Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 387, 2011 г.

Н. В. Проскурин

ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ L–ФУНКЦИЙ И ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

В недавней работе автора [3] описан метод вычисления значений L-функций, основанный на использовании укороченных функциональных уравнений. В настоящей заметке мы покажем как можно воспользоваться полиномами Чебышева для существенного повышения эффективность метода.

Как и в [3], мы рассматриваем пару функций – $L(a;\cdot)$ и $L(b;\cdot)$ – связанных функциональным уравнением риманова типа –

$$L(a;s)\,\Omega(s) = L(b;1-s)\,\Omega(1-s), \quad s\in\mathbb{C}.$$

Функции определяются рядами Дирихле

$$L(a;s) = \sum_n \frac{a_n}{n^s}, \quad L(b;s) = \sum_n \frac{b_n}{n^s}$$

для $s\in\mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} s > 1$. Здесь $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, а суммирование производится по некоторому счётному множеству положительных вещественных чисел n не имеющему предельных точек. Предполагается, что ряды сходятся абсолютно при условии $\operatorname{Re} s > 1$, и что $L(a;\cdot)$ и $L(b;\cdot)$ продолжаются на всю комплексную плоскость как мероморфные функции с конечным множеством полюсов. Напомним также, что

$$\Omega(s) = \prod_{j=1,\dots,k} \Gamma(\alpha_j s + \beta_j), \quad s\in\mathbb{C},$$

где k – целое положительное число, $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_1,\dots,\alpha_k > 0$, $\beta_1,\dots,\beta_k \in \mathbb{C}$, Γ – гамма-функция Эйлера.

В наших предположениях и обозначениях имеет место следующее равенство, известное [1, 2] как укороченное функциональное уравнение:

$$\Omega(s)L(a;s) = \nabla_a(\eta,s) + \sum_n \frac{a_n}{n^s}E(s,\tilde{n}\eta) + \sum_n \frac{b_n}{n^{1-s}}E(1-s,\tilde{n}\eta^{-1}) \quad (1)$$

Ключевые слова: ряды Дирихле, вычисление нулей, полиномы Чебышева.

для всех $s \in \mathbb{C}$ и всех $\eta \in \mathbb{C}$ с $\mathrm{Re}\,\eta > 0$. Здесь под $\tilde{n}$ понимается $n^{1/\alpha}$ с $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$, E – некоторая специальная функция, для которой имеется интегральное предсталение. Ряды в правой части (1) сходятся абсолютно и равномерно на компактах как по s, так и по η. Слагаемое $\nabla_a(\eta, s)$ в правой части выражается через полюса и вычеты функции $s \mapsto \Omega(s)L(a;s)$ и с вычислительной точки зрения не доставляет проблем.

В предположении, что все полюсы функции Ω простые, в [3] показано, что

$$E(s,u) = \Omega(s) - u^{\alpha s} \sum_{j=1,\ldots,k} u^{\alpha\beta_j/\alpha_j} Z_j(s, u^{\alpha/\alpha_j}), \tag{2}$$

где функции Z_j определяются разложениями в ряды –

$$Z_j(s,v) = \sum_{m=0,1,\ldots} \frac{C_j(m)\, v^m}{\alpha_j s + \beta_j + m} \tag{3}$$

с коэффициентами

$$C_j(m) = \frac{(-1)^m}{m} \prod_{\substack{r=1,\ldots,k \\ r\neq j}} \Gamma\Big(-\frac{m+\beta_r}{\alpha_r}\Big), \quad m = 0,1,2,\ldots .$$

Для вычисления $L(a;s)$ посредством (1) мы должны вычислить

$$\sum_{n\leq q} \frac{a_n}{n^s} E(s, \tilde{n}\eta) \tag{4}$$

с некоторым достаточно большим q и вычислить ещё сумму того же вида с b_n, $1-s$ и η^{-1} вместо a_n, s и η. О выборе параметров η и q см. [3]. Мы считаем коэффициенты a_n и b_n известными, т.е. либо задаными каким-либо явным образом, либо заранее вычисленными с достаточной точностью. Рассмотрим (4). Посредством (2), вычисление (4) сводится к вычислению

$$\sum_{n\leq q} \frac{a_n}{n^s}$$

и к вычислению (для каждого $j = 1, \dots k$)

$$\sum_{n \le q} a_n n^{\beta_j/\alpha_j} Z_j(s, \eta^{\alpha/\alpha_j} n^{1/\alpha_j}). \tag{5}$$

Метод вычисления этих сумм описан в [3]. В том что касается сумм (5), метод можно существенно усовершенствовать. С этой целью мы воспользуемся полиномами Чебышева, а точнее – применим чебышевский метод экономизации.

Рассмотрим ряд (3) с $v = \eta^{\alpha/\alpha_j} n^{1/\alpha_j}$, $n \le q$. Определим x условием $n^{1/\alpha_j} = q^{1/\alpha_j} x^2$. При этом $0 < x \le 1$ и ряд (3) можно переписать как

$$\sum_{m=0,1,\dots} \frac{C_j(m)\, \eta^{\alpha m/\alpha_j} q^{m/\alpha_j} x^{2m}}{\alpha_j s + \beta_j + m} \tag{6}$$

Выберем некоторое целое число h так, чтобы сумма ряда (6) достаточно хорошо аппроксимировалась частичной суммой распространённой на $m \le h$. Мы можем рассмотреть эту частичную сумму как полином (от x) и разложить его по полиномам Чебышева. Мы имеем

$$\sum_{m=0,1,\dots,h} \frac{C_j(m)\, \eta^{\alpha m/\alpha_j} q^{m/\alpha_j} x^{2m}}{\alpha_j s + \beta_j + m} = \sum_{r=0,1,\dots,h} \sigma_r(s,\eta)\, T_{2r}(x) \tag{7}$$

с коэффициентами[1]

$$\sigma_r(s,\eta) = \omega_r \sum_{r \le m \le h} \frac{C_j(m)\, \eta^{\alpha m/\alpha_j} q^{m/\alpha_j}}{2^{2m}(\alpha_j s + \beta_j + m)} \binom{2m}{m-r}, \tag{8}$$

где $\omega_0 = 1$ и $\omega_r = 2$ для $r \ge 1$. Далее, сумму в правой части (7) можно, без существенной потери точности аппроксимации, заменить более короткой суммой

$$\sum_{r=0,1,\dots,h'} \sigma_r(s,\eta)\, T_{2r}(x), \tag{9}$$

[1]Для доказательства следует воспользоваться разложением

$$x^{2m} = 2^{1-2m} \sum_{m \ge r \ge 0} \binom{2m}{m-r} T_{2r}(x) - 2^{-2m}\binom{2m}{m}, \quad m \ge 0.$$

где h' существенно меньше, чем h. После этого, для (5) получаем аппроксимацию суммой

$$\sum_{r=0,1,\dots,h'} \sigma_r(s,\eta)\Big\{\sum_{n\le q} a_n n^{\beta_j/\alpha_j} T_{2r}\big((n/q)^{1/2\alpha_j}\big)\Big\}.$$

Здесь внутренняя сумма (по n) не зависит от s. Её надлежит вычислить с умеренной точностью, причём требование к точности вычислений не возрастает с ростом $\operatorname{Im} s$. Вычисление коэффициентов $\sigma_r(s,\eta)$, определённых формулой (8), осуществляется посредством разложений Тейлора по схеме изложенной подробно в [3]. Эти вычисления приходится проводить с очень высокой точностью, причём требование к точности вычислений неограниченно возрастает с ростом $\operatorname{Im} s$. Тем не менее, сравнительно с методом из [3], экономизация (т.е. замена суммы по r в (7) на более короткую сумму (9)) весьма существенно сокращает время вычислений.

Литература

1. А. Ф. Лаврик, *О функциональных уравнениях функций Дирихле.* — Изв. АН СССР **31**, No. 2 (1967), 431–442.
2. А. Ф. Лаврик, *Приближённые функциональные уравнения функций Дирихле.* — Изв. АН СССР **32**, No. 1 (1968), 134–185.
3. Н. В. Проскурин, *О проблеме вычисления значений L-функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 273–279.

Proskurin N. V. Computation of L-functions and Chebyshev polynomials.

Chebyshev polynomials and Chebyshev's economization method are applied to speed up computation of L-functions values.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 15 сентября 2010 г.