum_{q=0}^{\frac{n-l-2}{2}} \beta\nu_{2q+l+1} \otimes \mu_{2q},$$

$$T^z(f)|_{P_{[i+l][i]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=\frac{i}{2}}^{\frac{n-l-2}{2}} \mu_{i+l}\beta\nu_{2q+l+1} \otimes \tau_{2q,i} \\ \quad + \sum\limits_{q=1}^{\frac{i}{2}} \tau_{i+l,2q+l} \otimes \mu_{2q-1}\beta\nu_i, & \text{если } i \vdots 2, \\ \sum\limits_{q=\frac{i+1}{2}}^{\frac{n-l}{2}} \mu_{i+l}\beta\nu_{2q+l} \otimes \tau_{2q-1,i} \\ \quad + \sum\limits_{q=0}^{\frac{i-1}{2}} \tau_{i+l,2q+l+1} \otimes \mu_{2q}\beta\nu_i, & \text{если } i \not\vdots 2, \end{cases}$$

$(1 \leqslant i \leqslant n-1-l)$,

$T^z(f)|_{P_{[i+l-(n-1)][i]}} = e_{i+l-(n-1)} \otimes e_i \ \ (n-l \leqslant i \leqslant n-1)$;

4) *Обозначим* $e_0^* + \beta^* \in \operatorname{Ker} d_1$ *через* $f$. *Тогда* $T^0(f)|_{P_{[0][0]}} = (e_0 + \beta) \otimes e_0$ *и* $T^0(f) = 0$ *на остальных прямых слагаемых* $Q_1$, *а* $T^1(f)$ *описывается на прямых слагаемых* $Q_2$ *следующим образом:*

$$T^1(f)|_{P_{[0][0]}} = (e_0 + \beta) \otimes e_0, T^1|P_{[1][n-1]} = \alpha_0(e_0 + \beta) \otimes e_{n-1},$$
$$T^1(f)|_{P_{[i+1][i]}} = \mu_{i+1}(e_0 + \beta) \otimes \tau_{n-1,i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2).$$

5) *Обозначим* $e_0^* \in \operatorname{Ker} d_2$ *через* $f$. *Тогда* $T^0(f)|_{P_{[0][0]}} = e_0 \otimes e_0$ *и* $T^0(f) = 0$ *на остальных прямых слагаемых* $Q_2$. *Если* $n \geqslant 3$, *то* $T^1(f)$ *описывается на прямых слагаемых* $Q_3$ *следующим образом:*

$$T^1(f)|_{P_{[1][n-1]}} = \alpha_0 \otimes \alpha_{n-1}, T^1(f)|_{P_{[i+2][i]}} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^1(f)|_{P_{[0][n-2]}} = (e_0 + \beta) \otimes \nu_{n-2}, T^1(f)|_{P_{[2][0]}} = \mu_2 \otimes (e_0 + \beta).$$

*Если* $n = 2$, *то можно взять*

$$T^1(f)|_{P_{[1][1]}} = \alpha_0 \otimes \alpha_1, T^1(f)|_{P_{[0][0]}} = (e_0 + \beta) \otimes (\beta^2 + \beta^3) + \beta^2 \otimes e_0.$$

6) *Обозначим* $\beta^* \in \operatorname{Ker} d_2$ *через* $f$. *Тогда* $T^0(f)|_{P_{[0][0]}} = \beta \otimes e_0$ *и* $T^0(f) = 0$ *на остальных прямых слагаемых* $Q_2$. *Если* $n \geqslant 3$, *то* $T^1(f)$ *и* $T^2(f)$ *описываются на прямых слагаемых* $Q_3$ *и* $Q_4$ *следующим образом:*

$$T^1(f)|_{P_{[1][n-1]}} = \alpha_0\beta \otimes \alpha_{n-1}, T^1(f)|_{P_{[i+2][i]}} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^1(f)|_{P_{[0][n-2]}} = (\beta + \beta^2) \otimes \nu_{n-2}, T^1(f)|_{P_{[2][0]}} = \mu_2\beta \otimes (e_0 + \beta);$$
$$T^2(f)|_{P_{[0][0]}} = \beta^3 \otimes e_0 + (\beta + \beta^2) \otimes \beta^2 + \beta \otimes \beta^3 + \beta\nu_1 \otimes \mu_{n-1},$$
$$T^2(f)|_{P_{[i+2][i]}} = \mu_{i+2}\beta \otimes (e_0 + \beta)\nu_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^2(f)|_{P_{[1][n-2]}} = 0, T^2|_{P_{[2][n-1]}} = 0.$$

*Если* $n = 2$, *то можно взять*

$$T^1(f)|_{P_{[1][1]}} = \alpha_0\beta \otimes \alpha_1, T^1(f)|_{P_{[0][0]}} = (\beta + \beta^2) \otimes (\beta^2 + \beta^3) + \beta^3 \otimes e_0.$$

7) *Пусть* $n \vdots 2$, $m \geqslant 0$. *Обозначим* $\sum\limits_{q=1}^{n-1} e_q^* \in \operatorname{Ker} d_{2n-2+m(2n-1)}$ *через* $f$. *Тогда* $T^0(f)|_{P_{[0][0]}} = 0$ *и* $T^0(f)|_{P_{[i][i]}} = e_i \otimes e_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, *а*

*$T^1(f)$ описывается на прямых слагаемых $Q_{(m+1)(2n-1)} \simeq T_0$ следующим образом:*

$$T^1(f)|_{P_{[0][0]}} = \sum_{q=0}^{\frac{n-2}{2}} \beta\nu_{2q+1} \otimes \mu_{2q} + \sum_{q=0}^{\frac{n-2}{2}} \beta\nu_{2q+1} \otimes \mu_{2q}\beta + \sum_{q=0}^{\frac{n-2}{2}} \nu_{2q+1} \otimes \mu_{2q}\beta$$
$$+(\beta^2+\beta^3) \otimes e_0,$$

$$T^1(f)|_{P_{[i][i]}} = \begin{cases} \sum\limits_{q=\frac{i}{2}}^{\frac{n-2}{2}} \mu_i\nu_{2q+1} \otimes \tau_{2q,i} + \sum\limits_{q=1}^{\frac{i}{2}} \tau_{i,2q} \otimes \mu_{2q-1}\nu_i, & \text{если } i \vdots 2, \\ \sum\limits_{q=\frac{i+1}{2}}^{\frac{n}{2}} \mu_i\nu_{2q} \otimes \tau_{2q-1,i} + \sum\limits_{q=0}^{\frac{i-1}{2}} \tau_{i,2q+1} \otimes \mu_{2q}\nu_i, & \text{если } i \not\vdots 2, \end{cases}$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

8) *Пусть $n=2$. Обозначим $e_0^* + \alpha_1^* + (\beta\alpha_1)^* \in \operatorname{Ker} d_4$ через $f$. Тогда $T^z(f)$ $(0 \leqslant z \leqslant 2)$ описывается на прямых слагаемых $Q_{z+4}$ следующим образом:*

$$T^0(f)|_{P_{[0][0]}} = e_0 \otimes e_0, T^0(f)|_{P_{[0][1]}} = (e_0+\beta) \otimes \alpha_1, T^0(f)|_{P_{[1][0]}} = 0;$$
$$T^1(f)|_{P_{[0][0]}} = (e_0+\beta) \otimes (e_0+\beta) + \beta^2 \otimes e_0, T^1(f)|_{P_{[1][1]}} = 0;$$
$$T^2(f)|_{P_{[0][0]}} = e_0 \otimes \beta^2 + (\beta^2+\beta^3) \otimes (e_0+\beta) + \alpha_1 \otimes \alpha_0(e_0+\beta),$$
$$T^2(f)|_{P_{[1][1]}} = \alpha_0(e_0+\beta) \otimes (e_0+\beta)\alpha_1.$$

9) *Пусть $n \geqslant 3$. Обозначим $\mu_2^* \in \operatorname{Ker} d_3$ через $f$. Тогда $T^0(f)|_{P_{[2][0]}} = \mu_2 \otimes e_0$ и $T^0(f) = 0$ на остальных прямых слагаемых $Q_3$. Если $n \geqslant 4$, то $T^z(f)$ $(1 \leqslant z \leqslant 3)$ описываются на прямых слагаемых $Q_{z+3}$ следующим образом:*

$$T^1(f)|_{P_{[0][0]}} = \beta^2 \otimes (e_0+\beta), T^1(f)|_{P_{[i+2][i]}} = \sum_{q=0}^{i} \tau_{i+2,q+1} \otimes \mu_q\beta\nu_i$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n-3),$$
$$T^1(f)|_{P_{[1][n-2]}} = 0, T^1(f)|_{P_{[2][n-1]}} = \alpha_1 \otimes (e_0+\beta)\alpha_{n-1};$$
$$T^2(f)|_{P_{[0][0]}} = (\beta^2+\beta^3) \otimes e_0 + \nu_1 \otimes \mu_{n-1}, T^2(f)|_{P_{[i+3][i]}} = 0$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n-4),$$
$$T^2(f)|_{P_{[0][n-3]}} = e_0 \otimes \beta\nu_{n-3} + \beta \otimes (e_0+\beta)\nu_{n-3}, T^2(f)|_{P_{[3][0]}} = 0,$$
$$T^2(f)|_{P_{[2][n-1]}} = 0, T^2(f)|_{P_{[1][n-2]}} = \mu_1\nu_1 \otimes \alpha_{n-2};$$

$$T^3(f)|_{P_{[0][0]}} = \sum_{q=0}^{n-2} \nu_{q+2} \otimes \mu_q, T^3(f)|_{P_{[i+3][i]}} = \sum_{q=0}^{i} \tau_{i+3,q+2} \otimes \mu_q \beta \nu_i$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n-4),$$
$$T^3(f)|_{P_{[1][n-3]}} = \alpha_0(e_0+\beta) \otimes \alpha_{n-3}, T^3(f)|_{P_{[i-(n-4)][i]}} = 0$$
$$(n-2 \leqslant i \leqslant n-1).$$

*Если $n = 3$, то можно взять*

$$\begin{aligned}
T^1(f)|_{P_{[0][0]}} &= \beta^2 \otimes (e_0+\beta),\\
T^1(f)|_{P_{[1][1]}} &= 0,\\
T^1(f)|_{P_{[2][2]}} &= \alpha_1 \otimes (e_0+\beta)\alpha_2;\\
T^2(f)|_{P_{[0][0]}} &= (\beta^2+\beta^3) \otimes e_0 + \nu_1 \otimes \mu_2,\\
T^2(f)|_{P_{[2][2]}} &= 0,\\
T^2(f)|_{P_{[1][1]}} &= \mu_1\nu_1 \otimes \alpha_1;\\
T^3(f)|_{P_{[0][2]}} &= \nu_1 \otimes e_2,\\
T^3(f)|_{P_{[1][0]}} &= 0,\\
T^3(f)|_{P_{[2][1]}} &= 0.
\end{aligned}$$

10) *Пусть $n \not\vdots 2$. Обозначим $\alpha_0^* \in \operatorname{Ker} d_{2n}$ через $f$. Тогда $T^z(f)$ $(0 \leqslant z \leqslant 3)$ можно задать на прямых слагаемых $Q_{z+2n}$ следующим образом:*

$$\begin{aligned}
T^0(f)|_{P_{[1][0]}} &= \alpha_0 \otimes e_0,\\
T^0(f)|_{P_{[i+1][i]}} &= 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2),\\
T^0(f)|_{P_{[0][n-1]}} &= 0;\\
T^1(f)|_{P_{[0][0]}} &= \beta^2 \otimes (e_0+\beta),\\
T^1(f)|_{P_{[i+1][i]}} &= \sum_{q=0}^{i} \tau_{i+1,q+1} \otimes \mu_q \beta \nu_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-2),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T^1(f)|_{P_{[1][n-1]}} &= e_1 \otimes (e_0+\beta)\alpha_{n-1};\\
T^2(f)|_{P_{[0][0]}} &= (\beta^2+\beta^3)\otimes e_0 + \nu_1 \otimes \mu_{n-1},\\
T^2(f)|_{P_{[i+2][i]}} &= 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant n-3),\\
T^2(f)|_{P_{[1][n-1]}} &= \alpha_0\nu_1 \otimes e_{n-1}, T^2(f)|_{P_{[0][n-2]}}\\
&= e_0 \otimes \beta\nu_{n-2} + \beta \otimes (e_0+\beta)\nu_{n-2};\\
T^3(f)|_{P_{[0][0]}} &= \sum_{q=0}^{n-2} \nu_{q+2} \otimes \mu_q,\\
T^3(f)|_{P_{[i+2][i]}} &= \sum_{q=0}^{i} \tau_{i+2,q+2} \otimes \mu_q \beta\nu_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n-3),\\
T^3(f)|_{P_{[1][n-2]}} &= \alpha_0(e_0+\beta)\otimes e_{n-2}, T^3(f)|_{P_{[2][n-1]}} = 0.
\end{aligned}
$$

**Доказательство.** Доказательство состоит в проверке для соответствующего $f \in \mathrm{HH}^t(R)$ равенств $\mu T^0(f) = f$ и $d_z T^{z+1}(f) = T^z(f) d_{z+t}$ для всех $z$, указанных в соответствующем пункте. В каждом случае с помощью формул для дифференциалов $d_t$, указанных в теореме 1, требуемое равенство проверяется прямыми, хотя и громоздкими, вычислениями, и это предоставляется сделать читателю. □

**Предложение 3.** *Пусть $m \geqslant 0$, $mn \vdots 2$ и $f \in \operatorname{Ker} d_{m(2n-1)}$ задаётся с помощью одной из формул: $f = (\beta^2)^*$, $f = (\beta^3)^*$ или $f = (\mu_i\nu_i)^*$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Тогда $Q_{z+m(2n-1)} = Q_z$ и $T^z(f) : Q_z \to Q_z$ – гомоморфизм, задающийся умножением справа на $\beta^2 \otimes 1$, $\beta^3 \otimes 1$ или $\mu_i\nu_i \otimes 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ в зависимости от значения $f$.*

**Доказательство.** Утверждение следует из того, что $\beta^2$, $\beta^3$ и $\mu_i\nu_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ лежат в центре алгебры $R$, и того, что для $g \in \{\beta^2 \otimes 1, \beta^3 \otimes 1\} \cup \{\mu_i\nu_i \otimes 1\}_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ и любого морфизма $d : P_1 \to P_2$ в категории $\rho\Lambda$ выполнено $gd = g\sigma(d)$. □

**Замечание 3.** Резольвента, описанная в теореме 1, $4n-2$-периодична, и потому $T^z\left(\left(e_0^* + \sum\limits_{q=1}^{n-1} e_i^*\right)[4n-2]\right)$ – изоморфизм для всех $z \geqslant 0$. Следовательно, умножение на $\left(e_0^* + \sum\limits_{q=1}^{n-1} e_i^*\right)[4n-2]$ задаёт изоморфизм между

$\mathrm{HH}^t(R)$ и $\mathrm{HH}^{t+4n-2}(R)$ для $t \geqslant 1$, а также сюръективный гомоморфизм из $\mathrm{HH}^0(R)$ в $\mathrm{HH}^{4n-2}(R)$. Кроме того, мы будем далее пользоваться без особого упоминания тем, что из $\operatorname{char} k = 2$ следует коммутативность алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$.

## §6. Случай $n = 2$

На протяжении этого параграфа полагаем $n = 2$. Сначала введём следующие обозначения для элементов алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = (\beta^2)^*[0], \quad \varepsilon_2 = (\beta^3)^*[0], \quad \Delta = (\alpha_0\alpha_1)^*[0],\\ \rho = \bigl(e_0^* + \beta^*\bigr)[1], \ \delta = \beta^*[2], \chi = e_1^*[2], \quad \xi = (\beta^3)^*[3],\\ \eta_1 = \bigl(e_0^* + \alpha_1^* + (\beta\alpha_1)^*\bigr)[4], \quad \eta_2 = \bigl(\beta^* + (\beta\alpha_1)^*\bigr)[4],\\ \chi' = e_1^*[5], \quad \lambda = \bigl(e_0^* + e_1^*\bigr)[6].\end{gathered}$$

**Предложение 4.** *Пусть $n = 2$. Тогда в $\mathrm{HH}^*(R)$ выполнены следующие соотношения:*

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1\Delta = \varepsilon_2\Delta = \Delta^2 = 0; \tag{6.1}$$

$$\left.\begin{gathered}\varepsilon_1\rho = \bigl((\beta^2)^* + (\beta^3)^*\bigr)[1], \quad \varepsilon_2\rho = (\beta^3)^*[1], \quad \Delta\rho = 0,\\ \rho^2 = e_0^*[2], \quad \varepsilon_1\rho^2 = \varepsilon_2\rho^2 = \rho^3 = 0;\end{gathered}\right\} \tag{6.2}$$

$$\left.\begin{gathered}\rho\delta = (\alpha_0\alpha_1)^*[3],\\ \varepsilon_1\delta = \varepsilon_2\delta = \Delta\delta = \rho^2\delta = \delta^2 = 0,\\ \rho\chi = (\beta^2)^*[3], \quad \delta\chi = (\beta^3)^*[4],\\ \varepsilon_1\chi = \varepsilon_2\chi = \Delta\chi = \rho^2\chi = \chi^2 = 0;\end{gathered}\right\} \tag{6.3}$$

$$\left.\begin{gathered}\rho\xi = (\beta^3)^*[4], \rho^2\xi = (\beta^3)^*[5],\\ \varepsilon_1\xi = \varepsilon_2\xi = \Delta\xi = \delta\xi = \chi\xi = \xi^2 = 0;\end{gathered}\right\} \tag{6.4}$$

$$\left.\begin{gathered}\varepsilon_1\eta_1 = \varepsilon_2\eta_1 = \varepsilon_1\eta_2 = (\beta^3)^*[4], \quad \rho\eta_1 = \bigl(e_0^* + \beta^*\bigr)[5],\\ \rho\eta_2 = \beta^*[5], \quad \rho^2\eta_1 = \rho^2\eta_2 = \delta\eta_1 = \Delta\lambda,\\ \chi\eta_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\lambda, \quad \chi\eta_2 = (\varepsilon_2 + \Delta)\lambda,\\ \xi\eta_1 = \varepsilon_2\rho\lambda, \quad \eta_1^2 = \rho^2\lambda, \quad \eta_1\eta_2 = \delta\lambda,\\ \varepsilon_2\eta_2 = \Delta\eta_1 = \Delta\eta_2 = \delta\eta_2 = \xi\eta_2 = \eta_2^2 = 0;\end{gathered}\right\} \tag{6.5}$$

$$\left.\begin{gathered}\Delta\chi' = (\beta^3)^*[5], \quad \rho\chi' = \varepsilon_1\lambda, \quad \delta\chi' = \varepsilon_2\rho\lambda, \quad \chi\chi' = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho\lambda,\\ \eta_1\chi' = (\rho\chi + \xi)\lambda, \eta_2\chi' = (\rho\delta + \xi)\lambda,\\ \varepsilon_1\chi' = \varepsilon_2\chi' = \xi\chi' = (\chi')^2 = 0.\end{gathered}\right\} \tag{6.6}$$

**Доказательство.** Равенства (6.1) без труда выводятся из предложения 3. Равенства (6.2) следуют из леммы 4 и пп. 4) и 5) предложения 2. Равенства (6.4) следуют из предложения 3 и равенства $\rho^2 = e_0^*[2]$.

Все равенства в (6.3) и (6.5), кроме равенств $\delta\chi = (\beta^3)^*[4]$, $\rho^2\delta = \rho^2\chi = \delta^2 = \chi^2 = 0$, $\eta_1^2 = \rho^2\lambda$, $\eta_1\eta_2 = \delta\lambda$ и $\eta_2^2 = 0$, получаются из пп. 2), 6), 7) и 8) предложения 2 и предложения 3 с использованием леммы 4.

Далее заметим, что из предложения 1 следует, что любой элемент $f \in \mathrm{HH}^4(R)$ записывается в виде $f = \varkappa_1\eta_1 + \varkappa_2\eta_2 + \varkappa_3(\beta^3)^*[4]$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Из уже доказанных равенств следует, что в этом случае $\rho f = \varkappa_1\big(e_0^* + \beta^*\big)[5] + \varkappa_2\beta^*[5] + \varkappa_3(\beta^3)^*[5]$. Так как по предложению 1 элементы $\big(e_0^*+\beta^*\big)[5]$, $\beta^*[5]$ и $(\beta^3)^*[5]$ образуют базис $\mathrm{HH}^5(R)$, то по значению $\rho f$ однозначно восстанавливается значение $f$. Используя предложение 3 и уже доказанные равенства, получаем: $\rho\delta\chi = \delta(\rho\chi) = (\beta^3)^*[5]$, $\rho^3\delta = \rho^3\chi = 0$, $\rho\delta^2 = \delta(\rho\delta) = 0$, $\rho\chi^2 = \chi(\rho\chi) = 0$. Из этих рассуждений следуют оставшиеся равенства из (6.3).

Из того, что $\rho^2$, $\delta$ и $\chi$ образуют базис $\mathrm{HH}^2(R)$, и из замечания 3 следует, что любой элемент $f \in \mathrm{HH}^8(R)$ записывается в виде $f = (\varkappa_1\rho^2 + \varkappa_2\delta + \varkappa_3\chi)\lambda$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив последнее равенство на $\xi$, $\chi$ и $\delta$, получаем соответственно равенства: $\xi f = \varkappa_1\rho^2\xi\lambda$, $\chi f = \varkappa_2\delta\chi\lambda$, $\delta f = \varkappa_3\delta\chi\lambda$. Подставляя в эти равенства вместо $f$ элементы $\eta_1^2$, $\eta_1\eta_2$ и $\eta_2^2$ и пользуясь уже доказанными формулами, получаем в первом случае $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$, во втором – $\varkappa_2 = 1$, $\varkappa_1 = \varkappa_3 = 0$, а в третьем – $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$. Таким образом, все равенства из (6.5) доказаны.

Равенства $\Delta\chi' = (\beta^3)^*[5]$, $\rho\chi' = \varepsilon_1\lambda$ и $\varepsilon_1\chi' = \varepsilon_2\chi' = \xi\chi' = 0$ следуют из п. 7) предложения 2, предложения 3 и леммы 4.

Из того, что $\rho$, $\varepsilon_1\rho$ и $\varepsilon_2\rho$ образуют базис $\mathrm{HH}^1(R)$, и из замечания 3 следует, что любой элемент $f \in \mathrm{HH}^7(R)$ записывается в виде $f = (\varkappa_1\rho + \varkappa_2\varepsilon_1\rho + \varkappa_3\varepsilon_2\rho)\lambda$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив последнее равенство на $\rho$, $\eta_1$ и $\eta_2$, получаем соответственно равенства: $\rho f = \varkappa_1\rho^2\lambda$, $\eta_1 f = \varkappa_1\rho\eta_1\lambda + (\varkappa_2 + \varkappa_3)\rho^2\xi\lambda$, $\eta_2 f = \varkappa_1\rho\eta_2\lambda + \varkappa_2\rho^2\xi\lambda$. Подставляя в эти равенства вместо $f$ элементы $\delta\chi'$ и $\chi\chi'$ и пользуясь уже доказанными формулами, получаем в первом случае $\varkappa_3 = 1$, $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, во втором – $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$, $\varkappa_1 = 0$.

Так как $\rho\delta$, $\rho\chi$ и $\xi$ образуют базис $\mathrm{HH}^3(R)$, то из замечания 3 следует, что любой элемент $f \in \mathrm{HH}^9(R)$ можно записать в виде $f = (\varkappa_1\rho\delta + \varkappa_2\rho\chi + \varkappa_3\xi)\lambda$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив последнее равенство на $\chi$, $\delta$ и $\rho$, получаем соответственно равенства: $\chi f = \varkappa_1\rho^2\xi\lambda$, $\delta f = \varkappa_2\rho^2\xi\lambda$, $\rho f = \varkappa_3\rho\xi\lambda$. Подставляя в эти равенства вместо $f$ элементы $\eta_1\chi'$ и $\eta_2\chi'$ и пользуясь уже доказанными формулами, получаем в первом случае $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$, $\varkappa_1 = 0$, во втором – $\varkappa_1 = \varkappa_3 = 1$, $\varkappa_2 = 0$.

Наконец, $(\chi')^2 \in \mathrm{HH}^{10}(R)$ можно записать в виде $(\chi')^2 = (\varkappa_1\eta_1 + \varkappa_2\eta_2 + \varkappa_3(\beta^3)^*[4])\lambda$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$ (следует из того, что $\eta_1$, $\eta_2$ и $(\beta^3)^*[4]$ образуют базис $\mathrm{HH}^4(R)$, и из замечания 3). Домножив последнее равенство на $\varepsilon_2$, $\varepsilon_1$ и $\rho$, получаем последовательно: $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ и $\varkappa_3 = 0$. Таким образом, завершено доказательство равенств (6.6), а, следовательно, и всего предложения. □

**Следствие 5.** *Элементы* $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\Delta$, $\rho$, $\delta$, $\chi$, $\xi$, $\eta_1$, $\eta_2$, $\chi'$ *и* $\lambda$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* $k$*-алгебру.*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{H}$ – подалгебра $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая перечисленными в формулировке элементами. Введём следующие обозначения:

$$X_0 = \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \Delta\}, X_1 = \{\rho, \varepsilon_1\rho, \varepsilon_2\rho\}, X_2 = \{\rho^2, \delta, \chi\},$$
$$X_3 = \{\rho\delta, \rho\chi, \xi\}, X_4 = \{\rho\xi, \eta_1, \eta_2\}, X_5 = \{\rho^2\xi, \rho\eta_1, \rho\eta_2, \chi'\}.$$

Тогда из предложений 1 и 4 следует, что для $0 \leqslant t \leqslant 5$ множество $X_t$ является $k$-базисом $\mathrm{HH}^t(R)$. Так как множества $X_t$ состоят из элементов, принадлежащих $\mathcal{H}$, то $\bigoplus\limits_{t=0}^{5} \mathrm{HH}^t(R) \subset \mathcal{H}$. Так как $\lambda \in \mathcal{H}$, то из замечания 3 следует, что $\mathrm{HH}^*(R) \subset \mathcal{H}$. □

## §7. Равенства для элементов маленьких степеней

В этом параграфе мы докажем несколько равенств, связывающих элементы $\mathrm{HH}^*(R)$. На протяжении этого параграфа $n \geqslant 3$.

Сначала введём следующие обозначения для элементов алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\varepsilon_1 = (\beta^2)^*[0], \quad \varepsilon_2 = (\beta^3)^*[0], \quad \Delta_i = (\mu_i\nu_i)^*[0] \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1),$$
$$\rho = \big(e_0^* + \beta^*\big)[1], \quad \delta = \beta^*[2], \quad \zeta = \mu_2^*[3],$$
$$\lambda' = \Big(e_0^* + \sum_{q=1}^{n-3} \tau_{q+2,q}^*\Big)[4], \quad \lambda = \Big(e_0^* + \sum_{q=1}^{n-1} e_i^*\Big)[4n-2].$$

**Предложение 5.** *Пусть* $n \geqslant 3$. *Тогда в* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполнены следующие соотношения:*

$$(\lambda')^l = \begin{cases} \big(e_0^* + \sum\limits_{i=1}^{n-1-2l} \tau^*_{i+2l,i}\big)[4l], & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{2}, \\ \big(e_0^* + \nu^*_{2(n-l)-1} & \\ +(\beta\nu_{2(n-l)-1})^* + (\beta^3)^*\big)[4l], & \text{если } \frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-1,\ n \vdots 2, \\ \big(e_0^* + \nu^*_{2(n-l)-1} & \\ +(\beta\nu_{2(n-l)-1})^*\big)[4l], & \text{если } \frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-1,\ n \not\vdots 2, \\ e_0^*[4l], & \text{если } l = n; \end{cases} \tag{7.1}$$

$$\varepsilon_1(\lambda')^l = (\beta^2)^*[4l], \varepsilon_2(\lambda')^l = (\beta^3)^*[4l] \ \ (0 \leqslant l \leqslant n-1); \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} \Delta_i\lambda' &= \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1\Delta_i \\ &= \varepsilon_2\Delta_i = \Delta_i\Delta_j = 0 \ \ (1 \leqslant i, j \leqslant n-1); \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\rho(\lambda')^l = \begin{cases} \big(e_0^* + \beta^*\big)[4l+1], & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2} \text{ и } n \vdots 2 \\ & \text{или } 0 \leqslant l \leqslant n-1 \text{ и } n \not\vdots 2, \\ \big(e_0^* + \beta^* + (\beta^3)^*\big)[4l+1], & \text{если } \frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-1 \text{ и } n \vdots 2; \end{cases} \tag{7.4}$$

$$\varepsilon_1\rho(\lambda')^l = \big((\beta^2)^* + (\beta^3)^*\big)[4l+1] \ \ (0 \leqslant l \leqslant n-1); \tag{7.5}$$

$$\varepsilon_2\rho(\lambda')^l = (\beta^3)^*[4l+1] \ \ (0 \leqslant l \leqslant n-1); \tag{7.6}$$

$$\rho^2(\lambda')^l = \begin{cases} e_0^*[4l+2], & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}, \\ \big(\sum\limits_{q=2(n-l)-1}^{n-1} (\mu_{q+2(l-n+1)}\nu_q)^* & \\ +(\mu_{2l-n+2}\beta)^* & \\ +(\beta\nu_{2(n-l-1)})^*\big)[4l+2], & \text{если } \frac{n-1}{2} \leqslant l \leqslant n-2, \\ \big(\sum\limits_{q=1}^{n-1} (\mu_q\nu_q)^*\big)[4l+2], & \text{если } l = n-1,\ n \vdots 2, \\ 0, & \text{если } l = n-1,\ n \not\vdots 2; \end{cases} \tag{7.7}$$

$$\Delta_i\rho = \varepsilon_1\rho^2 = \varepsilon_2\rho^2 = \rho^3 = 0; \tag{7.8}$$

$$\delta(\lambda')^l = \begin{cases} \beta^*[4l+2], & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}, \\ \Big(\sum\limits_{q=2(n-l)-1}^{n-1} (\mu_{q+2(l-n+1)}\nu_q)^* & \\ +(\mu_{2l-n+2}\beta)^* & \\ +(\beta\nu_{2(n-l-1)})^*\Big)[4l+2], & \text{если } \frac{n-1}{2} \leqslant l \leqslant n-2; \end{cases} \tag{7.9}$$

$$\rho\delta(\lambda')^l = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{q=n-2l-1}^{n-1} (\mu_{q+2l-(n-2)}\nu_q)^* & \\ +(\mu_{2l+2}\beta)^* & \\ +(\beta\nu_{n-2l-2})^*\Big)[4l+3], & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-3}{2}, \\ \Big(\sum\limits_{q=1}^{n-1} (\mu_q\nu_q)^*\Big)[4l+3], & \text{если } n \vdots 2 \text{ и } l = \frac{n-2}{2}; \end{cases} \tag{7.10}$$

$$\varepsilon_1\delta = \varepsilon_2\delta = \Delta_i\delta = \rho^2\delta = \delta^2 = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1); \tag{7.11}$$

$$\zeta(\lambda')^l = \begin{cases} \mu^*_{2l+2}[4l+3], & \text{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-3}{2}, \\ \big((\beta^2)^* + (\beta^3)^*\big)[4l+3], & \text{если } \frac{n-2}{2} \leqslant l \leqslant n-1; \end{cases} \tag{7.12}$$

$$\rho\zeta = (\beta^2)^*[4], \delta\zeta = (\beta^3)^*[5]; \tag{7.13}$$

$$\varepsilon_1\zeta = \varepsilon_2\zeta = \zeta^2 = \Delta_i\zeta = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1). \tag{7.14}$$

**Доказательство.** Равенства (7.1), (7.2), (7.4), (7.5), (7.6), (7.7), (7.9), (7.10), (7.12) доказываются индукцией по $l$ с использованием п. 1) предложения 2 и леммы 4. При этом база индукции для равенств (7.5), (7.6), (7.7) и (7.10) следует из пунктов 4) и 6) предложения 2 и леммы 4.

Равенства (7.3), (7.8), (7.11), (7.13) и (7.14) следуют из пунктов 1), 4), 5), 6) и 9) предложения 2, предложения 3, леммы 4 и уже доказанного равенства $\rho^2 = e_0^*[2]$. Таким образом, предложение доказано. □

**Следствие 6.** *Подалгебра* $\mathrm{HH}^*(R)$, *порождённая элементами* $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\Delta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\rho$, $\delta$, $\zeta$ *и* $\lambda'$, *содержит* $\bigoplus\limits_{t=0}^{2n-3} \mathrm{HH}^t(R)$.

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{H}$ – подалгебра $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая перечисленными в формулировке элементами. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2\} \cup \{\Delta_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n-1}, \\
X_{4l} &= \{(\lambda')^l, \varepsilon_1(\lambda')^l, \varepsilon_2(\lambda')^l\} \quad \left(1 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}\right), \\
X_{4l+1} &= \{\rho(\lambda')^l, \varepsilon_1\rho(\lambda')^l, \varepsilon_2\rho(\lambda')^l\} \quad \left(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}\right), \\
X_{4l+2} &= \{\rho^2(\lambda')^l, \delta(\lambda')^l\}, \\
X_{4l+3} &= \{\zeta(\lambda')^l, \rho\delta(\lambda')^l\} \quad \left(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Тогда из предложений 1 и 5 следует, что для $0 \leqslant t \leqslant 2n-3$ множество $X_t$ является $k$-базисом $\mathrm{HH}^t(R)$. Так как множества $X_t$ состоят из элементов, принадлежащих $\mathcal{H}$, то $\bigoplus\limits_{t=0}^{2n-3} \mathrm{HH}^t(R) \subset \mathcal{H}$. □

## §8. Случай $n \vdots 2$, $n > 2$

На протяжении этого параграфа полагаем $n \vdots 2$, $n > 2$. Сейчас мы получим соотношения, которые связывают элементы алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ в этом случае.

Определим ещё три элемента алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\chi = \Big(\sum_{q=1}^{n-1} e_q^*\Big)[2n-2], \quad \eta = \big(\beta^* + (\beta\alpha_{n-1})^*\big)[2n],$$

$$\chi' = \Big(\sum_{q=1}^{n-1} e_q^*\Big)[4n-3].$$

**Предложение 6.** *Пусть $n \vdots 2$, $n > 2$. Тогда в $\mathrm{HH}^*(R)$ выполнены следующие соотношения:*

$$\chi(\lambda')^l = \begin{cases} \mu_{2l}^*[4l+2n-2], & \text{если } 1 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}, \\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\lambda, & \text{если } l = \frac{n}{2}; \end{cases} \tag{8.1}$$

$$\rho\chi(\lambda')^l = (\beta^2)^*[4l+2n-1] \quad \left(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}\right); \tag{8.2}$$

$$\begin{gathered}\delta\chi = (\beta^3)^*[2n],\\ \varepsilon_1\chi = \varepsilon_2\chi = \Delta_i\chi = \rho^2\chi = \zeta\chi = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1);\end{gathered} \tag{8.3}$$

$$\eta(\lambda')^l = \begin{cases} \big(\beta^* + (\beta\nu_{n-1-2l})^*\big)[4l+2n], & \textit{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2},\\ \delta\lambda, & \textit{если } l = \frac{n}{2}; \end{cases} \tag{8.4}$$

$$\rho\eta(\lambda')^l = \beta^*[4l+2n+1] \ \ \left(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}\right); \tag{8.5}$$

$$\left.\begin{gathered}\varepsilon_1\eta = (\beta^3)^*[2n],\\ \rho^2\eta = \big((\alpha_0\alpha_{n-1})^* + (\beta\nu_{n-2})^* + (\mu_2\beta)^*\big)[2n+2],\\ \zeta\eta = (\beta^3)^*[2n+3],\\ \varepsilon_2\eta = \Delta_i\eta = \delta\eta = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1);\end{gathered}\right\} \tag{8.6}$$

$$\left.\begin{gathered}\chi'\lambda' = \zeta\lambda, \Delta_i\chi' = (\beta^3)^*[4n-3] \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1),\\ \rho\chi' = \varepsilon_1\lambda, \delta\chi' = \varepsilon_2\rho\lambda, \varepsilon_1\chi' = \varepsilon_2\chi' = \zeta\chi' = 0;\end{gathered}\right\} \tag{8.7}$$

$$\chi\eta = \big(\varepsilon_2 + \left(\frac{n}{2}\right)\sum_{q=1}^{n-1}\Delta_q\big)\lambda; \tag{8.8}$$

$$\chi\chi' = \left(\frac{n}{2}\right)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\lambda; \tag{8.9}$$

$$\chi'\eta = \big(\rho\chi + \zeta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \left(\frac{n}{2}\right)\rho\delta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\big)\lambda; \tag{8.10}$$

$$\chi^2 = \eta^2 = (\chi')^2 = 0. \tag{8.11}$$

**Доказательство.** Равенства (8.1), (8.2), (8.4), (8.5) доказываются индукцией по $l$ с использованием п. 1) предложения 2 и леммы 4. При этом база индукции для равенств (8.1), (8.2) и (8.5) следует из пунктов 1), 2) и 7) предложения 2 и леммы 4.

Равенства (8.6) следуют из пункта 2) предложения 2.

То, что $\varepsilon_1\chi = \varepsilon_2\chi = \Delta_i\chi = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, следует из п. 7) предложения 2 и леммы 4. Далее заметим, что из предложений 1 и 5 следует, что любой элемент $f \in \mathrm{HH}^{2n}(R)$ записывается в виде $f = \varkappa_1(\lambda')^{\frac{n}{2}} + \varkappa_2\eta + \varkappa_3\varepsilon_2(\lambda')^{\frac{n}{2}}$, где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Из уже доказанных равенств следует, что в этом случае

$$\rho f = \varkappa_1\big(e_0^* + \beta^* + (\beta^3)^*\big)[2n+1] + \varkappa_2\beta^*[2n+1] + \varkappa_3(\beta^3)^*[2n+1].$$

Так как по предложению 1 элементы $\big(e_0^* + \beta^*\big)[2n+1]$, $\beta^*[2n+1]$ и $(\beta^3)^*[2n+1]$ образуют базис $\mathrm{HH}^{2n+1}(R)$, то по значению $\rho f$ однозначно восстанавливается $f$. Пользуясь уже доказанными равенствами и

предложением 3, получаем: $\rho\delta\chi = (\beta^3)^*[2n+1]$, $\rho^3\chi = 0$. Следовательно, $\delta\chi = \varepsilon_2(\lambda')^{\frac{n}{2}} = (\beta^3)^*[2n]$, $\rho^2\chi = 0$. Так как $\zeta\chi \in \mathrm{HH}^{2n+1}(R)$, то $\zeta\chi = \varkappa_1\rho(\lambda')^{\frac{n}{2}} + \varkappa_2\rho\eta + \varkappa_3\varepsilon_2\rho(\lambda')^{\frac{n}{2}}$ для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив это равенство сначала на $\varepsilon_2$, а потом на $\varepsilon_1$, пользуясь уже доказанными равенствами, получим, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, то есть $\zeta\chi = \varkappa_3\varepsilon_2\rho(\lambda')^{\frac{n}{2}}$. Домножив последнее равенство на $(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}$ и используя уже доказанные равенства, а также предложение 3, получим, что

$$0 = \chi\big((\beta^2)^* + (\beta^3)^*\big)[2n-1] = \chi\big(\zeta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\big) = \varkappa_3\varepsilon_2\rho(\lambda')^{n-1},$$

то есть $\varkappa_3 = 0$. Таким образом, равенства (8.3) доказаны.

Равенства $\chi'\lambda' = \zeta\lambda$, $\Delta_i\chi' = (\beta^3)^*[4n-3]$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\rho\chi' = \varepsilon_1\lambda$, $\varepsilon_1\chi' = \varepsilon_2\chi' = 0$ следуют из пунктов 1) и 7) предложения 2 и леммы 4. Далее, так как $\delta\chi' \in \mathrm{HH}^{4n-1}(R)$, $\zeta\chi' \in \mathrm{HH}^{4n}(R)$, то $\delta\chi' = (\varkappa_1\rho + \varkappa_2\varepsilon_1\rho + \varkappa_3\varepsilon_2\rho)\lambda$, $\zeta\chi' = (\varkappa_4\rho^2 + \varkappa_5\delta)\lambda$ для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4, \varkappa_5 \in k$. Домножив эти равенства на $\lambda'$ и используя уже доказанные равенства, получим, что $\varepsilon_2\rho\lambda'\lambda = (\varkappa_1\rho\lambda' + \varkappa_2\varepsilon_1\rho\lambda' + \varkappa_3\varepsilon_2\rho\lambda')\lambda$, $0 = (\varkappa_4\rho^2\lambda' + \varkappa_5\delta\lambda')\lambda$. Тогда из предложений 1 и 5 получаем, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa_5 = 0$, $\varkappa_3 = 1$. Таким образом, равенства (8.7) доказаны.

Равенство (8.8) следует из п. 2) предложения 2 и леммы 4.

Так как $\chi\chi' \in \mathrm{HH}^{6n-5}(R)$, то

$$\chi\chi' = \big(\varkappa_1\rho(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \varkappa_2\varepsilon_1\rho(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \varkappa_3\varepsilon_2\rho(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\big)\lambda$$

для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив это равенство на $\lambda'$ и используя уже полученные равенства, а также лемму 4, получим, что

$$0 = \big(\varkappa_1\big(e_0^* + \beta^* + (\beta^3)^*\big)[2n+1] + (\varkappa_2 + \varkappa_3)(\beta^3)^*[2n+1]\big)\lambda.$$

Тогда из предложения 1 получаем, что $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = \varkappa_3$, то есть $\chi\chi' = \varkappa_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\rho(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\lambda$. Домножив это равенство на $\eta$, получим, пользуясь уже доказанными равенствами и леммой 4, что верно равенство $\left(\frac{n}{2}\right)(\beta^3)^*[4n-3]\lambda = \varkappa_2(\beta^3)^*[4n-3]\lambda$. Из последнего равенства следует равенство (8.9).

Так как $\chi'\eta \in \mathrm{HH}^{6n-3}(R)$, то

$$\chi'\eta = \big(\varkappa_1\rho\chi + \varkappa_2\zeta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \varkappa_3\rho\delta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\big)\lambda$$

для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив это равенство на $\lambda'$ и используя уже полученные равенства, а также лемму 4, получим, что

$$(\beta^3)^*[2n+3]\lambda = \big(\varkappa_1(\beta^2)^*[2n+3] + \varkappa_2((\beta^2)^*[2n+3] + (\beta^3)^*[2n+3])\big)\lambda.$$

Тогда из предложения 1 получаем, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$, то есть $\chi'\eta = \big(\rho\chi + \zeta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \varkappa_3\rho\delta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\big)\lambda$. Домножив это равенство на $\chi$, получим, пользуясь уже доказанными равенствами, предложением 3 и леммой 4, что верно равенство $\binom{n}{2}(\beta^3)^*[4n-3]\lambda = \varkappa_3(\beta^3)^*[4n-3]\lambda$. Из последнего равенства и предложения 1 следует равенство (8.10).

Так как $\chi^2 \in \mathrm{HH}^{4n-4}(R)$, то

$$\chi^2 = \varkappa_1(\lambda')^{n-1} + \varkappa_2\eta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \varkappa_3\varepsilon_2(\lambda')^{n-1}$$

для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив это равенство на $\rho$ и используя предложение 3 и уже доказанные равенства, получим, что

$$0 = \chi(\rho\chi) = \varkappa_1\rho(\lambda')^{n-1} + \varkappa_2\rho\eta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \varkappa_3\varepsilon_2\rho(\lambda')^{n-1}.$$

Тогда легко показать, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$, то есть $\chi^2 = 0$.

Так как $\eta^2 \in \mathrm{HH}^{4n}(R)$, то $\eta^2 = (\varkappa_1\rho^2 + \varkappa_2\delta)\lambda$ для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2 \in k$. Домножив это равенство сначала на $\chi$, а потом на $(\lambda')^{\frac{n}{2}}$, получим, пользуясь предложением 1 и уже доказанными равенствами, последовательно $\varkappa_2 = 0$ и $\varkappa_1 = 0$.

Так как $(\chi')^2 \in \mathrm{HH}^{8n-6}(R)$, то

$$(\chi')^2 = \big(\varkappa_1(\lambda')^{n-1} + \varkappa_2\eta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}} + \varkappa_3\varepsilon_2(\lambda')^{n-1}\big)\lambda$$

для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Далее, домножив это равенство на $\rho$, получим, как и при доказательстве равенства $\chi^2 = 0$, что $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$. Следовательно, равенства (8.11), а вместе с ними и предложение, доказаны. □

**Следствие 7.** *Элементы* $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\Delta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\rho$, $\delta$, $\zeta$, $\lambda'$, $\chi$, $\eta$, $\chi'$ *и* $\lambda$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* $k$*-алгебру.*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{H}$ – подалгебра $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая перечисленными в формулировке элементами. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
X_{2n-2} &= \{\chi, \rho^2(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}, \delta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\},\\
X_{2n-1} &= \{\rho\chi, \zeta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}, \rho\delta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}\},\\
X_{4l} &= \{\eta(\lambda')^{l-\frac{n}{2}}, (\lambda')^l, \varepsilon_2(\lambda')^l\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-1\right),\\
X_{4l+1} &= \{\rho\eta(\lambda')^{l-\frac{n}{2}}, \rho(\lambda')^l, \varepsilon_2\rho(\lambda')^l\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
X_{4l+2} &= \{\rho^2(\lambda')^l, \chi(\lambda')^{l-\frac{n-2}{2}}\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
X_{4l+3} &= \{\zeta(\lambda')^l, \rho\chi(\lambda')^{l-\frac{n-2}{2}}\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
X_{4n-3} &= \{\chi', \rho\eta(\lambda')^{\frac{n-2}{2}}, \rho(\lambda')^{n-1}, \varepsilon_2\rho(\lambda')^{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Тогда из предложений 1, 5 и 6 следует, что для $2n-2 \leqslant t \leqslant 4n-3$ множество $X_t$ является $k$-базисом $\mathrm{HH}^t(R)$. Так как множества $X_t$ состоят из элементов, принадлежащих $\mathcal{H}$, то, пользуясь следствием 6, получаем, что $\bigoplus\limits_{t=0}^{4n-3} \mathrm{HH}^t(R) \subset \mathcal{H}$. Так как $\lambda \in \mathcal{H}$, то из замечания 3 следует, что $\mathrm{HH}^*(R) \subset \mathcal{H}$. □

## §9. Случай $n \not\vdots 2$

На протяжении этого параграфа полагаем $n \not\vdots 2$. Сейчас мы получим соотношения, которые связывают элементы $\mathrm{HH}^*(R)$ в этом случае.

Определим следующие два элемента алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\eta = \Big(\beta^* + \sum_{q=1}^{n-1} e_q^*\Big)[2n-2], \quad \chi = \alpha_0^*[2n].$$

**Предложение 7.** *Пусть $n \not\vdots 2$. Тогда в $\mathrm{HH}^*(R)$ выполнены следующие соотношения:*

$$\eta(\lambda')^l = \begin{cases} \big(\beta^* + (\beta\nu_{n-2l})^*\big)[4l+2n-2], & \text{если } 1 \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{2},\\ \delta\lambda, & \text{если } l = \frac{n+1}{2}; \end{cases} \tag{9.1}$$

$$\rho\eta(\lambda')^l = \big(\beta^* + (\beta^2)^*\big)[4l+2n-1] \quad \left(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{2}\right); \tag{9.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_1\eta &= (\beta^3)^*[2n-2], \quad \rho^2\eta = \big((\beta\alpha_{n-1})^* + (\alpha_0\beta)^*\big)[2n],\\
\zeta\eta &= (\beta^3)^*[2n+1], \quad \eta^2 = (\beta^3)^*[4n-4],\\
\varepsilon_2\eta &= \Delta_i\eta = \delta\eta = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1);
\end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

$$\chi(\lambda')^l = \begin{cases} \mu^*_{2l+1}[4l+2n], & \textit{если } 0 \leqslant l \leqslant \frac{n-3}{2},\\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\lambda, & \textit{если } l = \frac{n-1}{2}; \end{cases} \tag{9.4}$$

$$\rho\chi(\lambda')^l = (\beta^2)^*[4l+2n+1] \ \ \Big(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-3}{2}\Big); \tag{9.5}$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta\chi = (\beta^3)^*[2n+2], \eta\chi = \varepsilon_2\lambda,\\
\varepsilon_1\chi = \varepsilon_2\chi = \Delta_i\chi = \zeta\chi = \chi^2 = 0 \ \ (1 \leqslant i \leqslant n-1).
\end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

**Доказательство.** Равенства (9.1), (9.2), (9.4) и (9.5) доказываются индукцией по $l$ с использованием пункта 1) предложения 2 и леммы 4. При этом база индукции для равенств (9.1), (9.2) и (9.5) следует из пунктов 1), 3) и 10) предложения 2 и леммы 4.

Равенства (9.3) следуют из пункта 3) предложения 2 и леммы 4.

Все равенства (9.6), кроме $\eta\chi = \varepsilon_2\lambda$ и $\chi^2 = 0$, следуют из пункта 10) предложения 2 и леммы 4.

Так как $\eta\chi \in \mathrm{HH}^{4n-2}(R)$, то $\eta\chi = (\varkappa_1 + \varkappa_2\varepsilon_1 + \varkappa_3\varepsilon_2)\lambda$ для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3 \in k$. Домножив это равенство на $\rho$, получим, пользуясь уже доказанными равенствами, что

$$\begin{aligned}
(\varkappa_1\rho + \varkappa_2\varepsilon_1\rho + \varkappa_3\varepsilon_2\rho)\lambda &= \eta\chi\rho = \eta\zeta\big(\eta + (\lambda')^{\frac{n-1}{2}}\big)\\
&= \zeta\varepsilon_2(\lambda')^{n-1} + \big(\rho\chi + \zeta(\lambda')^{\frac{n-1}{2}}\big)(\lambda')^{\frac{n-1}{2}}\\
&= (\varepsilon_1\rho + \varepsilon_2\rho)\lambda + \varepsilon_1\rho\lambda = \varepsilon_2\rho\lambda,
\end{aligned}$$

то есть $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$, $\varkappa_3 = 1$.

Так как $\chi^2 \in \mathrm{HH}^{4n}(R)$, то $\chi^2 = (\varkappa_1\rho^2 + \varkappa_2\delta)\lambda$ для некоторых $\varkappa_1, \varkappa_2 \in k$. Домножив это равенство сначала на $\rho$, а потом на $\eta$, получим, пользуясь уже доказанными равенствами, последовательно $\varkappa_2 = 0$ и $\varkappa_1 = 0$. Таким образом, равенства (9.6) доказаны, и доказательство предложения завершено. □

**Следствие 8.** *Элементы* $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\Delta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, $\rho$, $\delta$, $\zeta$, $\lambda'$, $\eta$, $\chi$ *и* $\lambda$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* $k$*-алгебру.*

**Доказательство.** Пусть $\mathcal{H}$ – подалгебра $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая перечисленными в формулировке элементами. Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
X_{2n-2} &= \{\eta, (\lambda')^{\frac{n-1}{2}}, \varepsilon_1(\lambda')^{\frac{n-1}{2}}, \varepsilon_2(\lambda')^{\frac{n-1}{2}}\},\\
X_{2n-1} &= \{\rho\eta, \rho(\lambda')^{\frac{n-1}{2}}, \varepsilon_1\rho(\lambda')^{\frac{n-1}{2}}, \varepsilon_2\rho(\lambda')^{\frac{n-1}{2}}\},\\
X_{4l+2} &= \{\rho^2(\lambda')^l, \chi(\lambda')^{l-\frac{n-1}{2}}\} \ \left(\frac{n-1}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
X_{4l+3} &= \{\zeta(\lambda')^l, \rho\chi(\lambda')^{l-\frac{n-1}{2}}\} \ \left(\frac{n-1}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
X_{4l} &= \{\eta(\lambda')^{l-\frac{n-1}{2}}, (\lambda')^l, \varepsilon_2(\lambda')^l\} \ \left(\frac{n+1}{2} \leqslant l \leqslant n-1\right),\\
X_{4l+1} &= \{\rho\eta(\lambda')^{l-\frac{n-1}{2}}, \rho(\lambda')^l, \varepsilon_2\rho(\lambda')^l\} \ \left(\frac{n+1}{2} \leqslant l \leqslant n-1\right).
\end{aligned}$$

Тогда из предложений 1, 5 и 7 следует, что для $2n-2 \leqslant t \leqslant 4n-3$ множество $X_t$ является $k$-базисом $\mathrm{HH}^t(R)$. Так как множества $X_t$ состоят из элементов, принадлежащих $\mathcal{H}$, то, пользуясь следствием 6, получаем, что $\bigoplus\limits_{t=0}^{4n-3} \mathrm{HH}^t(R) \subset \mathcal{H}$. Так как $\lambda \in \mathcal{H}$, то из замечания 3 следует, что $\mathrm{HH}^*(R) \subset \mathcal{H}$. □

## §10. Описание алгебры когомологий Хохшильда

Пусть $n \geqslant 2$. Поставим в соответствие каждому элементу $\theta$ из множеств образующих, встречающихся в формулировках следствий 6, 7 или 8 в зависимости от значения $n$ переменную $\tilde{\theta}$. Определим множества $\mathcal{X}_n$ и $\mathcal{E}_n$.

Если $n = 2$, то

$$\mathcal{X}_2 = \{\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\Delta}, \tilde{\rho}, \tilde{\delta}, \tilde{\chi}, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\chi}', \tilde{\lambda}\};$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2 = \{&\tilde{\varepsilon}_1^2, \tilde{\varepsilon}_2^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\Delta}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}^2, \tilde{\Delta}\tilde{\rho}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}^2, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^3, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\delta}, \tilde{\Delta}\tilde{\delta}, \tilde{\rho}^2\tilde{\delta}, \tilde{\delta}^2,\\
&\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\chi}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\chi}, \tilde{\Delta}\tilde{\chi}, \tilde{\rho}^2\tilde{\chi}, \tilde{\chi}^2, \tilde{\delta}\tilde{\chi} + \tilde{\rho}\tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\xi}, \tilde{\Delta}\tilde{\xi}, \tilde{\delta}\tilde{\xi}, \tilde{\chi}\tilde{\xi}, \tilde{\xi}^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\eta}_1 + \tilde{\rho}\tilde{\xi},\\
&\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\eta}_1 + \tilde{\rho}\tilde{\xi}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\eta}_2 + \tilde{\rho}\tilde{\xi}, \tilde{\rho}^2\tilde{\eta}_1 + \tilde{\Delta}\tilde{\lambda}, \tilde{\rho}^2\tilde{\eta}_2 + \tilde{\Delta}\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}\tilde{\eta}_1 + \tilde{\Delta}\tilde{\lambda},\\
&\tilde{\chi}\tilde{\eta}_1 + (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2)\tilde{\lambda}, \tilde{\chi}\tilde{\eta}_2 + (\tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\Delta})\tilde{\lambda}, \tilde{\xi}\tilde{\eta}_1 + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}_1^2 + \tilde{\rho}^2\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 + \tilde{\delta}\tilde{\lambda},\\
&\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\eta}_2, \tilde{\Delta}\tilde{\eta}_1, \tilde{\Delta}\tilde{\eta}_2, \tilde{\delta}\tilde{\eta}_2, \tilde{\xi}\tilde{\eta}_2, \tilde{\eta}_2^2, \tilde{\Delta}\tilde{\chi}' + \tilde{\rho}^2\tilde{\xi}, \tilde{\rho}\tilde{\chi}' + \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}\tilde{\chi}' + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}\tilde{\lambda},\\
&\tilde{\chi}\tilde{\chi}' + (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2)\tilde{\rho}\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}_1\tilde{\chi}' + (\tilde{\rho}\tilde{\chi} + \tilde{\xi})\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}_2\tilde{\chi}' + (\tilde{\rho}\tilde{\delta} + \tilde{\xi})\tilde{\lambda}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\chi}',\\
&\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\chi}', \tilde{\xi}\tilde{\chi}', (\tilde{\chi}')^2\}.
\end{aligned}$$

Если $n \vdots 2$, $n > 2$, то

$$\mathcal{X}_n = \{\tilde{\Delta}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n-1} \cup \{\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\rho}, \tilde{\delta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\lambda}', \tilde{\chi}, \tilde{\eta}, \tilde{\chi}', \tilde{\lambda}\};$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n = \{&\tilde{\Delta}_i\tilde{\Delta}_j\}_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1} \cup \{\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\Delta}_i, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\Delta}_i, \tilde{\rho}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\delta}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\zeta}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\lambda}'\tilde{\Delta}_i, \tilde{\chi}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\eta}\tilde{\Delta}_i,\\
&\tilde{\chi}'\tilde{\Delta}_i + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^{n-1}, \tilde{\Delta}_i\tilde{\lambda} + \sum_{q=1}^{n-1}\tilde{\Delta}_q\tilde{\lambda}\}_{1\leqslant i\leqslant n-1} \cup \{\tilde{\varepsilon}_1^2, \tilde{\varepsilon}_2^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}^2,\\
&\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^3, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\delta}, \tilde{\rho}^2\tilde{\delta}, \tilde{\delta}^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\zeta}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\zeta}, \tilde{\rho}\tilde{\zeta} + \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\lambda}', \tilde{\delta}\tilde{\zeta} + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}\tilde{\lambda}', \tilde{\zeta}^2,\\
&(\tilde{\lambda}')^n + \tilde{\rho}^2\tilde{\lambda}, \tilde{\varepsilon}_1(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}} + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}}, \tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}} + \tilde{\delta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}},\\
&\tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^{n-1} + \sum_{q=1}^{n-1}\tilde{\Delta}_q\tilde{\lambda}, \tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^{n-1} + \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}\tilde{\lambda}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\chi}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\chi}, \tilde{\rho}^2\tilde{\chi}, \tilde{\delta}\tilde{\chi} + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}},\\
&\tilde{\zeta}\tilde{\chi}, \tilde{\chi}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}} + (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2)\tilde{\lambda}, \tilde{\chi}^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\eta} + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\eta}, \tilde{\rho}^2\tilde{\eta} + \tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}}, \tilde{\delta}\tilde{\eta},\\
&\tilde{\zeta}\tilde{\eta} + \tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}} + \tilde{\rho}\tilde{\chi}\tilde{\lambda}', \tilde{\eta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n}{2}} + \tilde{\delta}\tilde{\lambda}, \tilde{\chi}\tilde{\eta} + (\tilde{\varepsilon}_2 + \left(\tfrac{n}{2}\right)\sum_{q=1}^{n-1}\tilde{\Delta}_q)\tilde{\lambda},\\
&\tilde{\eta}^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\chi}', \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\chi}', \tilde{\rho}\tilde{\chi}' + \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\lambda}, \tilde{\delta}\tilde{\chi}' + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}\tilde{\lambda}, \tilde{\zeta}\tilde{\chi}', \tilde{\chi}'\tilde{\lambda}' + \tilde{\zeta}\tilde{\lambda},\\
&\tilde{\chi}\tilde{\chi}' + \left(\tfrac{n}{2}\right)(\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2)\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}}\tilde{\lambda},\\
&\tilde{\chi}'\tilde{\eta} + \left(\tilde{\rho}\tilde{\chi} + \tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}} + \left(\tfrac{n}{2}\right)\tilde{\rho}\tilde{\delta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}}\right)\tilde{\lambda}, (\tilde{\chi}')^2\}.\end{aligned}$$

Если $n \not\vdots 2$, то

$$\mathcal{X}_n = \{\tilde{\Delta}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n-1} \cup \{\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\rho}, \tilde{\delta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\lambda}', \tilde{\eta}, \tilde{\chi}, \tilde{\lambda}\};$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n = \{&\tilde{\Delta}_i\tilde{\Delta}_j\}_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1} \cup \{\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\Delta}_i, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\Delta}_i, \tilde{\rho}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\delta}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\zeta}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\lambda}'\tilde{\Delta}_i, \tilde{\eta}\tilde{\Delta}_i, \tilde{\chi}\tilde{\Delta}_i,\\
&\tilde{\Delta}_i\tilde{\lambda}\}_{1\leqslant i\leqslant n-1} \cup \{\tilde{\varepsilon}_1^2, \tilde{\varepsilon}_2^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}^2, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}^2, \tilde{\rho}^3, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\delta}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\delta}, \tilde{\rho}^2\tilde{\delta}, \tilde{\delta}^2, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\zeta},\\
&\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\zeta}, \tilde{\rho}\tilde{\zeta} + \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\lambda}', \tilde{\delta}\tilde{\zeta} + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}\tilde{\lambda}', \tilde{\zeta}^2, (\tilde{\lambda}')^n + \tilde{\rho}^2\tilde{\lambda}, \tilde{\varepsilon}_1(\tilde{\lambda}')^{\frac{n+1}{2}} + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n+1}{2}},\\
&\tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}} + \tilde{\delta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}, \tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^{n-1}, \tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^{n-1} + \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}\tilde{\lambda}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\eta} + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}},\\
&\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\eta}, \tilde{\rho}^2\tilde{\eta} + \tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}, \tilde{\delta}\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}\tilde{\eta} + \tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}} + \tilde{\rho}\tilde{\chi}, \tilde{\eta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n+1}{2}} + \tilde{\delta}\tilde{\lambda},\\
&\tilde{\eta}^2 + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{n-1}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\chi}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\chi}, \tilde{\delta}\tilde{\chi} + \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n+1}{2}}, \tilde{\zeta}\tilde{\chi},\\
&\tilde{\chi}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}} + (\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2)\tilde{\lambda}, \tilde{\eta}\tilde{\chi} + \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\lambda}, \tilde{\chi}^2\}.\end{aligned}$$

Введём на $k[\mathcal{X}_n]$ такую градуировку, что, если $\theta \in \mathrm{HH}^t(R)$, то $\deg\tilde{\theta} = t$. Обозначим через $I_n$ идеал алгебры $k[\mathcal{X}_n]$, порождённый множеством $\mathcal{E}_n$. Тогда верна следующая теорема.

**Теорема 3.** $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_n]/I_n$.

**Доказательство.** Рассмотрим гомоморфизм градуированных $k$-алгебр $\pi : k[\mathcal{X}_n] \to \mathrm{HH}^*(R)$, который каждый элемент множества $\mathcal{X}_n$ вида $\tilde{\theta}$ переводит в $\theta \in \mathrm{HH}^*(R)$. Пользуясь следствием 5, 7 или 8

в зависимости от значения $n$, легко показать, что $\pi$ – сюръективный гомоморфизм. Из предложений 4, 5, 6, 7 и леммы 4 следует, что $I_n \subset \operatorname{Ker}\pi$. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм градуированных $k$-алгебр $\bar{\pi} : k[\mathcal{X}_n]/I_n \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий класс элемента $\tilde{\theta} \in \mathcal{X}_n$ в $\theta$. Осталось доказать, что $\bar{\pi}$ – изоморфизм. Обозначим алгебру $k[\mathcal{X}_n]/I_n$ через $A$. Пусть $A = \bigoplus_{t\geqslant 0} A^t$ – прямое разложение алгебры $A$ на однородные прямые слагаемые. Тогда нам достаточно проверить, что $\dim_k A^t \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^t(R)$ для всех $t \geqslant 0$.

Определим множество $\tilde{X}$ в зависимости от значений $n$. Если $n = 2$, то

$$\tilde{X} = \{1, \tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\Delta}, \tilde{\rho}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}, \tilde{\rho}^2, \tilde{\delta}, \tilde{\chi}, \tilde{\rho}\tilde{\delta}, \tilde{\rho}\tilde{\chi}, \tilde{\xi}, \tilde{\rho}\tilde{\xi}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \tilde{\rho}^2\tilde{\xi}, \tilde{\rho}\tilde{\eta}_1, \tilde{\rho}\tilde{\eta}_2, \tilde{\chi}'\}.$$

Если $n > 2$, то определим сначала $\tilde{X}_t$ для $0 \leqslant t \leqslant 4n-3$. Если $0 \leqslant t \leqslant 2n-3$, то определим $\tilde{X}_t$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_0 &= \{1, \tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2\} \cup \{\tilde{\Delta}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n-1},\\
\tilde{X}_{4l} &= \{(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_1(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^l\} \quad \left(1 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}\right),\\
\tilde{X}_{4l+1} &= \{\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^l\} \quad \left(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-2}{2}\right),\\
\tilde{X}_{4l+2} &= \{\tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\delta}(\tilde{\lambda}')^l\},\\
\tilde{X}_{4l+3} &= \{\tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\rho}\tilde{\delta}(\tilde{\lambda}')^l\} \quad \left(0 \leqslant l \leqslant \frac{n-3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Если $n \vdots 2$, то определим $\tilde{X}_t$ для $2n-2 \leqslant t \leqslant 4n-3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{2n-2} &= \{\tilde{\chi}, \tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}}, \tilde{\delta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}}\},\ \tilde{X}_{2n-1} = \{\tilde{\rho}\tilde{\chi}, \tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}}, \tilde{\rho}\tilde{\delta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}}\},\\
\tilde{X}_{4l} &= \{\tilde{\eta}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n}{2}}, (\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^l\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-1\right),\\
\tilde{X}_{4l+1} &= \{\tilde{\rho}\tilde{\eta}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n}{2}}, \tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^l\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
\tilde{X}_{4l+2} &= \{\tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\chi}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n-2}{2}}\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
\tilde{X}_{4l+3} &= \{\tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\rho}\tilde{\chi}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n-2}{2}}\} \quad \left(\frac{n}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
\tilde{X}_{4n-3} &= \{\tilde{\chi}', \tilde{\rho}\tilde{\eta}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-2}{2}}, \tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^{n-1}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Если же $n \not\vdots 2$, то определим $\tilde{X}_t$ для $2n-2 \leqslant t \leqslant 4n-3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{2n-2} &= \{\tilde{\eta}, (\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}, \tilde{\varepsilon}_1(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}, \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}, \},\\
\tilde{X}_{2n-1} &= \{\tilde{\rho}\tilde{\eta}, \tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}, \tilde{\varepsilon}_1\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}\},\\
\tilde{X}_{4l+2} &= \{\tilde{\rho}^2(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\chi}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n-1}{2}}\} \quad \left(\frac{n-1}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
\tilde{X}_{4l+3} &= \{\tilde{\zeta}(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\rho}\tilde{\chi}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n-1}{2}}\} \quad \left(\frac{n-1}{2} \leqslant l \leqslant n-2\right),\\
\tilde{X}_{4l} &= \{\tilde{\eta}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n-1}{2}}, (\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^l\} \quad \left(\frac{n+1}{2} \leqslant l \leqslant n-1\right),\\
\tilde{X}_{4l+1} &= \{\tilde{\rho}\tilde{\eta}(\tilde{\lambda}')^{l-\frac{n-1}{2}}, \tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^l, \tilde{\varepsilon}_2\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}')^l\} \quad \left(\frac{n+1}{2} \leqslant l \leqslant n-1\right).
\end{aligned}$$

Теперь для $n > 2$ определим $\tilde{X} = \bigcup\limits_{t=0}^{4n-3} \tilde{X}_t$.

Несложно показать, что, если $\tilde{\theta} \in \mathcal{X}_n$, $\omega \in \tilde{X}$, то $\tilde{\theta}\omega = \sum\limits_{q=1}^{p} \omega_q \tilde{\lambda}^a + \varphi$, где $p \geqslant 0$, $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \tilde{X}$, $a \in \{0,1\}$, $\varphi \in I_n$. Докажем это утверждение в случае $n \not\vdots 2$ для $\tilde{\theta} = \tilde{\rho}$, $\omega = \tilde{\rho}\tilde{\chi}$ (остальные варианты проще). По модулю идеала $I_n$ имеем

$$\tilde{\rho}^2\tilde{\chi} = \tilde{\rho}\tilde{\zeta}\big(\tilde{\eta} + (\tilde{\lambda}')^{\frac{n-1}{2}}\big) = \tilde{\varepsilon}_1\big(\tilde{\eta}\tilde{\lambda}' + (\tilde{\lambda}')^{\frac{n+1}{2}}\big) = 2\tilde{\varepsilon}_2(\tilde{\lambda}')^{\frac{n+1}{2}} = 0,$$

то есть $\tilde{\rho}^2\tilde{\chi} = \varphi$, где $\varphi \in I_n$.

Так как $1 \in \tilde{X}$, то легко показать, что любой элемент вида $\tilde{\theta}_1 \ldots \tilde{\theta}_r$, где $\tilde{\theta}_1, \ldots, \tilde{\theta}_r \in \mathcal{X}_n$, по модулю идеала $I_n$ равен $\sum\limits_{q=1}^{p} \omega_q \tilde{\lambda}^a$, где $p \geqslant 0$, $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \tilde{X}$, $a \geqslant 0$. Следовательно, классы элементов вида $\omega\tilde{\lambda}^a$, где $\omega \in \tilde{X}$, $a \geqslant 0$, порождают $A$ над $k$. Легко убедиться, что для каждого $t \geqslant 0$, которое не представляется в виде $t = m(4n-2)$, где $m \geqslant 1$, элементов такого вида степени $t$ имеется ровно $\dim_k \mathrm{HH}^t(R)$, то есть $\dim_k A^t \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^t(R)$. Если же $t = m(4n-2)$, $m \geqslant 1$, то число элементов такого вида равно $n+2$: $\tilde{\lambda}^m$, $\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\lambda}^m$, $\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\lambda}^m$, $\tilde{\Delta}_i\tilde{\lambda}^m$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Если $n \vdots 2$, то при $m \geqslant 1$ имеем $\tilde{\Delta}_i\tilde{\lambda}^m + \sum\limits_{q=1}^{n-1} \tilde{\Delta}_q\tilde{\lambda}^m \in I_n$

$(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Значит, в случае $n \vdots 2$, $t = m(4n-2)$, $m \geqslant 1$, слагаемое $A^t$ порождено над $k$ элементами $\tilde{\lambda}^m$, $\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\lambda}^m$, $\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\lambda}^m$ и $\sum\limits_{q=1}^{n-1} \tilde{\Delta}_q\tilde{\lambda}^m$, то есть $\dim_k A^t \leqslant 4 = \dim_k \mathrm{HH}^t(R)$. Если же $n \not\vdots 2$, то при $m \geqslant 1$ имеем $\tilde{\Delta}_i\tilde{\lambda}^m \in I_n$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Следовательно, в случае $n \not\vdots 2$, $t = m(4n-2)$, $m \geqslant 1$ слагаемое $A^t$ порождено над $k$ элементами $\tilde{\lambda}^m$, $\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\lambda}^m$ и $\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\lambda}^m$, то есть $\dim_k A^t \leqslant 3 = \dim_k \mathrm{HH}^t(R)$. Следовательно, для всех $t \geqslant 0$ имеем $\dim_k A^t \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^t(R)$, и теорема доказана. $\square$

## Литература


1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.
2. C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class $A_n$.* — Lect. Notes Math. **832** (1980), 449–520.
3. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class $A_n$.* — Forum Math. **11** (1999), 177–201.
4. K. Erdmann, T. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class $A_n$*, II. — Algebras Repr. Theory **5** (2002), 457–482.
5. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
6. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
7. Ю. В. Волков, *Классы стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр древесного типа $D_n$.* — Вестник СПб. ун-та, Сер. 1, Мат., мех., астр. **1** (2008), 15–21.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа $D_n$.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
9. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа $D_n$.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
10. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 61–70.
11. K. Erdmann, A. Skowroński, *Periodic algebras.* — In: Trends in Representation Theory and Related Topics. European Math. Soc., Zurich (2008), pp. 201-251.
12. A. S. Dugas, *Periodic resolutions and self-injective algebras of finite type.* — J. Pure and Applied Algebra **214** (2010), No. 6, 990-0-1000.
13. D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras.* — Lect. Notes Math. **1404** (1989), 108–126.

Volkov. Y. V. Hochschild cohomology for nonstandard self-injective algebras of tree class $D_n$.

We construct minimal projective bimodule resolutions for nonstandard self-injective algebras of finite representation type. Further, using this resolution we calculate dimensions of the Hochschild cohomology groups and describe Hochschild cohomology algebra in terms of generators and relations. The above resolution, and thus also the Hochschild cohomology of these algebras, are periodic.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: wolf86_666@list.ru

Поступило 1 февраля 2011 г.