

В. В. Корняк

КОНЕЧНЫЕ КВАНТОВЫЕ МОДЕЛИ: КОНСТРУКТИВНЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ КВАНТОВОГО ПОВЕДЕНИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о том, “является ли реальный мир дискретным или непрерывным” или даже “конечным или бесконечным” относится исключительно к метафизике, так как никакие эмпирические наблюдения или логические аргументы не в состоянии обосновать тот или иной выбор – это вопрос веры или вкуса. Конечно, дискретные и непрерывные *математические* теории существенно различаются и эффективность их применения в физике зависит от конкретных исторических обстоятельств. В частности, со времён Ньютона и до появления современных компьютеров анализ и дифференциальная геометрия были фактически единственным средством математического изучения физических систем.¹ С развитием цифровых технологий “дискретный”

Ключевые слова: квантовое поведение, инварианты групп симметрий, правило Борна.

Работа частично финансировалась за счёт грантов 01-01-00200 Российского Фонда Фундаментальных Исследований и НШ-3810.2010.2 Министерства образования и науки Российской Федерации.

¹Пуанкаре подчёркивал конвенциональность выбора между дискретным (конечным) и непрерывным (бесконечным) описаниями природы. Поучительно проследить эволюцию его личных предпочтений. В книге “Ценность науки” ([1], стр. 288–289 русского перевода) он, отрицая фундаментальную обоснованность понятия непрерывности, высоко оценивает его эвристическую силу: “*Единственный естественный предмет математической мысли есть целое число. Непрерывность . . . , без сомнения, изобретена нами, но изобрести ее нас вынудил внешний мир. Без него не было бы анализа бесконечно малых. Все математическое знание свелось бы к арифметике или к теории подстановок. Но мы, напротив, посвятили изучению непрерывности почти все наше время, почти все наши силы. . . . Вам, без сомнения, скажут, что вне целого числа нет строгости, а следовательно, нет математической истины, что оно скрывается всюду и что нужно стараться разоблачить его покровы, хотя бы для этого пришлось обречь себя на нескопцаемые повторения. Но мы не будем столь строги; мы будем признательны непрерывности, которая, если даже всё исходит из целого*

стиль мышления становится всё более популярным, а реальные возможности дискретной математики в приложениях существенно выросли. Важным преимуществом дискретного описания является его концептуальная “экономность” в оккамовском смысле – отсутствие “лишних сущностей” основанных на идеях актуальной бесконечности типа “дедекиндовых сечений”, “последовательностей Коши” и т. п. Более того, дискретная математика содержательно богаче непрерывной – непрерывность “сглаживает” тонкие детали строения структур. Для иллюстрации этого тезиса можно сравнить списки простых групп Ли и простых конечных групп. Имеется также множество аргументов в пользу того, что на малых (планковских) расстояниях дискретное описание физических процессов является более адекватным и что непрерывность целесообразно рассматривать лишь как логическую структуру для приближённого (“термодинамического”) описания больших совокупностей дискретных структур.

Характерной особенностью квантовой механики является её универсальность. Она пригодна для описания систем совершенно различной физической природы и размеров – от элементарных частиц до больших молекул. Например, в [3] описаны эксперименты, в которых наблюдалась квантовомеханическая интерференция между молекулами фуллерена C_{60} . Такой универсальностью обычно обладают теории, в основе которых заложены некие априорные математические принципы. Примером подобной универсальной математической схемы является *статистическая механика*. В её основе лежат не зависящие от конкретной физической системы принципы, главными

числа, одна только была способна извлечь из него **так много**.”

Спустя несколько лет – вскоре после первых наблюдений квантового поведения физических систем – Пуанкаре пишет ([2], стр. 643 русского перевода): “Теперь уже нельзя говорить, что “природа не делает скачков” (*Natura non facit saltus*), – на самом деле она поступает именно наоборот. И не только материя, возможно, сводится к атомам, а даже и мировая история и, я скажу, даже само время, поскольку два мгновения, заключенные в интервале между двумя скачками, не могут быть различимы, ибо они принадлежат одному и тому же состоянию мира.”

Далее Пуанкаре резюмирует сложившийся у него взгляд на проблему: “Однако не следует слишком спешить, ибо сейчас очевидно лишь то, что мы весьма далеки от завершения борьбы между двумя стилями мышления – одного, характерного для атомистов, верящих в существование простейших первоэлементов, очень большого, но конечного числа комбинаций которых достаточно для объяснения всего разнообразия аспектов Вселенной, и другого, присущего приверженцам идей непрерывности и бесконечности.”.

из которых являются классификация микросостояний по уровням энергии и постулат равномерного распределения энергии по степеням свободы. В случае квантовой механики ведущим математическим принципом является симметрия: квантовомеханическое поведение демонстрируют системы, содержащие неразличимые частицы – любое нарушение тождественности частиц разрушает квантовые интерференции.

Мы рассматриваем здесь основные структуры квантового описания предполагая конечность всех входящих в формулировки множеств. При таком подходе, перефразируя Пуанкаре, “всё можно свести к арифметике и теории подстановок”.

2. ОСНОВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1. Классическая и квантовая эволюция

Мы рассматриваем эволюцию *динамической системы* с конечным множеством *состояний* $S = \{s_1, \dots, s_N\}$ в дискретном *времени* $t \in T = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$. Рассматривая *конечные* эволюции мы можем предположить для упрощения обозначений, что $T = [0, 1, \dots, T]$, где $T \in \mathbb{N}$.

Классическая эволюция (история, траектория) динамической системы это последовательность состояний в зависимости от времени $\dots, s_{t-1}, s_t, s_{t+1}, \dots \in S^T$.

Мы предполагаем, что на множестве состояний действует конечная *группа симметрий* $G = g_1 = 1, \dots, g_M \leq \text{Sym}(S)$.

Квантовой эволюцией мы будем называть последовательность перестановок $\dots p_{t-1}, p_t, p_{t+1} \dots \in G^T$, определяющую произведение $\dots p_{t-1} p_t p_{t+1} \dots \in G$. Смысл такого определения будет ясен из дальнейшего.

2. 2. Динамические системы с пространственной структурой

В физике полное множество состояний S имеет, как правило, специальную структуру множества функций $S = \Sigma^X$ на некотором *пространстве* X со значениями в некотором множестве *локальных состояний* Σ .

В динамических системах с пространством естественным образом возникают нетривиальные калибровочные структуры, использующиеся в физических теориях для описания силовых полей.

Мы предполагаем, что *пространство* представляет собой конечное множество $X = \{x_1, \dots, x_{|X|}\}$ симметрии которого образуют *группу пространственных симметрий* $F = \{f_1 = 1, \dots, f_{|F|}\} \leq \text{Sym} X$. Служит

чай, когда F является *собственной* подгруппой группы $\text{Sym}(X)$ всех возможных перестановок точек из X , подразумевает наличие дополнительной структуры у множества X . Например – и этого достаточно для наших целей – X может быть *абстрактным* графом.

Локальные состояния образуют конечное множество

$\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{|\Sigma|}\}$ с группой *внутренних симметрий* $\Gamma = \{\gamma_1 = \mathbf{1}, \dots, \gamma_{|\Gamma|}\} \leq \text{Sym}(\Sigma)$.

Группа G симметрий полного множества состояний S может быть построена из пространственных F и внутренних Γ симметрий различными способами. Естественным обобщением конструкций, используемых в физических теориях является представление G в виде следующего расщепляемого расширения

$$\mathbf{1} \rightarrow \Gamma^X \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow \mathbf{1}, \tag{1}$$

где Γ^X – группа Γ -значных функций на пространстве X . Явные формулы, выражающие групповые операции в G из (1) в терминах операций в группах F и Γ , приведены в [4, 5] – в данной статье они нам не понадобятся.

2.3. Некоторые обозначения

Имея в виду дальнейшие цели, нам удобно включать ноль во множество натуральных чисел, т.е. мы будем использовать определение: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Если необходимо явно указать является ли элемент ψ гильбертова пространства \mathcal{H} вектором или ковектором² будут использоваться обозначения $|\psi\rangle$ или $\langle\psi|$, соответственно.

Для *стандартного скалярного произведения* в K -мерном гильбертовом пространстве мы используем круглые скобки:

$$(\phi|\psi) = \sum_{i=1}^K \overline{\phi^i} \psi^i. \tag{2}$$

Для *инвариантного скалярного произведения* используются угловые скобки:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (U(g)\phi|U(g)\psi), \tag{3}$$

где U – представление группы G в гильбертовом пространстве \mathcal{H} .

²Гильбертово пространство ввиду наличия скалярного произведения канонически изоморфно своему дуальному пространству.

3. КВАНТОВАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Наиболее популярным и интуитивно ясным методом квантования является фейнмановское квантование с помощью интегралов по траекториям [6]. Этот метод особенно удобен для динамических систем с пространственной структурой. Согласно подходу Фейнмана амплитуда квантового перехода системы из начального состояния в конечное вычисляется с помощью суммирования амплитуд вдоль всех возможных классических траекторий, соединяющих эти состояния. Амплитуда вдоль отдельной траектории вычисляется как произведение амплитуд переходов между ближайшими последовательными состояниями на траектории. Стандартно амплитуда имеет вид экспоненты от действия вдоль траектории

$$A_{U(1)} = A_0 \exp iS = A_0 \exp \left(i \int_0^T L dt \right). \quad (4)$$

Функция L , зависящая от первых производных состояний по времени, называется *лагранжианом*. В дискретном времени экспонента от интеграла переходит в произведение

$$\exp \left(i \int L dt \right) \rightarrow e^{iL_{0,1}} \dots e^{iL_{t-1,t}} \dots e^{iL_{T-1,T}}$$

и выражение для амплитуды принимает вид

$$A_{U(1)} = A_0 e^{iL_{0,1}} \dots e^{iL_{t-1,t}} \dots e^{iL_{T-1,T}}. \quad (5)$$

Элементы $\rho_{t-1,t} = e^{iL_{t-1,t}}$ этого произведения естественно интерпретировать как *связности (параллельные переносы)* со значениями в *одномерном* унитарном представлении окружности, т. е. коммутативной группы Ли $\Gamma = S^1 \equiv \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Естественное обобщение возникает из предположений, что группа Γ не обязательно окружность и что её унитарное представление $\rho(\Gamma)$ не обязательно одномерно. В этом случае амплитуда представляет собой многокомпонентный вектор, что удобно для описания частиц с внутренними степенями свободы. Значение такой многокомпонентной амплитуды на траектории принимает вид³

$$A_{\rho(\Gamma)} = \rho(\alpha_{T,T-1}) \dots \rho(\alpha_{t,t-1}) \dots \rho(\alpha_{1,0}) A_0, \quad \alpha_{t,t-1} \in \Gamma. \quad (6)$$

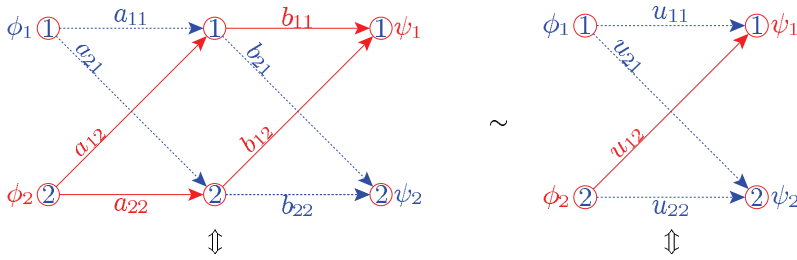
³В некоммутативном случае необходимо соблюдать порядок операторов, согласованный в данном случае с традицией писать матрицы слева от векторов.

Мы будем предполагать, что Γ – конечная группа. Линейные представления конечных групп автоматически унитарны. Ясно, что стандартное квантование (4) можно аппроксимировать с помощью одномерных представлений конечных циклических групп.

Хорошо известно, что фейнмановский подход эквивалентен традиционной матричной формулировке квантовой механики. В этой формулировке эволюция системы из начального состояния в конечное описывается матрицей эволюции $U: |\psi_0\rangle \rightarrow |\psi_T\rangle = U|\psi_0\rangle$. Матрица эволюции может быть представлена в виде произведения матриц, соответствующих элементарным шагам во времени:

$$U = U_{T \leftarrow T-1} \cdots U_{t \leftarrow t-1} \cdots U_{1 \leftarrow 0}.$$

Фактически, фейнмановские правила квантования “перемножать последовательные амплитуды” и “суммировать альтернативные истории” – это изложение другими словами правил умножения матриц. Это ясно из иллюстрации, на которой два шага эволюции квантовой системы с двумя состояниями (однокубитный регистр) представлены параллельно в фейнмановской и матричной формах:



$$BA = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix} \sim U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

В соответствии с фейнмановскими правилами переход, скажем, между состояниями ϕ_2 и ψ_1 определяется суммой по двум путям $b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}$. Но это же выражение является элементом u_{12} произведения матриц $U = BA$. Общий случай произвольного числа состояний и произвольного числа шагов по времени легко выводится по индукции из этого элементарного примера.

Это рассуждение применимо и в случае некоммутативной связности, когда амплитуды вдоль путей описываются формулой (6). Нам

достаточно лишь трактовать эволюционные матрицы A, B и U как блочные матрицы с некоммутативными элементами, являющимися матрицами из представления $\rho(\Gamma)$. Для единообразия рассмотрения мы можем проигнорировать блочную структуру матриц интерпретируя их как обычные матрицы большей размерности из представлений группы полных симметрий \mathbf{G} , сконструированной в соответствии с (1).

В квантовой механике, эволюционные матрицы U представляют собой унитарные операторы, действующие в гильбертовых пространствах *векторов состояний* (называемых также “*волновыми функциями*”, “*амплитудами*” и т.д.). *Квантовомеханические частицы* ассоциируются с унитарными представлениями определённых групп. Эти представления, в соответствии с их размерностями, называются “*синглетами*”, “*дублетами*” и т.д. Многомерные представления описывают *спин*. Квантовомеханический эксперимент сводится к сравнению вектора состояния системы ψ с некоторым эталонным вектором состояния ϕ , обеспечиваемым “*измерительным аппаратом*”. В соответствии с правилом Борна, вероятность наблюдать совпадение состояний равна $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ (в предположении нормировки $\langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$). Чтобы обеспечить конструктивность всех этих понятий квантовой механики мы предполагаем далее, что операторы эволюции являются элементами представлений конечных групп.

4. КВАНТОВОЕ ОПИСАНИЕ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ

4.1 Перестановки и линейные представления.

4.1.1. Действия группы.

Легко описать [7] все транзитивные действия конечной группы $\mathbf{G} = \{g_1, \dots, g_M\}$ на конечных множествах $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Любое такое множество находится во взаимно однозначном соответствии с *правыми* (или *левыми*) смежными классами по некоторой подгруппе $H \leq \mathbf{G}$, т. е. $\Omega \cong H \backslash \mathbf{G}$ (или $\Omega \cong \mathbf{G}/H$). Множество Ω называется *однородным пространством* группы \mathbf{G} (*\mathbf{G} -пространством*). Действие \mathbf{G} на Ω является *точным*, если подгруппа H не содержит нормальных подгрупп группы \mathbf{G} . Мы можем написать действие в виде перестановок

$$\pi(g) = \begin{pmatrix} \omega_i \\ \omega_i g \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} Ha \\ Hag \end{pmatrix}, \quad g, a \in \mathbf{G}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Максимальным транзитивным множеством Ω является множество всех элементов самой группы \mathbf{G} , т. е. смежных классов по тривиальной

подгруппе $H = \{1\}$. Соответствующее действие называется *регулярным* и может быть представлено перестановками

$$\Pi(g) = \begin{pmatrix} \mathfrak{g}^i \\ \mathfrak{g}_i g \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (7)$$

Для того чтобы ввести “количественное” (“статистическое”) описание предпишем элементам множества Ω числовые “веса” из какой-нибудь подходящей *числовой системы* \mathcal{N} , содержащей, по крайней мере, нуль и единицу. В этом случае перестановки можно переписать в матричной форме

$$\pi(g) \rightarrow \rho(g) = [\rho(g)_{ij}], \quad \text{где } \rho(g)_{ij} = \delta_{\omega_i g, \omega_j}; \quad i, j = 1, \dots, n; \quad (8)$$

$$\delta_{\alpha, \beta} \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad \text{для } \alpha, \beta \in \Omega.$$

Функция ρ , определённая формулой (8), называется *перестановочным представлением*.

Цикловым типом перестановки называется массив кратностей длин циклов в разложении перестановки на непересекающиеся циклы. Этот массив обычно записывается в виде $1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$, где k_i – число циклов длины i в перестановке; $0 \leq k_i \leq n$; $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Исходя из циклового типа перестановки $\pi(g)$ нетрудно выписать характеристический многочлен перестановочной матрицы (8):

$$\chi_{\rho(g)}(\lambda) = \det(\rho(g) - \lambda I) = (\lambda - 1)^{k_1} (\lambda^2 - 1)^{k_2} \dots (\lambda^n - 1)^{k_n}. \quad (9)$$

Матричная форма *регулярного действия* (7)

$$\Pi(g) \rightarrow P(g) = [P(g)_{ij}], \quad P(g)_{ij} = \delta_{e_i g, e_j}, \quad i, j = 1, \dots, M \quad (10)$$

называется *регулярным представлением* – это частный случай перестановочного представления (8).

Для свободы алгебраических манипуляций обычно предполагается, что \mathcal{N} – алгебраически замкнутое поле, например, поле комплексных чисел \mathbb{C} . Если \mathcal{N} – поле, то множество Ω можно рассматривать как базис линейного векторного пространства $\mathcal{H} = \text{Span}(\omega_1, \dots, \omega_n)$.

4.1.2. Системы чисел

Из (9) видно, что все *собственные значения* перестановочных матриц являются корнями из единицы. Этот факт – в сочетании с тем,

что все неприводимые представления конечных групп являются подпредставлениями регулярного представления (10) – означает, что все числа, достаточные для наших целей можно построить из множества натуральных чисел $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ и примитивного корня из единицы r некоторой степени n . Термин *примитивный* означает, что $r^n = 1$ и период r равен в точности n . В роли n всегда можно использовать *экспоненту* группы – наименьшее общее кратное порядков элементов группы. Но часто бывает достаточно некоторого собственного делителя экспоненты. Любой корень из единицы имеет вид r^k , $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Для наглядности можно считать символически, что $r = e^{2\pi i/n}$, но такое представление нам нигде не понадобится. Достаточно только следующих *алгебраических* определений

1. $r^k \times r^m = r^{k+m \bmod n}$ – *правило умножения*,
2. $\overline{r^k} = r^{n-k}$ – *комплексное сопряжение*.

Таким образом, в качестве *системы чисел*, мы будем использовать полиномы от r с *натуральными* коэффициентами: $\mathcal{N} = \mathbb{N}[r]$.

Если $n = 1$, то \mathcal{N} представляет собой *полукольцо натуральных чисел* \mathbb{N} . Эта система чисел соответствует случаю *тривиальной* группы G .

При $n \geq 2$ можно ввести *отрицательные числа* с помощью определения

$$(-1) = \sum_{k=1}^{p-1} r^{\frac{n}{p}k},$$

где p – любой (например, *минимальный простой*) делитель числа n . В частности, при $n = 2$ возникает *кольцо целых чисел*. $\mathcal{N} = \mathbb{Z}$. Эта система чисел соответствует группе $G = C_2$ (или $G = C_2 \times \dots \times C_2$).

При $n \geq 3$ множество $\mathcal{N} = \mathbb{N}[r]$ представляет собой *коммутативное кольцо*, которое можно погрузить в поле комплексных чисел \mathbb{C} . Кольца $\mathbb{N}[r]$ достаточно для проведения всех вычислений с конечными квантовыми моделями. Для упрощения изложения, чтобы можно было свободно говорить о линейных пространствах, мы будем использовать также поле частных⁴ этого кольца. Иногда, как промежуточные технические символы, могут возникать квадратные корни из натуральных чисел (которые, в принципе, также можно выразить через

⁴С вычислительной точки зрения работа с кольцами, хотя и слегка усложняет алгоритмы, более эффективна, чем вычисления над соответствующими полями частных. Современные системы компьютерной алгебры, как правило, используют вычисления над кольцами в алгоритмах линейной алгебры.

корни из единицы, но в этом нет реальной необходимости). В окончательных выражениях, имеющих статус “наблюдаемых”, ни корни из единиц, ни другие иррациональности не появляются.

4.1.3 Унитарные представления

Унитарные операторы играют ключевую роль в квантовой механике. Любое линейное представление конечной группы эквивалентно унитарному, поскольку всегда можно сконструировать инвариантное скалярное произведение из произвольного “усреднением по группе”. Например, инвариантное произведение (3) построено усреднением стандартного (2).

Изложим кратко основные сведения о неприводимых представлениях конечных групп [7], иллюстрируя их с помощью наименьшей некоммутативной группы – группы перестановок трёх элементов $\text{Sym}(3)$. Эта группа изоморфна также группе симметрий треугольника, т.е. диэдральной группе $D_6 \cong \text{Sym}(3)$. Группа состоит из шести элементов, имеющих следующее представление в виде перестановок

$$g_1 = (), g_2 = (2, 3), g_3 = (1, 3), g_4 = (1, 2), g_5 = (1, 2, 3), g_6 = (1, 3, 2). \tag{11}$$

Аналогом замены системы координат в физике в теории групп является сопряжение: $a^{-1}ga \rightarrow g', g, g' \in G, a \in \text{Aut}(G)$. Сопряжения элементами самой группы, т.е. когда $a \in G$, называются *внутренними автоморфизмами*. Классы эквивалентности элементов группы относительно внутренних автоморфизмов называются *классами сопряжённых элементов* (или, короче, *классами сопряжённости*). Разложение группы на классы сопряжённости, символически записываемое в виде

$$G = K_1 + K_2 + \dots + K_m,$$

играет центральную роль в изучении её представлений.

Пример. Группа $\text{Sym}(3)$ распадается на три класса сопряжённости:

$$K_1 = \{()\}, K_2 = \{(2, 3), (1, 3), (1, 2)\}, K_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}. \tag{12}$$

Умножение в группе позволяет ввести операцию умножения для классов: *произведением классов* K_i и K_j называется разложенное на классы *мультимножество* всех возможных произведений $ab, a \in K_i, b \in K_j$. Очевидно, что так определённое произведение коммутативно,

поскольку ab и ba входят в один и тот же класс: $ab \sim a^{-1}(ab)a = ba$. Таким образом, таблица умножения классов имеет вид

$$K_i K_j = K_j K_i = \sum_{k=1}^m c_{ijk} K_k. \quad (13)$$

Натуральные целые числа c_{ijk} – кратности классов в соответствующих мультимножествах – называются *коэффициентами (алгебры) классов*.

Пример. Группа $\text{Sym}(3)$ имеет следующую таблицу умножения классов

$$K_1 K_j = K_j, \quad K_2^2 = 3K_1 + 3K_3, \quad K_2 K_3 = 2K_2, \quad K_3^2 = 2K_1 + K_3.$$

Краткий список основных свойств линейных представлений конечных групп:

1. Каждое линейное представление унитарно (эквивалентно унитарному).
2. Любое неприводимое представление содержится в регулярном. Более конкретно, существует (унитарная) матрица T одновременно приводящая все матрицы (10) к виду

$$T^{-1} P(g) T = \begin{bmatrix} D_1(g) & & & & \\ & d_1 \left\{ \begin{array}{c} D_1(g) \\ \vdots \\ D_1(g) \end{array} \right. & & & \\ & & d_2 \left\{ \begin{array}{c} D_2(g) \\ \vdots \\ D_2(g) \end{array} \right. & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & d_m \left\{ \begin{array}{c} D_m(g) \\ \vdots \\ D_m(g) \end{array} \right. \end{bmatrix} \quad (14)$$

и любое неприводимое представление является одним из элементов множества $\{D_1, \dots, D_m\}$. Число неэквивалентных неприводимых представлений m равно числу классов сопряженности K_j группы G . Число d_j это одновременно размерность неприводимого представления D_j и кратность его вхождения в регулярное представление. Из (14) видно, что для размерностей d_j выполняется соотношение: $d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_m^2 = |G| = M$. Можно показать также, что размерности делят порядок группы: $d_j | M$.

3. Каждое неприводимое представление D_j однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется своим *характером* χ_j , т. е. функцией на группе, определяемой как след матрицы представления:

$\chi_j(g) = \text{Tr } D_j(g)$. Фактически характер является функцией на классах сопряжённости поскольку $\chi_j(g) = \chi_j(a^{-1}ga)$. Функции на классах называются *центральными*. Любая центральная функция является линейной комбинацией характеров. Значение характера χ_j на классе $K_1 = \{1\}$ равно размерности представления d_j .

4. Компактной формой регистрации всех неприводимых представлений является *таблица характеров*. Столбцы этой таблицы пронумерованы классами сопряжённых элементов, а строки содержат значения характеров неэквивалентных представлений:

	K_1	K_2	...	K_m
χ_1	1	1	...	1
χ_2	$\chi_2(K_1) = d_2$	$\chi_2(K_2)$...	$\chi_2(K_m)$
\vdots	\vdots	\vdots		\vdots
χ_m	$\chi_m(K_1) = d_m$	$\chi_m(K_2)$...	$\chi_m(K_m)$

В соответствии со стандартным соглашением, первый столбец относится к классу единичного элемента группы, а первая строка содержит одномерное *тривиальное* представление.

4.2. Погружение квантовой системы в классическую

В самой общей формулировке квантовая механика предполагает, что каждой физической системе соответствует гильбертово пространство \mathcal{H} ненулевые векторы которого, $\psi \in \mathcal{H}$, представляют все возможные состояния системы. Предполагается, что векторы ψ и ψ' описывают одно и то же состояние, если $\psi' = \lambda\psi$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Эволюция системы из состояния ψ_0 в состояние ψ_T описывается *унитарным* оператором $U : |\psi_T\rangle = U|\psi_0\rangle$. Унитарность означает, что U является элементом группы автоморфизмов пространства $\mathcal{H} : U \in \text{Aut}(\mathcal{H})$. Можно считать, что $\text{Aut}(\mathcal{H})$ является точным унитарным представлением соответствующей абстрактной группы G . В непрерывном времени динамику можно выразить в терминах локального *оператора энергии (гамильтониана)* H с помощью уравнения Шрёдингера

$$i \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle.$$

Если *эрмитов* оператор H не зависит от времени, то он связан с оператором эволюции простым соотношением $U = e^{-iHT}$.

Конечная квантовая система строится точно по такой же схеме. Только теперь группа G – конечная группа порядка M . Все возможные

операторы эволюции образуют конечное множество $\{U_1, \dots, U_M\}$ матриц унитарного представления U в K -мерном гильбертовом пространстве \mathcal{H}_K . Поскольку матрицы U_j невырожденные, всегда можно ввести гамильтонианы по формуле $H_j = i \ln U_j$, но в этом нет никакой необходимости. Заметим, что гамильтонианы практически не используются во многих приложениях квантовой механики, например, в *квантовых вычислениях* и в физических теориях, основанных на *матрице рассеяния (S-матрице)*.

Конечные группы, если они “достаточно некоммутативны”, зачастую порождаются небольшим числом элементов. Например, все простые и все симметрические группы порождаются двумя элементами. Алгоритм построения всей группы, исходя из n_g порождающих элементов, весьма прост и сводится к $n_g(M - n_g - 1)$ групповым умножениям. Таким образом, квантовая динамика конечных систем достаточно удобна для исследования методами компьютерной алгебры.

Из разложения (14) видно, что мы *всегда* можем расширить K -мерное представление U до N -мерного представления \tilde{U} в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_N , эквивалентного представлению, соответствующему перестановкам *некоторого* N -элементного множества состояний $S = \{s_1, \dots, s_N\}$. Ясно, что $N \geq K$.

Ситуация, когда N строго больше чем K наиболее интересна. Ясно, что дополнительные “*скрытые параметры*” – появляющиеся в этом случае из-за увеличения числа состояний (размерности пространства) – никоим образом не могут повлиять на данные, относящиеся к пространству \mathcal{H}_K , поскольку как само \mathcal{H}_K , так и его дополнение в \mathcal{H}_N являются инвариантными подпространствами в расширенном пространстве \mathcal{H}_N . Таким образом, мы можем *любую квантовую задачу* в K -мерном гильбертовом пространстве свести к перестановкам N элементов.

Алгоритмические операции с перестановками намного более эффективны, чем работа с матрицами по правилам линейной алгебры, но, с другой стороны, степени N перестановок могут существенно превосходить размерности K матриц. Впрочем, с идейной точки зрения принципиальная возможность *сведения квантовой эволюции к перестановкам* гораздо важнее алгоритмических вопросов.

Пример. Группа $S_{\text{ym}}(3)$ имеет следующую таблицу характеров

$$\begin{array}{c|ccc}
 & K_1 & K_2 & K_3 \\
 \hline
 \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\
 \chi_2 & 1 & -1 & 1 \\
 \chi_3 & 2 & 0 & -1
 \end{array} \tag{15}$$

Напомним, что элементный состав классов K_j выписан в (12). В качестве представления U , описывающего эволюции квантовой системы, выберем двумерное точное представление, соответствующее характеру χ_3 . Матрицы (операторы эволюции) этого представления в соответствии с порядком, в котором элементы группы перечислены в (11), имеют вид

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U_2 = \begin{bmatrix} 0 & r^2 \\ r & 0 \end{bmatrix}, U_3 = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r^2 & 0 \end{bmatrix}, \\
 U_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, U_5 = \begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}, U_6 = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь r – примитивный корень третьей степени из единицы.⁵

Квантовые и перестановочные матрицы для $\text{Sym}(3)$ Поскольку любое перестановочное представление всегда содержит одномерное

инвариантное подпространство порождаемое вектором $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, есть

только один способ расширить (16) до перестановок трёх элементов – необходимо добавить тривиальное представление, соответствующее

⁵Обратим внимание на характерную особенность представления (16) – его матрицы по структуре очень похожи на матрицы перестановок: в каждом столбце и каждой строке имеется ровно один ненулевой элемент, только вместо *единиц*, как в матрицах перестановок, здесь ненулевые элементы – *корни из единицы*. Эта особенность является следствием того, что группа $\text{Sym}(3)$ относится к так называемым *мономиальным группам* у которых все неприводимые представления можно построить как индуцированные с одномерных представлений некоторых подгрупп (в случае (16) такой подгруппой является $\mathbf{C}_3 \leq \text{Sym}(3)$). Заметим, что, по крайней мере, для невысоких порядков, большинство групп являются именно мономиальными. Так, например, число всех неизоморфных групп порядка, меньшего 384, равно 67424. Из них только 249 групп являются *немономиальными*. Наименьшей немономиальной группой является 24-элементная группа $\mathbf{SL}(2, 3)$ матриц размера 2×2 в характеристике 3 с единичным определителем.

характеру χ_1 из таблицы (15). Таким образом, мы приходим к трёхмерному представлению \tilde{U} матрицы которого имеют вид

$$\tilde{U}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, 6. \quad (17)$$

Эти матрицы представляют собой перестановочные матрицы в базисе, в котором перестановочное представление разложено на инвариантные компоненты. Мы будем называть такой базис *квантовым*. В *перестановочном* базисе эти матрицы имеют вид

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}, \quad P_5 = \begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad P_6 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Наиболее общая унитарная матрица перехода от перестановочного базиса к квантовому – мы определяем её соотношением $\tilde{U}_j = T^{-1} P_j T$ – имеет вид

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} a & b & br^2 \\ a & br^2 & b \\ a & br & br \end{bmatrix},$$

где a и b произвольные элементы множества $\{1, r, r^2\}$. Конкретный выбор этих элементов не играет никакой роли, поскольку в скалярных произведениях, через которые выражаются наблюдаемые величины, они исчезают, входя в произведения сопряжёнными парами. Поэтому окончательно мы выберем следующую форму для матрицы перехода

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & r^2 \\ 1 & r^2 & 1 \\ 1 & r & r \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 \\ r & 1 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Далее мы увидим, что в этой матрице закодирована вся информация о “квантовом поведении” группы перестановок $Sym(3)$ с действием на трёх элементах.

4.2.1. О моделировании квантовых вычислений конечными группами

Реализация квантового алгоритма сводится к построению унитарного оператора, соответствующего алгоритму, из некоторого заданного множества стандартных операторов. Существуют универсальные наборы таких операторов. *Универсальность* здесь означает, что любой унитарный оператор может быть аппроксимирован комбинацией стандартных операторов, т.е. эти операторы являются *образующими элементами* конечно-порождённой группы, всюду плотной в группе всех унитарных операторов, действующих на соответствующем квантовом регистре. Рассмотрим, например, следующее множество операторов:

(а) оператор Адамара $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, (b) “фазовращатель”
 $R(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\theta} \end{bmatrix}$ и (с) “контролируемое отрицание”
 $\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

При некоторых значениях параметра θ эти операторы порождают конечную группу. Например, при $\theta = 1/4$ на двухкубитном регистре порождается группа G размера 36864. Система компьютерной алгебры **GAP** [8] выдаёт структуру этой группы в таком виде:

$$G \cong (((\mathbb{C}_8 \times \mathbb{C}_2) \rtimes \mathbb{C}_3) \rtimes \mathbb{C}_2) \times ((\text{SL}(2, 3) \rtimes \mathbb{C}_4) \rtimes \mathbb{C}_2).$$

В случае значений параметра θ в общем положении операторы (а), (b) и (с) образуют универсальные наборы и, следовательно, порождаемые ими группы бесконечны. Однако эти группы в некотором смысле близки к конечным – они являются финитно аппроксимируемыми.

Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой* [9], если для каждого её элемента $g \neq 1$ существует такой гомоморфизм $\phi : G \rightarrow H$ в конечную группу H , что $\phi(g) \neq 1$. Это означает, что любые соотношения между элементами группы G можно моделировать соотношениями между элементами конечной группы. Согласно теореме А. И. Мальцева: *всякая конечно порождённая группа матриц над полем финитно аппроксимируема.*

Таким образом, любой универсальный набор операторов порождает финитно аппроксимируемую группу. Это даёт возможность

моделировать квантовые вычисления с помощью конечных моделей по аналогии с широко используемым в физике приёмом, когда для решения некоторой задачи бесконечное пространство заменяется тором размер которого достаточен для того, чтобы вместить данные задачи.

4.3. Связь математического описания с наблюдением. Правило Борна. Существуют определённые тонкости при переходе от математического описания систем с симметриями к наблюдаемым “объектам” или “величинам”. Подробное обсуждение этой темы можно найти в статье [10] и в книге [11] (стр. 210 и далее). Вкратце, дело в том, что для регистрации и отождествления элементов системы используются произвольно выбранные метки. Объективный смысл имеют только те соотношения и утверждения, которые не зависят от изменений в выборе меток поскольку эти изменения представляют собой не более чем переименования. В системах с симметриями, “объекты”, составляющие “однородное” множество (более формально, лежащие на одной групповой орбите) имеют различные метки, но они неразличимы в абсолютном смысле. Фиксировать такие объекты можно только относительно некоторой дополнительной системы, проявляющейся как *система координат* или *наблюдатель* или *физический измерительный прибор*. Например, невозможно придать абсолютный объективный смысл точкам пространства, обозначаемым (помеченным) векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , однако отношение между точками, обозначаемое комбинацией $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ уже имеет смысл. В более общих групповых обозначениях эта комбинация может быть записана как $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$. Это пример типичной ситуации, когда наблюдаемые объекты или соотношения являются групповыми инвариантами, зависящими от *пар элементов*. Один из элементов такой пары относится к наблюдаемой системе, а другой – к наблюдателю.

В квантовой механике связь между математическим описанием и экспериментом обеспечивается *правилом Борна* [12], утверждающим, что *вероятность* наблюдения квантовой системы находящейся в состоянии ψ аппаратом, настроенным на состояние ϕ выражается числом

$$P(\phi, \psi) = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|^2}{\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle}. \quad (20)$$

Это выражение можно переписать в виде, включающем пару “систе-

ма-аппарат” более симметрично

$$P(\phi, \psi) = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|^2}{|\langle \phi | \psi \rangle|^2 + \|\phi \wedge \psi\|^2}.$$

Здесь $\phi \wedge \psi$ – внешнее (Грассманово) произведение векторов ϕ и ψ , представляющее собой $K(K - 1)/2$ -мерный вектор с компонентами в унитарном базисе $(\phi \wedge \psi)^{ij} = \phi^i \psi^j - \phi^j \psi^i$ и квадратом нормы

$$\|\phi \wedge \psi\|^2 = \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i}^K |\phi^i \psi^j - \phi^j \psi^i|^2.$$

Обычно в квантовой механике предполагают, что векторы состояний нормированы, т. е. $\langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$, и записывают правило Борна в виде $P(\phi, \psi) = |\langle \phi | \psi \rangle|^2$, что приводит к упрощению вычислений. Например, легко проверить, что функция $P(\phi, \psi)$ удовлетворяет основному свойству вероятности – сумма вероятностей всех возможных результатов наблюдений состояния ψ равна единице. А именно, для любого ортонормального базиса $\{\alpha_1, \dots, \alpha_K\}$ в гильбертовом пространстве \mathcal{H} мы имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^K \{P(\alpha_i, \psi) = |\langle \alpha_i | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \alpha_i \rangle \langle \alpha_i | \psi \rangle\} \\ = \left\langle \psi \left| \underbrace{\sum_{i=1}^K |\alpha_i\rangle \langle \alpha_i|}_I \right| \psi \right\rangle = \langle \psi | \psi \rangle \equiv 1. \end{aligned}$$

Однако мы, стремясь по возможности придерживаться наиболее простых числовых систем, не будем использовать нормирование векторов.

Существуют многочисленные философские спекуляции относительно понятия вероятности и её интерпретации, однако на практике в основном используется *частотная интерпретация*: вероятность – это отношение числа благоприятных случаев к полному числу случаев. Для конечных множеств никаких сложностей не возникает вообще – вероятность это рациональное число, являющееся отношением числа выделенных элементов множества к полному числу элементов.

Можно показать, что если данные о состояниях системы и аппарата представлены *натуральными числами* в перестановочном базисе, то формула (20) даёт *рациональные числа* и в инвариантных подпространствах перестановочного представления, несмотря на то, что промежуточные вычисления могут содержать циклотомические числа и иррациональности.

Рассмотрим перестановочное действие группы $G = \{g_1, \dots, g_M\}$ на множестве состояний $S = \{s_1, \dots, s_N\}$. Будем описывать состояния системы и аппарата в перестановочном представлении соответственно векторами

$$|n\rangle = \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad |m\rangle = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Естественно предполагать, что n_i и m_i – натуральные числа, интерпретируя их как “кратности вхождения” элемента s_i в состояния системы и аппарата, соответственно. Разумеется, ввиду симметрий сами эти числа не наблюдаемы. Наблюдаемыми являются только их инвариантные комбинации. Поскольку стандартное скалярное произведение (2) является инвариантным для перестановочного представления, мы, в соответствии с правилом Борна, имеем

$$P(m, n) = \frac{\left(\sum_i m_i n_i\right)^2}{\sum_i m_i^2 \sum_i n_i^2}. \quad (22)$$

Ясно, что для ненулевых векторов n и m с натуральными компонентами выражение (22) представляет собой рациональное число большее нуля, т. е. наблюдать, к примеру, деструктивную квантовую интерференцию в такой постановке задачи невозможно в принципе.

Однако деструктивную интерференцию векторов с натуральными компонентами можно наблюдать в собственных инвариантных подпространствах перестановочного представления. Если же вероятности, наблюдаемые в инвариантных подпространствах, ненулевые, то они представляют собой рациональные числа. Проиллюстрируем это примером.

Иллюстрация: Группа $\text{Sym}(3)$, действующая на трёх элементах. Векторы состояний в перестановочном базисе имеют вид $|n\rangle =$

$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ и $|m\rangle = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$. С помощью унитарной матрицы преобразования (19) можно перевести вектор состояния системы n из перестановочного базиса в квантовый

$$|\tilde{\psi}\rangle = T^{-1}|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & r^2 \\ r & 1 & r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} n_1 + n_2 + n_3 \\ n_1 + n_2r + n_3r^2 \\ n_1r + n_2 + n_3r^2 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом преобразуется вектор аппарата m

$$|\tilde{\phi}\rangle = T^{-1}|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ m_1 + m_2r + m_3r^2 \\ m_1r + m_2 + m_3r^2 \end{bmatrix}.$$

Проекции этих векторов в двумерное представление (16) имеют вид

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} n_1 + n_2r + n_3r^2 \\ n_1r + n_2 + n_3r^2 \end{bmatrix}, \quad |\phi\rangle = \begin{bmatrix} m_1 + m_2r + m_3r^2 \\ m_1r + m_2 + m_3r^2 \end{bmatrix}.$$

Мы отбросили здесь коэффициент $1/\sqrt{3}$ поскольку борновская вероятность – проективный инвариант. Заметим, что векторы ψ и ϕ исчезают тогда и только тогда, когда

$$n_1 = n_2 = n_3 \quad \text{и} \quad m_1 = m_2 = m_3, \quad (23)$$

поскольку примитивный корень единицы r в данном случае удовлетворяет соотношению $1 + r + r^2 = 0$. Условия (23) определяют собственный вектор одномерного тривиального подпредставления, ортогонального рассматриваемому двумерному.

Для двумерной подсистемы, выражения, входящие в формулу (20) борновской вероятности, имеют вид

$$\langle\psi|\psi\rangle = 3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) - (n_1 + n_2 + n_3)^2, \quad (24)$$

$$\langle\phi|\phi\rangle = 3(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) - (m_1 + m_2 + m_3)^2, \quad (25)$$

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = (3(m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3) - (m_1 + m_2 + m_3)(n_1 + n_2 + n_3))^2. \quad (26)$$

Заметим, что

1. Выражения (24)–(26) состоят из *инвариантов перестановочного представления*. Это подчёркивает фундаментальную роль перестановок в квантовом описании.
2. Выражения (24) и (25) всегда положительные целые числа. (Если только не выполняются условия (23), при которых эти выражения обращаются в нуль.)
3. Условия *деструктивной квантовой интерференции*, т.е. обращение в нуль борновской вероятности (20), определяются уравнением

$$3(m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3) - (m_1 + m_2 + m_3)(n_1 + n_2 + n_3) = 0.$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений в натуральных числах. Пример такого решения:

$$|n\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, |m\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, мы, простым переходом к инвариантному подпространству, получили существенные черты квантового поведения из “перестановочной динамики” и “натуральной” интерпретации (21) квантовой амплитуды.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ квантового поведения с помощью конечных моделей приводит к выводу, что квантовая механика не столько физическая теория, сколько в достаточной степени априорная математическая схема в основе которой лежит неразличимость объектов – своего рода “*исчисление неразличимых*” (по аналогии с термином непрерывной математики “*исчисление бесконечно малых*”). В основе квантового поведения лежит фундаментальная невозможность проследить тождественность однородных объектов в процессе их эволюции.

Г. Вейль по этому поводу писал [10] следующим образом: “*В настоящее время мы говорим только о том, сколько элементов $n_i(t)$ находится в состоянии $C_i(t)$ в любой момент t , поскольку мы не можем проследить тождественность n индивидов во времени. Мы не знаем про элемент, находящийся в данный момент, например, в состоянии C_5 был ли он в предыдущий момент в состоянии C_2 или C_6 .*”

Поэтому объективными могут быть только (“статистические”) утверждения о числах некоторых инвариантных комбинаций элементов. Эти утверждения должны выражаться в терминах групповых

инвариантов и натуральных чисел (необязательно взаимно независимых), характеризующих группы симметрий, таких как размеры орбит, размеры классов сопряжённых элементов, коэффициенты алгебры классов, размерности неприводимых представлений, и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Poincaré, *La valeur de la Science*. Paris: Flammarion (1904). русс. перевод в книге Пуанкаре А. *О науке*. Пер. с фр./Под ред. Л.С. Понтрягина. М.: Наука, 1990. – 736 с.
2. H. Poincaré, *Les conceptions nouvelles de la matière*. Foi at vie, **15** (1912), 185–191. русс. перевод в книге Пуанкаре А. *О науке*. М.: Наука, 1990.
3. O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger, *Quantum Interference Experiments with Large Molecules*. Am. J. Phys., **71**, No. 4 (2003), 319–325.
4. V. V. Kornyak, *Quantization in Discrete Dynamical Systems*. J. Math. Sci., **168**, No. 3 (2010), 390–397.
5. V. V. Kornyak, *Structural and Symmetry Analysis of Discrete Dynamical Systems* (2010). <http://arxiv.org/abs/1006.1754>
6. Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*. Мир, М. (1968).
7. М. Холл, *Теория групп*. ИЛ, М. (1962).
8. <http://www.gap-system.org>.
9. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп*. Наука, М. (1974).
10. H. Weyl, *Ars Combinatoria*. Appendix B; in *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press (1949). русс. пер. в сборнике *Прикладная комбинаторная математика*. Мир, М. (1968).
11. И. Р. Шафаревич, *Основные понятия алгебры*. Ижевск, РХД (2001).
12. N. P. Landsman, *Born Rule and its Interpretation*. pp.64–70 in *Compendium of Quantum Physics*, Greenberger D., Hentschel K., Weinert F. (Eds.), Springer (2009).

Kornyak V. V. Finite quantum models: constructive approach to description of quantum behavior.

Universality of quantum mechanics — its applicability to physical systems of quite different nature and scales — indicates that quantum behavior can be a manifestation of general mathematical properties of systems containing indistinguishable, i.e. lying on the same orbit of some symmetry group, elements. In this paper we demonstrate, that quantum behavior arises naturally in systems with finite number of elements connected by nontrivial symmetry groups. The “finite” approach allows to see the peculiarities of quantum description more distinctly without need for concepts like “wave function collapse”, “Everett’s multiverses” etc. In

particular, under the finiteness assumption any quantum dynamics is reduced to the simple permutation dynamics. The advantage of the finite quantum models is that they can be studied constructively by means of computer algebra and computational group theory methods.

Лаборатория информационных технологий
Объединенный институт ядерных исследований
141980 Дубна Московской обл.
E-mail: kornyak@jinr.ru

Поступило 30 ноября 2010 г.