Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 388, 2011 г.

С. С. Афанасьева, Г. К. Пак

НОРМЕННЫЕ РЯДЫ ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ХОНДЫ

§1. Введение

При обобщении символа Гильберта на формальные группы, точным аналогом хорошо известного в K-теории соотношения Стейнберга $\{\alpha, 1-\alpha\} = 0$, должно быть равенство $(\alpha, -\alpha) = 0$, в котором первый аргумент – из мультипликативной группы, а второй принадлежит формальному модулю. Последнее равенство, как было показано в [1], верно не для всех формальных групп. Поэтому, естественно рассматривать такие ряды $\varphi(x)$, для которых $(\alpha, \varphi(\alpha))_F = 0$ выполняется при всех α из формального модуля. Такие ряды называют норменными рядами. Настоящая работа является продолжением работы [3], в которой на основе явных формул для спаривания Гильберта такие ряды изучались для формальных групп Любина–Тейта. Здесь получен аналогичный результат для формальных групп Хонды (см. теорему 2),т.е. найдены необходимые и достаточные условия норменности заданного ряда. Эти условия приобретают весьма элегантный вид в случае групп единичной высоты и неразветвленного расширения. Важную роль будут играть явные формулы для спаривания Гильберта, полученные в [5]. В заключение отметим, что впервые норменные ряды были рассмотрены в работе [2], где они были определены для мультипликативного аргумента, т.е. рассматривались соотношения вида $(r(\alpha), \alpha)_F = 0$.

§2. Обозначения

- k – локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$),
- $\bar{k}$ – его поле вычетов характеристики $p \geqslant 3$,
- $q = p^f = \operatorname{card} \bar{k}$,
- $\mathcal{O}$ – кольцо целых поля k,
- π – простой элемент поля k,

Ключевые слова: формальные группы Хонды, норменные ряды.

Авторы благодарят Санкт-Петербургский государственный университет за финансовую поддержку в рамках НИР.

- k' – конечное неразветвленное расширение поля k,
- $\mathcal{O}'$ – кольцо целых поля k',
- $\mathfrak{M}'$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}'$,
- $\triangle$ – автоморфизм Фробениуса расширения k'/k,
- $\blacktriangle$ – оператор Фробениуса в кольце $k'((x))$:

$$\blacktriangle\left(\sum c_i x^i\right) = \sum c_i^{\triangle} x^{qi},$$

- $F(x,y) \in \mathcal{O}'[[x,y]]$ – формальная группа Хонды канонического типа $u = \pi - a_1\blacktriangle - \cdots - a_h\blacktriangle^h$.
  Подробнее о формальных группах Хонды см. работы [8] и [4, 6].
- $\lambda(x)$ – логарифм F,
- $\widehat{\Omega}$ – пополнение алгебраического замыкания поля k,
- $F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}})$ – группа точек на максимальном идеале $\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}$ кольца целых поля $\widehat{\Omega}$,
- $W_F^n = \{\alpha \in F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}) : [\pi^n]_F(\alpha) = 0\} = \{\alpha \in F(\mathfrak{M}_{\widehat{\Omega}}) : f^{(n)}(\alpha) = 0\}$,
- $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_h$ – $\mathcal{O}$-образующие модуля W_F^n,
- K – конечное расширение поля k', содержащее W_F^n,
- M – максимальный идеал кольца целых поля K,
- Π – простой элемент в K,
- k_h – неразветвленное расширение k степени h,
- $\mathcal{O}_h$ – кольцо целых поля k_h,
- T – подполе инерции в расширении K/k,
- $\mathcal{O}_T$ – кольцо целых поля T,
- $\mathcal{R}_h$ и $\mathcal{R}$ – системы представителей Тейхмюллера в поле k_h и T соответственно,
- tr_h и tr – операторы следов в k_h/k и T/k соответственно,
- T_0 – подполе инерции в $K/\mathbb{Q}_p$,
- $\mathcal{O}_0$ – кольцо целых поля T_0,
- $\psi_K : K^* \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ – отображение взаимности,
- $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}'}(F, F_1)$ – выделенный гомоморфизм (см. [4]),
- $\mathcal{A} : F \mapsto F_1$ – обратимый оператор на множестве формальных групп Хонды над кольцом $\mathcal{O}'$, построенный в [4]. Он задает цепочку формальных групп Хонды

$$F \xrightarrow{f} F_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} F_n,$$

  где $F_m = \mathcal{A}^m F,\ 1 \leqslant m \leqslant n$,

- $f^{(m)} = f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \ldots \circ f_1 \circ f$,
- $\pi_1^{(m)} = \pi^m / a_h^{1+\triangle^h+\ldots+\triangle^{h(m-1)}}$,
- λ_m – логарифм F_m,
- $u_n = \pi - b_1\blacktriangle - \ldots - b_h\blacktriangle^h$ – канонический тип группы F_n,
- $(\ ,\ ), \{\ ,\ \} : K^* \times F(M) \to W_F^n$ – обобщения спаривания Гильберта на формальную группу F, а именно:

  $$(\alpha, \beta)_F = \psi_K(\alpha)(\widetilde{\beta}) -_F \widetilde{\beta}, \text{ где } \widetilde{\beta} \in \Omega : [\pi^n]_F(\widetilde{\beta}) = \beta,$$
  $$\{\alpha, \beta\}_F = \psi_K(\alpha)(\bar{\beta}) -_F \bar{\beta}, \text{ где } \bar{\beta} \in \Omega : f^{(n)}(\bar{\beta}) = \beta.$$

  Несложно проверить, что:

  $$(\alpha, \beta)_F = \{\alpha, [\pi_1^n/\pi^n]_{F,F_n}(\beta)\}, \tag{1}$$

  напомним, что $[\pi_1^n/\pi^n]_{F,F_n} = \lambda_n^{-1} \circ \left(\frac{\pi_1^n}{\pi^n}\lambda\right)$,
- $l_F(\psi) = (u\pi^{-1})(\lambda \circ \psi)$, $l_{F_n}(\psi) = (u_n\pi^{-1})(\lambda_n \circ \psi)$, где $\psi \in \mathcal{O}_T[[x]]_0$.

§3. Вспомогательные и известные результаты

В работе [5] была доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\alpha(x) = x^k\theta\varepsilon(x)$, где $k \geqslant 1$, $\theta \in \mathcal{R}$, $\varepsilon \in \mathcal{O}_0[[x]]$, $\varepsilon(0) = 1$. Тогда для любых натуральных m, i выполняются сравнения:*

(1) $\alpha^{mq^i} - \blacktriangle^i\alpha^m \equiv mq^i\blacktriangle^i\alpha^m \cdot \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\varepsilon \mod (mp)^2$.

(2) *Пусть φ, ψ – такие степенные ряды, что $\frac{q^h}{p}\varphi$ и ψ имеют целые коэффициенты, а ряд ψ имеет нулевой свободный член и обратимый первый коэффициент. Тогда*

$$\operatorname{res}_x \frac{d\varphi}{dx}\Gamma^{(s)} \circ \psi \equiv 0 \mod \pi^s,$$

в частности,

$$\operatorname{res}_x \frac{d\varphi}{dx}\Gamma \circ \psi \equiv 0 \mod \pi^n.$$

(3) *Если $m = q^{hr}m_0$, $q^h \nmid m_0$, $0 \leqslant r \leqslant n$, то*

$$\operatorname{res}_x \left(\frac{d}{dx}\frac{\alpha^m}{m}\right) \cdot \Gamma \equiv 0 \mod \pi^{n-r}.$$

Здесь $\Gamma(x) \in \mathcal{L}_\mu$ – некоторый фиксированный ряд Лорана, для которого существует такая последовательность рядов Лорана $\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(n)} = \Gamma$, что для всех $0 \leqslant s \leqslant n$

$$\begin{aligned} &\text{(a)}\ \ \Gamma^{(s)} \in \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}, \\ &\text{(b)}\ \ x\frac{d}{dx}\Gamma^{(s)} \in \pi^s \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}}, \\ &\text{(c)}\ \ \blacktriangle^h \Gamma^{(s-1)} - \Gamma^{(s)} \in \pi^s \mathcal{L}_{\mu q^{h(n-s)}} \end{aligned} \tag{2}$$

(по поводу кольца $\mathcal{L}_\mu$ см. [5]).

Для $\alpha \in K^*$, $\alpha = \Pi^m \theta \varepsilon$, где $m \in \mathbb{Z}, \theta \in \mathcal{R}, \varepsilon$ – главная единица, обозначим $\underline{\alpha}(x) = x^m \theta \underline{\varepsilon}$, где $\underline{\varepsilon}$ – степенной ряд с коэффициентами из $\mathcal{O}_0$, для которого $\underline{\varepsilon}(\Pi) = \varepsilon$. Если $z_1, z_2, \dots, z_h$ – разложения в ряды образующих $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_h$ модуля $W_F^n = \mathrm{Ker}[\pi^n]_F$, то обозначим

$$W_i = \pi_1^{(n)} \lambda \circ z_i.$$

В работе [5] доказан следующий результат.

Теорема 1. *Обобщенный символ Гильберта* $(\ ,\ )_F$ *задается явной формулой*

$$(\alpha, \beta)_F = \sum_{j=1,(F)}^{h} [\mathrm{tr\ res}\ R_j]_F(\eta_j), \tag{3}$$

где $R_j \in \mathcal{L}_\mu$, $1 \leqslant j \leqslant h$, *определяются из уравнения*

$$\begin{pmatrix} \pi^n \lambda \circ \eta_1 & \pi^n \lambda \circ \eta_2 & \dots & \pi^n \lambda \circ \eta_h \\ \pi^n \blacktriangle(\lambda \circ \eta_1) & \pi^n \blacktriangle(\lambda \circ \eta_2) & \dots & \pi^n \blacktriangle(\lambda \circ \eta_h) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \pi^n \blacktriangle^{h-1}(\lambda \circ \eta_1) & \pi^n \blacktriangle^{h-1}(\lambda \circ \eta_2) & \dots & \pi^n \blacktriangle^{h-1}(\lambda \circ \eta_h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = l_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} a_i \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right) \log \underline{\varepsilon} \cdot \frac{d}{dx}\blacktriangle^i(\lambda \circ \underline{\beta}).$$

Мы будем, учитывая (1), использовать несколько другую явную формулу, тоже доказанную в [5].

$$\{\alpha, \beta\}_F = \langle \alpha, \beta \rangle_F = \sum_{j=1,(F)}^{h} [\mathrm{tr\ res}\ R_j](\eta_j),$$

где $R_j \in \mathcal{L}_\mu$, $1 \leqslant j \leqslant h$, определяются из уравнения

$$\begin{pmatrix} W_1 & W_2 & \dots & W_h \\ \blacktriangle W_1 & \blacktriangle W_2 & \dots & \blacktriangle W_h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \blacktriangle^{h-1} W_1 & \blacktriangle^{h-1} W_2 & \dots & \blacktriangle^{h-1} W_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_n = l_{F_n}(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i \left(1 - \frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right) \log \underline{\varepsilon} \cdot \frac{d}{dx}\blacktriangle^i(\lambda_n \circ \underline{\beta}).$$

§4. Основной результат

В этом параграфе будет сформулирован и доказан основной результат работы, а именно, будут найдены условия норменности ряда.

Определение 1. *Ряд $\varphi_n(x) = x + \ldots \in \mathcal{O}_{k'}[[x]]$ назовем норменным степени n для формальной группы F, если для любого поля K, содержащего W_F^n, выполнено равенство:*

$$(\alpha, \varphi_n(\alpha))_{F,n} = 0$$

при всех $\alpha \in F(\mathfrak{M}_K) \cap K^*$.

Определение 2. *Ряд $\varphi(x) = x + \ldots \in \mathcal{O}_{k'}[[x]]$ назовем абсолютно норменным для формальной группы F, если он является норменным степени n при любом $n \geqslant 1$.*

Предложение 1. *Пусть для ряда $\varphi_n(x)$ ряд*

$$l_F(\varphi_n) = \sum_{m \geqslant 1} d_m x^m$$

удовлетворяет условию

$$v(d_m) \geqslant \min(n, v_{q^h}(m)) \tag{4}$$

при всех $m \geqslant 1$. Тогда ряд $\varphi_n(x)$ является норменным степени n для F.

Доказательство. Пусть ряд φ_n удовлетворяет условию (4) и пусть K – конечное расширение поля k', содержащее W_F^n и $\alpha \in K^* \cap F(\mathfrak{M}_K)$, где $F(\mathfrak{M}_K)$ – группа точек на максимальном идеале $\mathfrak{M}_K$ кольца целых поля K. Покажем, что

$$(\alpha, \varphi_n(\alpha))_{F,n} = 0 \tag{5}$$

при всех $\alpha \in F(\mathfrak{M}_K) \cap K^*$. Положим

$$\psi = [\pi_1^n/\pi^n]_{F,F_n}(\varphi_n),\ \lambda_n(\psi) = \sum_{m\geqslant 1} c_m x^m,\ l_{F_n}(\psi) = \sum_{m\geqslant 1} c'_m x^m.$$

Тогда

$$(\alpha, \varphi_n(\alpha))_F = \{\alpha, \psi(\alpha)\}_F = \sum_{j=1,(F)}^{h} [\mathrm{tr\ res}\ \Phi_n \Gamma_j](\eta_j),$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_n &= l_{F_n}(\psi(\underline{\alpha}))\underline{\alpha}^{-1}\frac{d\underline{\alpha}}{dx} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\underline{\varepsilon}\frac{d}{dx}(\blacktriangle^i(\lambda_n\circ\psi(\underline{\alpha})))\\
&= \sum_{m\geqslant 1} c_m\underline{\alpha}^{m-1}d\underline{\alpha} - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i \sum_{m\geqslant 1} c_m^{\blacktriangle^i}\underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i}\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\\
&- \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{h} b_i\left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\underline{\varepsilon}\frac{d}{dx}\sum_{m\geqslant 1} c_m^{\blacktriangle^i}\underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i} = \sum_{m\geqslant 1} c'_m\underline{\alpha}^{m-1}d\underline{\alpha}\\
&+ \sum_{i=1}^{h} b_i\left(\sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m^{\blacktriangle^i}}{\pi}((\underline{\alpha})^{mq^i} - \underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha} - \left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\underline{\varepsilon}d\underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i}\right),
\end{aligned}$$

Γ_j удовлетворяет условию (2) (см. [5, лемма 4.1]).

Обозначим

$$\gamma^{(i)} = \sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m^{\blacktriangle^i}}{\pi}\gamma_m^{(i)},$$

$$\gamma_m^{(i)} = (\underline{\alpha}^{mq^i} - \underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha} - \left(1-\frac{\blacktriangle^i}{q^i}\right)\log\underline{\varepsilon}d(\underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i}),$$

тогда $\gamma_m^{(i)} = dg_m^{(i)}$, где $g_m^{(i)} = \frac{\underline{\alpha}^{mq^i} - \underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i}}{mq^i} - \frac{1}{q^i}\log\frac{\underline{\alpha}^{q^i}}{\underline{\alpha}^{\blacktriangle^i}}\underline{\alpha}^{m\blacktriangle^i}$,
таким образом,

$$\gamma^{(i)} = \sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m^{\blacktriangle^i}}{\pi}dg_m^{(i)} = d\left(\sum_{m\geqslant 1}\frac{c_m^{\blacktriangle^i}}{\pi}g_m^{(i)}\right),$$

значит,

$$\Phi_n = \sum_{m\geqslant 1} c'_m d\frac{\underline{\alpha}^m}{m} + dg,$$

где

$$g = \sum_{i=1}^{h} b_i g^{(i)} = \sum_{i=1}^{h} b_i \sum_{m \geqslant 1} \frac{c_m^{\blacktriangle^i}}{\pi} g_m^{(i)}.$$

Таким образом, чтобы доказать (5), осталось проверить, что для любого $1 \leqslant j \leqslant h$

$$\operatorname{tr} \operatorname{res} c'_m d\frac{\underline{\alpha}^m}{m} \cdot \Gamma_j \equiv 0 \mod \pi^n, \tag{6}$$

$$\operatorname{tr} \operatorname{res} dg \cdot \Gamma_j \equiv 0 \mod \pi^n. \tag{7}$$

Проверим сначала (7):

$$\frac{q^i}{p} g^{(i)} = \sum_{m \geqslant 1} \frac{c_m^{\blacktriangle^i}}{\pi} \frac{q^i}{p} g_m^{(i)},$$

по лемме 1 (п. 1)

$$mp \mid \frac{q^i}{p} g_m^{(i)},$$

$mc_m \in \mathcal{O}_{k'}$, т.к. c_m – коэффициенты ряда $\lambda_n(\psi)$, который является логарифмом некоторой формальной группы G_n, значит и $mc_m^{\blacktriangle^i} \in \mathcal{O}_{k'}$. Таким образом, $\frac{q^i}{p} g^{(i)}$ имеет целые коэффициенты, $\frac{q^h}{p} g = \sum\limits_{i=1}^{h} b_i q^{h-i} \frac{q^i}{p} g^{(i)}$ и, значит, сравнение (7) следует из леммы 1, п. 2.

Осталось проверить (6): $l_{F_n}(\psi) = l_{F_n}([\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n} \circ \varphi) = \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} l_F(\varphi)$ (см. ([5, доказательство теоремы 5.1])), следовательно, $c'_m = \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} d_m$ и, значит, коэффициенты ряда $l_{F_n}(\psi) = \sum_{m \geqslant 1} c'_m x^m$ тоже удовлетворяют (4).

Пусть $m = q^{hr} m_0$, $q^h \nmid m_0$. Тогда если $r \geqslant n$, то по условию $c'_m \equiv 0 \mod \pi^n$ и поэтому (6) следует из того, что $\operatorname{res}_x \left(\frac{d}{dx} \frac{\underline{\alpha}^m}{m} \right) \cdot \Gamma_j$ целый (это верно, т.к. $\Gamma_j \in \mathcal{L}_\mu$ имеет целые коэффициенты при отрицательных степенях). А если $r < n$, то по все той же лемме 1,

$$\operatorname{res}_x \left(\frac{d}{dx} \frac{\underline{\alpha}^m}{m} \right) \cdot \Gamma_j \equiv 0 \mod \pi^{n-r}$$

и, поскольку $v(c'_m) \geqslant r$, сравнение (6) тоже выполнено. Предложение доказано. □

Теорема 2. *Ряд* $\varphi(x) = x + \cdots \in \mathcal{O}_{k'}[[x]]$ *является абсолютно норменным для* F *тогда и только тогда, когда ряд*

$$l_F(\varphi) = \sum_{m \geqslant 1} d_m x^m$$

удовлетворяет условию

$$v(d_m) \geqslant v_{q^h}(m) \tag{8}$$

при всех $m \geqslant 1$.

Доказательство. 1. Если ряд $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (8), то он удовлетворяет условию (4) предложения 1 при любом $n \geqslant 1$ и, следовательно, является абсолютно норменным.

2. Обратно. Пусть $\varphi(x) \in x\mathcal{O}_{k'}[[x]]$ и ряд $l_F(\varphi) = \sum_{m \geqslant 1} d_m x^m$ не удовлетворяет условию (8), т.е. для некоторых $m : v(d_m) < v_{q^h}(m)$. Среди таких m выберем наименьший индекс t с минимальным значением $v(d_t)$.

Таким образом, если $t = q^{nh} t_0, q^h \nmid t_0$, то

$$\begin{aligned} &v(d_t) < n, \\ &v(d_t) < v(d_m) \text{ для } m < t, \\ &v(d_t) \leqslant v(d_m) \text{ для } m \geqslant t, \end{aligned} \tag{9}$$

где m пробегает все индексы, для которых не выполнено условие (8). Пусть $K_n = k'(W_F^n)$ и K вполне разветвленное расширение над K_n степени t_0. Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_h$ – образующие $\mathcal{O}$-модуля W_F^n и $\eta = \eta_1$. По лемме 4 работы [6] существуют такие элементы $\theta_{ij} \in \mathcal{R}_h$, $1 \leqslant i, j \leqslant h$, что $\eta_i \equiv \theta_{ij}\eta_j \mod \Pi^{2e_n}$, причем для каждого j элементы $\theta_{1j}, \theta_{2j}, \ldots, \theta_{hj}$ образуют базис $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{O}_h$. Расширение K/K_n вполне разветвлено, поэтому можно выбрать такой простой элемент Π в поле K, что $\eta = \Pi^{t_0} + b_1\Pi^{t_0+1} + \cdots$, $b_i \in \mathcal{O}'$, и, соответственно, $\eta_i = \theta_{i1}\Pi^{t_0} + \cdots$, т.к. $\eta_i \equiv \theta_{i1}\eta \mod \Pi^{2e_n}$. Если $z_1, z_2, \ldots, z_h$ – разложение в ряды образующих $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_h$, то

$$z_i \equiv \theta_{i1} x^{t_0} \mod (x^{t_0+1}).$$

$f^{(n)}(x) \equiv x^{q^{nh}} \mod \pi$, следовательно,

$$W_i = \lambda_n \circ f_n \circ z_i \equiv \theta_{i1} x^t \mod (\pi, x^{t+1}). \tag{10}$$

Из явной формулы получаем:

$$(\Pi, \varphi(\Pi))_F = \{\Pi, [\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n}(\varphi(\Pi))\} = \sum_{j=1,(F)}^{h} [\mathrm{tr\ res}\ \Phi_n \Gamma_j]_F(\eta_j),$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_n(x) &= l_{F_n}([\pi_1^{(n)}/\pi^n]_{F,F_n}(\varphi(x))x^{-1} \\
&= \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} l_F(\varphi(x))x^{-1} = \sum_{m\geqslant 1} \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} d_m x^{m-1}, \\
\Gamma_j &= (-1)^{j+1} \frac{\Delta_{1,j}(A)}{\det A}, \\
A &= \begin{pmatrix} W_1 & W_2 & \dots & W_h \\ \blacktriangle W_1 & \blacktriangle W_2 & \dots & \blacktriangle W_h \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \blacktriangle^{h-1} W_1 & \blacktriangle^{h-1} W_2 & \dots & \blacktriangle^{h-1} W_h \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$\Delta_{1j}(A)$ – минор $(h-1)$-го порядка матрицы A.

Из (10) получаем сравнение

$$\begin{aligned}
\det A &\equiv \begin{vmatrix} \theta_{11} x^t & \theta_{21} x^t & \dots & \theta_{h1} x^t \\ \theta_{11}^{\triangle} x^{qt} & \theta_{21}^{\triangle} x^{qt} & \dots & \theta_{h1}^{\triangle} x^{qt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{11}^{\triangle^{h-1}} x^{q^{h-1}t} & \theta_{21}^{\triangle^{h-1}} x^{q^{h-1}t} & \dots & \theta_{h1}^{\triangle^{h-1}} x^{q^{h-1}t} \end{vmatrix} \\
&= x^{t+qt+\dots+q^{h-1}t} \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} & \dots & \theta_{h1} \\ \theta_{11}^{\triangle} & \theta_{21}^{\triangle} & \dots & \theta_{h1}^{\triangle} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{11}^{\triangle^{h-1}} & \theta_{21}^{\triangle^{h-1}} & \dots & \theta_{h1}^{\triangle^{h-1}} \end{vmatrix} \\
&= \Theta x^{t+qt+\dots+q^{h-1}t} \mod (\pi, x^{t+qt+\dots+q^{h-1}t+1}).
\end{aligned}$$

Так как $\bar\theta_{11}, \bar\theta_{21}, \dots, \bar\theta_{h1}$ образуют базис $\bar k_h$ над $\bar k$ (здесь $\bar\theta \in \bar k_h$ – вычет θ), то векторы $(\bar\theta_{11}, \bar\theta_{21}, \dots, \bar\theta_{h1})$, $(\bar\theta_{11}^{\triangle}, \bar\theta_{21}^{\triangle}, \dots, \bar\theta_{h1}^{\triangle})$, $\dots$, $(\bar\theta_{11}^{\triangle^{h-1}}, \bar\theta_{21}^{\triangle^{h-1}}, \dots, \bar\theta_{h1}^{\triangle^{h-1}})$ линейно независимы над $\bar k'$, см. [7, гл. VIII, §5 следствие 2 из теоремы 9]. Таким образом, $\bar\Theta \neq 0$, и значит, Θ обратим в $\mathcal{O}'$, откуда

$$\frac{1}{\det A} \equiv \Theta^{-1} x^{-t-qt-\dots-q^{h-1}t} \mod (\pi, x^{-t-qt-\dots-q^{h-1}t+1}). \tag{11}$$

Аналогично

$$\Delta_{1,j}(A) \equiv \Theta'_j x^{qt+\ldots+q^{h-1}t} \mod (\pi, x^{qt+\ldots+q^{h-1}t+1}). \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{h}(-1)^{j+1}\theta_{j1}\Theta'_j x^{t+q1+\ldots+q^{h-1}t} \equiv \sum_{j=1}^{h} W_j(-1)^{j+1}\Delta_{1,j}(A)$$
$$= \det A \equiv \Theta x^{t+qt+\ldots+q^{h-1}t} \mod (\pi, x^{t+qt+\ldots+q^{h-1}t+1}),$$

поэтому

$$\sum_{j=1}^{h}(-1)^{j+1}\theta_{j1}\Theta'_j \equiv \Theta \mod \pi,$$

значит для некоторого j элемент Θ'_j обратим в $\mathcal{O}'$. Пусть, например, обратим Θ'_1. Из (11), (12) получаем сравнение

$$\Gamma_1 \equiv \frac{\Theta'_1}{\Theta} x^{-t} \mod (\pi, x^{-t+1}). \tag{13}$$

Откуда

$$\operatorname{res} \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} d_t x^{t-1}\Gamma_1 \equiv \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} d_t \frac{\Theta'_1}{\Theta} \mod \pi d_t. \tag{14}$$

Далее, для всех $m \neq t$ имеем

$$\operatorname{res} \frac{\pi_1^{(n)}}{\pi^n} d_m x^{m-1}\Gamma_1 \equiv 0 \mod \pi d_t, \tag{15}$$

т.к. если для m не выполнено условие (8), то (15) следует из (9) и (13), а если выполнено, то из леммы 1.

Таким образом: $\operatorname{res} \Phi_n\Gamma_1 \equiv \frac{\pi_1^{(n)}\Theta'_1}{\pi^n\Theta} d_t \mod d_t\pi$, откуда $\operatorname{tr}\operatorname{res} \Phi_n\Gamma_1 \not\equiv 0 \mod \pi^n$, и значит для $\alpha = \Pi$

$$(\alpha, \varphi(\alpha))_{F,n} = \sum_{j=1}^{n}[\operatorname{tr}\operatorname{res} \Phi_n\Gamma_j](\eta_j) \neq 0,$$

т.е. ряд $\varphi(x)$ не будет норменным. □

§5. Полезные следствия

Как известно из [8], любая одномерная формальная группа над неразветвленным расширением $\mathbb{Q}_p$ является группой Хонды. Т.е. если в обозначениях выше

$k = \mathbb{Q}_p$,

$k'/\mathbb{Q}_p$ – конечное неразветвленное расширение,

$\mathcal{O}'$ – кольцо целых поля k',

$F(x, y) \in \mathcal{O}'[[x, y]]$ – формальная группа (произвольная),

то F – формальная группа Хонды. При этом, если F имеет единичную высоту, то условие теоремы 2 можно переписать следующим образом:

Предложение 2. *Ряд $\varphi(x) = x + \cdots \in \mathcal{O}_{k'}[[x]]$ является абсолютно норменным для F тогда и только тогда, когда*

$$\int X^{-1}(l_F \circ \varphi)(X)\, dX \in \mathcal{O}'[[X]]. \tag{16}$$

Литература

1. С. В. Востоков, И. Б. Фесенко, *Об одном свойстве спаривания Гильберта.* — Матем. заметки **43**, No. 3 (1988), 393–400.
2. В. А. Колывагин, *Формальные группы и символ норменного вычета.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **43**, No. 5 (1979), 1054–1120.
3. С. В. Востоков, Р. Перлис, *Номерные ряды для формальных групп Любина–Тейта.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 105–127.
4. О. В. Демченко, *Новое в отношениях формальных групп Любина–Тейта и формальных групп Хонды.* — Алгебра и анализ **10**, вып. 5 (1998), 77–84.
5. С. В. Востоков, О. В. Демченко, *Явная формула спаривания Гильберта для формальных групп Хонды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 86–128.
6. О. В. Демченко, *Формальные группы Хонды: арифметика группы точек.* — Алгебра и анализ, **12**, No. 1 (2000), 132–149.
7. С. Ленг, *Алгебра*, Мир, М., 1968.
8. T. Honda, *On the theory of commutative formal groups.* — J. Math. Soc. Japan **22** (1970), 213–243.

Afanas'eva S. S., Pak G. K. Norm series for Honda formal groups.

In the present paper, we study norm series for Honda formal groups. The Steinberg relation for the classical Hilbert symbol is generalized to Honda formal groups. We obtain necessary and sufficient conditions for a

series to satisfy the generalized Steinberg relation. In the paper such series are called norm series.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: cheery_sonya@mail.ru

Поступило 4 апреля 2011 г.

Дальневосточный
государственный университет,
Институт математики
и компьютерных наук
E-mail: pakgk@imcs.dvgu.ru