Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 386, 2011 г.

В. В. Севостьянова

ИНВАРИАНТЫ ПРИСОЕДИНЁННОГО ДЕЙСТВИЯ НА НИЛЬРАДИКАЛЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ ДЛЯ B_n, C_n, D_n

Пусть K – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Для каждого фиксированного целого положительного n обозначим через G одну из следующих классических групп над K: симплектическую группу $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$, четную ортогональную группу $\mathrm{O}_{2n}(K)$ и нечетную ортогональную группу $\mathrm{O}_{2n+1}(K)$. Пусть

$$m = \begin{cases} 2n, & \text{если } \ G = \mathrm{Sp}_{2n}(K) \ \text{ либо } \ \mathrm{O}_{2n}(K); \\ 2n+1, & \text{если } \ G = \mathrm{O}_{2n+1}(K). \end{cases}$$

Обозначим через $\mathrm{U}_m(K)$ унитреугольную группу верхнетреугольных квадратных матриц порядка m с единицами на главной диагонали и через $\mathrm{B}_m(K)$ борелевскую группу верхнетреугольных матриц с ненулевыми элементами на главной диагонали. Положим

$$N = G \cap \mathrm{U}_m(K) \text{ и } B = G \cap \mathrm{B}_m(K).$$

Пусть $P \supset B$ – произвольная параболическая подгруппа в группе G. Обозначим через $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{n}$ подалгебры Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$, соответствующие подгруппам Ли P, B, N. Представим $\mathfrak{p} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{m}$ в виде суммы нильрадикала $\mathfrak{m}$ и блочнодиагональной подалгебры $\mathfrak{r}$ с размерами блоков $(r_1, \ldots, r_s)$. Рассмотрим присоединённое действие на $\mathfrak{m}$ группы P:

$$\mathrm{Ad}_g x = gxg^{-1}, \quad x \in \mathfrak{m}, \quad g \in P.$$

Подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно присоединенного действия группы P, поэтому мы можем продолжить это действие до регулярного представления в алгебре $K[\mathfrak{m}]$ и поле $K(\mathfrak{m})$:

$$\mathrm{Ad}_g f(x) = f(g^{-1}xg), \quad f(x) \in K(\mathfrak{m}), \quad g \in P.$$

Ключевые слова: инвариант, параболическая подалгебра, треугольная группа, присоединённое представление.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 08-01-00151-а.

Поскольку подалгебра $\mathfrak{m}$ инвариантна относительно действия группы P, то она инвариантна и относительно подгруппы Ли N. Вопрос о том, как устроена алгебра инвариантов $K[\mathfrak{m}]^N$, является открытым и кажется довольно сложным (частные случаи см., например, [6]). В настоящей работе строится некоторая система инвариантов

$$\{M_\xi,\ \xi \in S,\ L_\varphi,\ \varphi \in \Phi\}$$

(см. обозначение 11 и (1)). Показывается, что эта система алгебраически независима. Это дает возможность оценить степень трансцендентности поля инвариантов:

$$\operatorname{tr}\deg K(\mathfrak{m})^N \geqslant |S| + |\Phi|.$$

Ранее, в работе [5] было показано, что для серии A_n указанная оценка является точной. Для других серий этот вопрос остается открытым.

Пусть T – максимальный тор в G, состоящий изо всех диагональных матриц, и $\Delta = \Delta(G,T)$ – определенная по T система корней [2]. По определению, Δ является подмножеством абелевой группы $X(T) = \operatorname{Hom}(T,K)$ гомоморфизмов из T в K. Пусть $1 \leqslant i \leqslant n$, обозначим через ε_i элемент в группе $X(T)$, такой, что $\varepsilon_i(t) = t_i$ для любого $t \in T$, где $t_i \in K$ – элемент, стоящий в матрице t на (i,i)-м месте. Тогда $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ и

$$\Delta^+ = \begin{cases} \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{2\varepsilon_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}, & \text{если } G = \mathrm{Sp}_{2n}(K); \\ \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}, & \text{если } G = \mathrm{O}_{2n}(K); \\ \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j : 1 \leqslant i < j \leqslant n\} \cup \{\varepsilon_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}, & \text{если } G = \mathrm{O}_{2n+1}(K). \end{cases}$$

Корни из системы Δ^+ (соотв. Δ^-) назовем *положительными* (соотв. *отрицательными*) корнями. Система положительных корней $\Delta^+_{\mathfrak{r}}$, соответствующая редуктивной подалгебре $\mathfrak{r}$, является подсистемой в Δ^+.

Рассмотрим зеркальный порядок $\prec$ на множестве $\{0, \pm 1, \ldots, \pm n\}$, определяемый следующим образом

$$1 \prec 2 \prec \ldots \prec n \prec 0 \prec -n \prec \ldots \prec -2 \prec -1.$$

В дальнейшем будем всегда нумеровать строки (слева направо) и столбцы (сверху вниз) произвольной квадратной матрицы порядка m в соответствии с этим порядком.

Каждому корню γ из положительной системы корней Δ^+ поставим в соответствие следующую пару целых чисел:

$$\mathcal{E}(\gamma) = \begin{cases} (-j,-i), & \text{если } \ \gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ (j,-i), & \text{если } \ \gamma = \varepsilon_i + \varepsilon_j, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n; \\ (i,-i), & \text{если } \ G = \mathrm{Sp}_{2n}(K) \ \text{ и } \ \gamma = 2\varepsilon_i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant n; \\ (0,-i), & \text{если } \ G = \mathrm{O}_{2n+1}(K) \ \text{ и } \ \gamma = \varepsilon_i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Определим отношение в Δ^+, для которого

$$\gamma' \succ \gamma, \text{ если } \gamma' - \gamma \in \Delta^+.$$

Если $\gamma' \succ \gamma$ или $\gamma' \prec \gamma$, то будем называть корни γ и γ' *сравнимыми*.

Обозначим через M множество корней $\gamma \in \Delta^+$, для которых соответствующие им корневые подалгебры $\mathfrak{g}_\gamma$ содержатся в $\mathfrak{m}$. Отождествим алгебру $K[\mathfrak{m}]$ с алгеброй многочленов от переменных $x_{i,j}$, $i \prec j$, где $(-j,-i) = \mathcal{E}(\gamma)$ и корень γ содержится в M.

Определение 1. *Подмножество S в M будем называть базой, если элементы S попарно не сравнимы и для любого $\gamma \in M \setminus S$ существует $\xi \in S$, такой, что $\gamma \succ \xi$.*

Определение 2. *Пусть A – подмножество в S. Будем говорить, что γ – минимальный элемент в A, если не существует $\xi \in A$, такого, что $\gamma \succ \xi$.*

Покажем, что для M существует единственная база S. Строится она следующим образом. Образуем множество S_1 минимальных элементов в M. По определению, $S_1 \subset S$. Образуем множество M_1, которое получается из M удалением S_1 и всех

$$\{\gamma \in M : \ \exists\, \xi \in S_1, \ \gamma \succ \xi\}.$$

Подмножество минимальных элементов S_2 в M_1 также содержится в S и т. д. Продолжая процесс дальше, за конечное число шагов мы получаем базу S как объединение множеств $S_1, S_2, \ldots$

Лемма 3. *Пусть корень $\gamma \in M \backslash S$.*

(1) *Предположим, что $\gamma = \varepsilon_i + \varepsilon_j$, $i < j$, тогда существует корень $\xi \in S$ такой, что $\mathcal{E}(\xi)$ равно одному из следующих значений:* $(j,-k)$, *где $-i \succ -k$, $(k,-i)$, где $j \prec k$, или $(k,-j)$ для некоторого k.*

(2) *Если* $\gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i < j$, *или* $\gamma = \varepsilon_i$, *тогда существует корень* $\xi \in S$ *такой, что* $\mathcal{E}(\xi)$ *равно* $(-j, k)$, *где* $-i \succ k$, *или* $(k, -i)$, *где* $-j \prec k$.

(3) *Пусть* $\gamma = 2\varepsilon_i$, *тогда найдется* $\xi \in S$ *такой, что* $\mathcal{E}(\xi) = (k, -i)$, *где* $k \succ i$.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения (1) леммы, доказательства (2) и (3) проводятся аналогично.

Пусть $\gamma = \varepsilon_i + \varepsilon_j \in M \backslash S$, $i < j$. По определению базы существует корень $\xi \in S$, такой, что $\gamma - \xi \in \Delta^+$. Выпишем все подходящие корни ξ:

1. $\xi = \varepsilon_k + \varepsilon_j$, где $i < k$, тогда если $k < j$, то $\mathcal{E}(\xi) = (j, -k)$, если $j < k$, то $\mathcal{E}(\xi) = (k, -j)$;
2. $\xi = \varepsilon_i + \varepsilon_k$, где $k > j$, тогда $\mathcal{E}(\xi) = (k, -i)$;
3. $\xi = \varepsilon_i - \varepsilon_k$, где $i < k$, тогда $\mathcal{E}(\xi) = (-k, -i)$;
4. $\xi = \varepsilon_j - \varepsilon_k$, где $j < k$, тогда $\mathcal{E}(\xi) = (-k, -j)$;
5. $\xi = \varepsilon_i$, тогда $\mathcal{E}(\xi) = (0, -i)$, если $G = \mathrm{O}_{2n+1}(K)$;
6. $\xi = \varepsilon_j$, тогда $\mathcal{E}(\xi) = (0, -j)$, если $G = \mathrm{O}_{2n+1}(K)$;
7. $\xi = 2\varepsilon_i$, тогда $\mathcal{E}(\xi) = (i, -i)$, если $G = \mathrm{Sp}_{2n}(K)$;
8. $\xi = 2\varepsilon_j$, тогда $\mathcal{E}(\xi) = (j, -j)$, если $G = \mathrm{Sp}_{2n}(K)$,

откуда получаем утверждение леммы. □

Следствие. *Пусть* $G = \mathrm{Sp}_{2n}(K)$, $i > 0$, *и пусть существует корень* $\gamma \in M$, *такой, что* $\mathcal{E}(\gamma) = (j, -i)$ *для некоторого* j. *Тогда существует корень* $\xi \in S$ *такой, что* $\mathcal{E}(\xi) = (k, -i)$ *при некотором* k.

Доказательство. Предположим, что для номера i не существует корня $\xi \in S$, такого, что $\mathcal{E}(\gamma) = (j, -i)$. Рассмотрим корень $2\varepsilon_i \in M$. Из леммы получаем, что существует $\xi \in S$, такой, что $\mathcal{E}(\xi) = (k, -i)$ при некотором k, что противоречит предположению. □

Определение 4. *Упорядоченный набор положительных корней* $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ *будем называть цепочкой, если* $\mathcal{E}(\gamma_1) = (a_1, a_2)$, $\mathcal{E}(\gamma_2) = (a_2, a_3)$, $\mathcal{E}(\gamma_3) = (a_3, a_4)$ *и т.д.*

Пусть $(r_1, \dots, r_{p-1}, r_p, r_{p-1}, \dots, r_1)$ – размеры диагональных блоков в редуктивной подалгебре $\mathfrak{r}$. Обозначим $R = \sum_{t=1}^{p-1} r_t$. Будем называть корень $\gamma \in S$, такой, что $\mathcal{E}(\gamma) = (a, -b)$, $b > 0$, *корнем, лежащим правее центрального блока в подалгебре* $\mathfrak{r}$, если $R \prec a \prec -R$.

Пусть k – наибольший номер, такой, что корень $\gamma = \varepsilon_k + \varepsilon_{k+1}$ принадлежит системе корней M. Обозначим

$$\Gamma_{\mathfrak{r}} = \begin{cases} \Delta_{\mathfrak{r}}^{+} \cup \{2\varepsilon_i : k < i \leqslant n\}, & \text{если } G = \mathrm{O}_m(K), \mathrm{O}_{2n}(K); \\ \Delta_{\mathfrak{r}}^{+} \backslash \{2\varepsilon_i : k < i \leqslant n\}, & \text{если } G = \mathrm{Sp}_m(K). \end{cases}$$

Определение 5. *Пусть один из корней $\xi, \xi' \in S$ не лежит правее центрального блока в $\mathfrak{r}$. Будем говорить, что корни ξ, ξ' образуют допустимую пару $q = (\xi, \xi')$, если существует корень α_q, принадлежащий множеству $\Delta_{\mathfrak{r}}^{+}$, такой, что набор корней $\{\xi, \alpha_q, \xi'\}$ является цепочкой.*

Пусть оба корня $\xi, \xi' \in S$ лежат правее центрального блока в $\mathfrak{r}$ и $\mathcal{E}(\xi) = (a, -b)$, $\mathcal{E}(\xi') = (a', -b')$. Пару $q = (\xi, \xi')$ также назовем допустимой, если существует корень $\alpha_q \in \Gamma_{\mathfrak{r}}$, такой, что $\mathcal{E}(\alpha_q) = (-a, a')$.

Заметим, что корень α_q находится по q однозначно.

Образуем множество $Q = Q(\mathfrak{p})$, состоящее из допустимых пар корней из S. Пусть корни ξ и ξ' образуют допустимую пару. Предположим, что для корней ξ и ξ', таких, что $\mathcal{E}(\xi) = (a, -b)$ и $\mathcal{E}(\xi') = (a', -b')$, выполняется условие $a \preccurlyeq a'$. По каждой допустимой паре $q = (\xi, \xi')$ построим положительный корень $\varphi_q = \alpha_q + \xi'$. Рассмотрим подмножество $\Phi = \{\varphi_q : \ q \in Q\}$.

Определение 6. *Назовем множество корней $S \cup \Phi$ расширенной базой.*

Пример 7. Для параболической подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_{16}(K)$ с размерами диагональных блоков $(3, 1, 2, 4, 2, 1, 3)$ в редуктивной подалгебре $\mathfrak{r}$ выпишем корни, образующие системы S и Φ:

$$S = \big\{\xi_1 = \varepsilon_6 - \varepsilon_7,\ \xi_2 = \varepsilon_5 - \varepsilon_8,\ \xi_3 = \varepsilon_4 - \varepsilon_5,$$
$$\xi_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4,\ \xi_5 = \varepsilon_2 - \varepsilon_6,\ \xi_6 = \varepsilon_1 + \varepsilon_8\big\}.$$

Множество допустимых пар и соответствующие им корни из системы Φ следующие:

$$Q = \{(\xi_1, \xi_1), (\xi_1, \xi_2), (\xi_1, \xi_6), (\xi_2, \xi_2), (\xi_1, \xi_3)\},$$

$$\Phi = \big\{\varphi_{(\xi_1,\xi_1)} = \varepsilon_6 + \varepsilon_7,\ \varphi_{(\xi_1,\xi_2)} = \varepsilon_6 + \varepsilon_8,\ \varphi_{(\xi_1,\xi_6)} = \varepsilon_6 - \varepsilon_8,$$
$$\varphi_{(\xi_2 1,\xi_2)} = \varepsilon_5 + \varepsilon_8,\ \varphi_{(\xi_1,\xi_3)} = \varepsilon_4 - \varepsilon_6\big\}.$$

Мы будем строить по данной параболической подалгебре диаграмму, представляющую собой часть квадратной матрицы порядка m, на которой будем отмечать корни из S и Φ. Предположим, что положительный корень γ соответствует паре целых чисел $\mathcal{E}(\gamma) = (j, -i)$, $i > 0$. В этом случае корень γ мы будем отмечать в $(j, -i)$-м месте диаграммы. Корень из множества S соответствует символу $\otimes$, а корень из Φ – символу $+$. Остальные места в диаграмме не заполняются.

Пример 8. Пусть $G = \mathrm{O}_{16}(K)$. Ниже приведена диаграмма для параболической подалгебры, в случае когда размеры её диагональных блоков в редуктивной подалгебре $\mathfrak{r}$ те же, что и в примере 7.

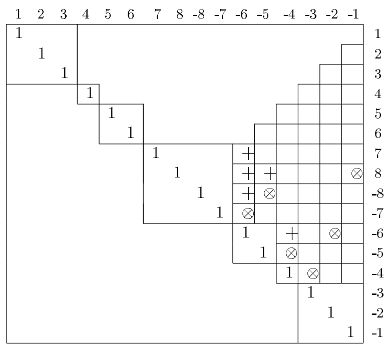

Диаграмма 1.

Пример 9. Пусть $G = \mathrm{Sp}_{16}(K)$. Диаграмма 2, соответствует параболической подалгебре, редуктивная часть которой образована теми же блоками, что и в примере 8.

Пример 10. Пусть $G = \mathrm{O}_{17}(K)$. Диаграмма 3 построена для параболической подалгебры с размерами её диагональных блоков $(1, 2, 5, 1, 5, 2, 1)$.

Образуем формальную матрицу $\mathbb{X}$ следующим образом. Пусть корень $\gamma \in M$. Пусть $\mathcal{E}(\gamma) = (-j, -i)$, где $i > 0$. Тогда на месте (i, j) матрицы $\mathbb{X}$ стоит переменная $x_{i,j}$, а на месте $(-j, -i)$ находится либо переменная $x_{i,j}$, если $G = \mathrm{Sp}_{2n}(K)$ и $j < 0$, либо $-x_{i,j}$ в остальных случаях. В случае $\mathcal{E}(\gamma) = (i, -i)$, $i > 0$, на месте $(i, -i)$ матрицы $\mathbb{X}$ стоит переменная $x_{i,-i}$. Остальные элементы матрицы равны нулю.

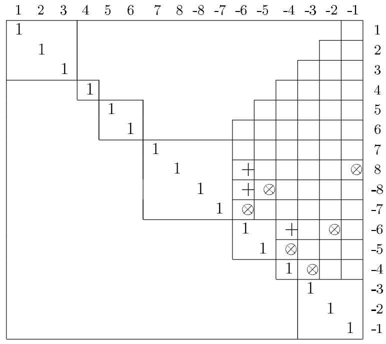

Диаграмма 2.

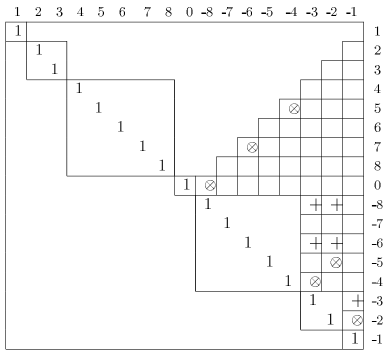

Диаграмма 3.

Предположим, что $\gamma \in M$ и $\mathcal{E}(\gamma) = (a, -b)$, $a \in \mathbb{Z}$, $b > 0$. Обозначим через S_γ множество тех ξ в S, для которых $\mathcal{E}(\xi) = (i, j)$, $i \succ a$ и $j \prec -b$. Пусть $S_\gamma = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, $\mathcal{E}(\xi_i) = (a_i, -b_i)$, где $a_i \in \mathbb{Z}$, $b_i > 0$ для любых $1 \leqslant i \leqslant k$.

Выберем среди значений $b_1, b_2, \dots, b_k$ те числа, которые “больше” числа a в смысле зеркального порядка. Обозначим их $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_s}$.

Обозначение 11. Обозначим через M_γ минор M_I^J матрицы $\mathbb{X}$ с упорядоченными системами строк I и столбцов J, где

$$I = \operatorname{ord}\{b_1, \dots, b_k, b, a_{i_1}, \dots, a_{i_s}\},$$
$$J = \operatorname{ord}\{-a, -a_1, \dots, -a_k, -b_{i_1}, \dots, -b_{i_s}\}.$$

Также обозначим через $\overline{M}_\gamma$ минор $M_{I'}^{J'}$ матрицы $\mathbb{X}$, где

$$I' = \operatorname{ord}\{a, a_1, \dots, a_k, b_{i_1}, \dots, b_{i_s}\},$$
$$J' = \operatorname{ord}\{-b_1, \dots, -b_k, -b, -a_{i_1}, \dots, -a_{i_s}\}.$$

Очевидно, что миноры M_γ и $\overline{M}_\gamma$ симметричны относительно побочной диагонали и $M_\gamma = \pm\overline{M}_\gamma$.

Пример 12. Пусть группа G и её параболическая подгруппа как в примере 10. В качестве корня γ возьмём корень $\varepsilon_6 + \varepsilon_7$, тогда $S_\gamma = \{\varepsilon_8\}$. Вычислим $\mathcal{E}(\varepsilon_6 + \varepsilon_7) = (7, -6)$, $\mathcal{E}(\varepsilon_8) = (0, -8)$. Поскольку $8 \succ 7$, то $I = \{7, 8, 0\}$, $J = \{0, -8, -6\}$, откуда получаем

$$M_\gamma = \begin{vmatrix} x_{7,0} & x_{7,-8} & x_{7,-6} \\ x_{8,0} & 0 & -x_{6,-8} \\ 0 & -x_{8,0} & -x_{6,0} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что для любых номеров $i \neq j$, таких, что $1 \leqslant i, j \leqslant k$, верно утверждение $a_i \neq b_j$. Действительно, если $a_i = b_j$, то, поскольку $a_i > 0$, верно $\xi_i = \varepsilon_{b_i} + \varepsilon_{a_i}$ и $\xi_j = \varepsilon_{b_j} + \varepsilon_{a_j}$, если $a_j > 0$, и $\xi_j = \varepsilon_{b_j} - \varepsilon_{-a_j}$, если $a_j < 0$. Откуда корни ξ_i и ξ_j из базы S являются сравнимыми:

$$\xi_j - \xi_i = \varepsilon_{b_i} + \varepsilon_{a_i} - (\varepsilon_{a_i} \pm \varepsilon_{\pm a_j}) = \varepsilon_{b_i} \mp \varepsilon_{\pm a_j},$$

что противоречит определению базы. Таким образом, в определённом выше миноре M_γ каждое из множеств номеров строк и столбцов I и J не содержит двух одинаковых элементов. Следовательно, миноры M_γ и $\overline{M}_\gamma$ – квадратные.

Пусть множество A содержит некоторые различные числа из множества

$$\{1, 2, \dots, n, 0, -n, \dots, -2, -1\}.$$

Обозначим

$$\min A = \{k \in A : \text{ для любого } a \in A \text{ верно } k \preccurlyeq a\},$$

$$\max A = \{k \in A : \text{ для любого } a \in A \text{ верно } k \succcurlyeq a\}.$$

Лемма 13. *Пусть $\xi \in S$ и минор M_ξ образован наборами строк I и столбцов J. Пусть $\mathcal{E}(\xi) = (a, -b)$, $b > 0$.*

(1) *Предположим, что номер $i \notin I$, такой, что $\min I \prec i \prec \max I$, тогда $i = a$.*

(2) *Для любого номера j, такого, что $\min J \prec j \prec \max J$, выполняется $j \in J$.*

Доказательство. 1. Докажем первое утверждение леммы. Пусть $i \notin I$, тогда из определения минора M_ξ вытекает, что не существует корня $\gamma \in S$, такого, что $\mathcal{E}(\gamma) = (j, -i)$ и $i \preccurlyeq a$. Предположим, что $i \prec a$.

Рассмотрим корни $\gamma_j \in \Delta^+$ такие, что $\mathcal{E}(\gamma_j) = (j, -i)$. Обозначим через A множество номеров j, для которых корни $\gamma_j \in M$. Как было сказано выше, для любого номера $j \in A$ выполняется $\gamma_j \notin S$. Тогда из определения базы следует, что для γ_j существует корень $\xi_j \in S$, такой, что $\gamma_j - \xi_j \in \Delta^+$. Получаем, что любой корень $\alpha \in M$, такой, что $\mathcal{E}(\alpha) = (j, -k)$, где $j \in A$ и $-k \succ -i$, сравним с корнем ξ_j, который содержится в S. То есть любой такой корень α не лежит в S. Далее, так как $\min I = b \prec i$, то $-i \prec -b$. Поскольку для любого номера $j \in J$ выполняется $j \prec \max J = -a$, то $a \prec \min A$. По предположению $i \prec a$, следовательно, $i \prec \min A$. Получаем, что для корня $\alpha \in M$, такого, что $\mathcal{E}(\alpha) = (\min A, -i)$, выполняется $\min A \prec i$, чего быть не может. Мы пришли к противоречию, следовательно $i = a$.

2. Докажем второе утверждение. Итак, пусть число j такое, что $\min J \prec j \prec \max J$. Очевидно, что $\max J = -a$. Рассмотрим корень $\gamma \in M$, такой, что $\mathcal{E}(\gamma) = (-j, -b)$. Тогда

$$\gamma = \begin{cases} \varepsilon_b - \varepsilon_j, & \text{если } \ j > 0; \\ \varepsilon_b + \varepsilon_{-j}, & \text{если } \ j < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\gamma \notin S$, так как в противном случае γ будет сравним с корнем $\xi \in S$, что противоречит определению базы.

Пусть $\gamma = \varepsilon_b - \varepsilon_j$. Из леммы 3 вытекает, что существует корень $\xi' \in S$, такой, что $\mathcal{E}(\xi') = (-j, -i)$ для некоторого $-i \prec -b$. Поскольку $j \prec \max J = -a$, то справедливы $-j \succ a$ и $-i \prec -b$. Последние неравенства означают $\xi' \in S_\xi$, следовательно, $j \in J$.

Если $\gamma = \varepsilon_b + \varepsilon_{-j}$, то аналогично из леммы 3 следует, что существует корень $\xi' \in S$, такой, что $\mathcal{E}(\xi') = (-j, -i)$ для некоторого $-i \prec -b$, либо $\mathcal{E}(\xi') = (i, j)$ для некоторого $i \succ -j$. В первом случае получаем $\xi' \in S_\xi$ и $j \in J$. Во втором случае имеем $i \succ -j \succ a$ и $j \prec -a \prec -b$. Следовательно, $\xi' \in S_\xi$. Далее, так как $-j \succ a$, то по определению минора M_ξ имеем $j \in J$. $\square$

Пусть паре $q = (\xi, \xi') \in Q$ соответствует корень $\varphi \in \Phi$, по каждой допустимой паре построим многочлен

$$L_\varphi = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_\mathfrak{r} \cup \{0\} \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_q}} M_{\xi+\alpha_1} \overline{M}_{\alpha_2+\xi'}. \tag{1}$$

Ниже в теореме 15 мы покажем, что полиномы L_φ являются инвариантами относительно присоединенного действия группы N.

Пример 14. Для примера 7–8 выпишем некоторые многочлены, построенные по корням из систем S и Φ.

$$M_{\varepsilon_6-\varepsilon_7} = x_{6,7}, \quad M_{\varepsilon_5-\varepsilon_8} = \begin{vmatrix} x_{5,7} & x_{5,8} \\ x_{6,7} & x_{6,8} \end{vmatrix}, \ M_{\varepsilon_4-\varepsilon_5} = x_{4,5}, \ M_{\varepsilon_3-\varepsilon_4} = x_{3,4},$$

$$M_{\varepsilon_2-\varepsilon_6} = \begin{vmatrix} x_{2,4} & x_{2,5} & x_{2,6} \\ x_{3,4} & x_{3,5} & x_{3,6} \\ 0 & x_{4,5} & x_{4,6} \end{vmatrix},$$

$$L_{\varepsilon_6+\varepsilon_7} = -x_{6,7}x_{6,-7} - x_{6,8}x_{6,-8},$$

$$L_{\varepsilon_6+\varepsilon_8} = -x_{6,-8} \begin{vmatrix} x_{5,7} & x_{5,8} \\ x_{6,7} & x_{6,8} \end{vmatrix} - x_{6,8} \begin{vmatrix} x_{5,7} & x_{5,-8} \\ x_{6,7} & x_{6,-8} \end{vmatrix} - x_{6,7} \begin{vmatrix} x_{5,7} & x_{5,-7} \\ x_{6,7} & x_{6,-7} \end{vmatrix},$$

$$L_{\varepsilon_5+\varepsilon_8} = 2 \begin{vmatrix} x_{5,7} & x_{5,-8} \\ x_{6,7} & x_{6,-8} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{5,7} & x_{5,8} \\ x_{6,7} & x_{6,8} \end{vmatrix},$$

$$L_{\varepsilon_4-\varepsilon_6} = -x_{4,6}x_{6,7} - x_{4,5}x_{5,7}.$$

Пусть $E_{i,j}$ – стандартная квадратная матрица, имеющая единицу в (i,j)-м месте и нули в остальных местах и E – матричная единица. Каждому корню $\alpha \in \Delta^+$ поставим в соответствие однопараметрическую подгруппу $g_\alpha(t)$ квадратных матриц порядка m, где $t \in K$:

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} E+t(E_{i,j}-E_{-j,-i}), & \text{если } \alpha=\varepsilon_i-\varepsilon_j; \\ E+t(E_{i,-j}+E_{j,-i}), & \text{если } \alpha=\varepsilon_i+\varepsilon_j \text{ и } G=\mathrm{Sp}_{2n}(K); \\ E+t(E_{i,-j}-E_{j,-i}), & \text{если } \alpha=\varepsilon_i+\varepsilon_j \text{ и } G\neq\mathrm{Sp}_{2n}(K); \\ E+tE_{i,-i}, & \text{если } \alpha=2\varepsilon_i \text{ и } G=\mathrm{Sp}_{2n}(K); \\ E+t(E_{i,0}-E_{0,-i})-\frac{t^2}{2}E_{i,-i}, & \text{если } \alpha=\varepsilon_i \text{ и } G=\mathrm{O}_{2n+1}(K). \end{cases} \tag{2}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 15. *Для произвольной параболической подалгебры система многочленов*
$$\{M_\xi,\ \xi \in S;\ L_\varphi,\ \varphi \in \Phi\}$$
содержится в $K[\mathfrak{m}]^N$ *и алгебраически независима над* K.

Доказательство. Справедливо следующее утверждение: для любого элемента $g \in N$ существует набор однозначно определенных $t_\alpha \in K$, таких, что верно
$$g = \prod_{\alpha \in \Delta^+} g_\alpha(t_\alpha).$$
Поэтому достаточно показать, что многочлены M_ξ, где $\xi \in S$, и L_φ, где $\varphi \in \Phi$, инвариантны относительно присоединенного действия однопараметрических подгрупп $g_\alpha(t)$ для любых $\alpha \in \Delta^+$, $t \in K$. Заметим, что присоединенное действие элемента $E + tE_{i,j} \in \mathrm{U}_m(K)$, $i < j$, сводится к композиции двух преобразований: к строке i прибавляется строка j, умноженная на $-t$, и к столбцу j прибавляется столбец i, умноженный на t.

Покажем, что минор M_ξ, $\xi \in S$, инвариантен относительно присоединенного действия $g_\alpha(t)$. Пусть $\mathcal{E}(\xi) = (a, -b)$, $b > 0$, и минор M_ξ стоит на пересечении строк с номерами из I и столбцов с номерами из J. Сделаем два замечания, второе из них следует из леммы 13.

1. Элементы матрицы $\mathbb{X}$, находящиеся на местах (i,j), где $\min I \preccurlyeq i \preccurlyeq \max I$ и $1 \preccurlyeq j \prec \min J$, и на местах (l,k), где $\max I \prec l \preccurlyeq n$ и $\min J \preccurlyeq k \preccurlyeq \max J$, равны нулю.

2. Номера столбцов – это все числа не меньшие $\min J$ и не большие $\max J$ в смысле зеркального порядка, а номера строк – все числа не меньшие $\min I$ и не большие $\max I$ кроме, может быть, строки a.

Если для любого номера i, такого, что $\min I \prec i \prec \max I$, выполняется $i \in I$, то инвариантность минора M_ξ следует из сделанных замечаний.

Предположим, что $i \notin I$ и $\min I \prec i \prec \max I$, тогда по лемме 13 $i = a$. Из следствия из леммы 3 имеем, что $G = \mathrm{O}_m(K)$. Пусть $I = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Для доказательства инвариантности минора M_ξ достаточно доказать его инвариантность относительно присоединенного действия $g_\alpha(t)$, где корень $\alpha \in \Delta^+$ следующий: $\mathcal{E}(\alpha) = (-a, -a_t)$ для некоторого t. Тогда
$$\mathrm{Ad}_{g_\alpha} M_\xi = M_\xi \pm t M_{I'}^J,$$

где $I' = \operatorname{ord}\{a_1, \dots, a_{t-1}, a, a_{t+1}, \dots, a_k\}$. Покажем, что минор $M_{I'}^J$ равен нулю. Рассмотрим множества

$$\widetilde{I} = \operatorname{ord}\{l \in I' : \ l \succ a\} \subset I' \quad \text{и} \quad \widetilde{J} = \operatorname{ord}\{l : \ -l \in \widetilde{I}\}.$$

Поскольку $a = -\max J$, получаем $\widetilde{J} \subset J$. Отсюда следует, что минор $M_{I'}^J$ имеет следующий вид

$$M_{I'}^J = \left| \begin{array}{c|c} M_{I'\setminus\widetilde{I}}^{J\setminus\widetilde{J}} & M_{I'\setminus\widetilde{I}}^{\widetilde{J}} \\ \hline 0 & M_{\widetilde{I}}^{\widetilde{J}} \end{array} \right|.$$

Таким образом, $M_{I'}^J = M_{I'\setminus\widetilde{I}}^{J\setminus\widetilde{J}} \cdot M_{\widetilde{I}}^{\widetilde{J}}$. Покажем, что порядок минора $M_{\widetilde{I}}^{\widetilde{J}}$ – нечётное число. Если это так, то минор $M_{\widetilde{I}}^{\widetilde{J}}$ является кососимметрическим нечётного порядка и, следовательно, равным нулю. Итак, пусть корень $\gamma \in S$, $\mathcal{E}(\gamma) = (c, -d)$, такой, что $d \in \widetilde{I}$. Тогда $d \succ a$, следовательно, по определению M_ξ выполняется $c \in I$. Так как $a \prec d \prec c$, то $c \in \widetilde{I}$. Таким образом, каждый корень $\gamma \in S$, $\mathcal{E}(\gamma) = (c, -d)$, такой, что $d \in \widetilde{I}$, добавляет две строки и два столбца к множествам I и J соответственно. Но множеству $\widetilde{I}$ также принадлежит номер a, поэтому минор $M_{\widetilde{I}}^{\widetilde{J}}$ – кососимметрический нечетного порядка и, следовательно, равный нулю. Отсюда вытекает, что M_ξ, $\xi \in S$, – инвариант.

Покажем, что L_φ, $\varphi \in \Phi$, является инвариантом. Пусть $q = (\xi, \xi')$ – допустимая пара и $\{\xi, \alpha_q, \xi'\}$ – цепочка. Предположим, что $\mathcal{E}(\xi) = (a, -b)$, $\mathcal{E}(\xi') = (a', -b')$, $b, b' > 0$, такие, что $a \preccurlyeq a'$. Тогда $\varphi = \alpha_q + \xi'$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $a' \not\succcurlyeq -R$. Имеем $a \neq a'$, в противном случае корни ξ и ξ' из S являются сравнимыми. Так как $a' < 0$, имеем $\xi' = \varepsilon_{b'} - \varepsilon_{-a'}$. Поскольку корни ξ, α_q, ξ' образуют цепочку, то $\mathcal{E}(\alpha_q) = (-b, a')$, то есть $\alpha_q = \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_b$. Следовательно, $\varphi = \varepsilon_{b'} - \varepsilon_b$ и $\mathcal{E}(\varphi) = (-b, -b')$.

Пусть подгруппа $g_\alpha(t)$ присоединенно действует на многочлен L_φ, $\mathcal{E}(\alpha) = (-j, -i)$, $i > 0$. Если $-j \prec -b$ или $a' \preccurlyeq -i$, то действие $g_\alpha(t)$ не изменит L_φ. Поэтому пусть $-b \preccurlyeq -j \prec -i \preccurlyeq a'$, тогда $j > 0$ и $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$. Представим корень α_q в виде суммы корней:

$$\alpha_q = \gamma_1 + \alpha + \gamma_2, \quad \text{где} \quad \gamma_1 = \varepsilon_j - \varepsilon_b, \quad \gamma_2 = \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_i.$$

Так как $\alpha_q \in \Delta_{\mathfrak{r}}^+$, то $\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta_{\mathfrak{r}}^+$. Прямые вычисления показывают:

$$\mathcal{E}(\xi + \gamma_1 + \alpha) = (a, -i), \qquad \mathcal{E}(\gamma_2 + \xi') = (-i, -b'),$$
$$\mathcal{E}(\xi + \gamma_1) = (a, -j), \qquad \mathcal{E}(\alpha + \gamma_2 + \xi') = (-j, -b').$$

Используя (2), получаем следующие равенства

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} M_{\xi+\gamma_1+\alpha} &= M_{\xi+\gamma_1+\alpha} - t M_{\xi+\gamma_1}, \\ \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} \overline{M}_{\alpha+\gamma_2+\xi'} &= \overline{M}_{\alpha+\gamma_2+\xi'} + t\overline{M}_{\gamma_2+\xi'}. \end{aligned} \tag{3}$$

Применив (3) к равенству (1), получим

$$\mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} L_\varphi - L_\varphi = (M_{\xi+\gamma_1+\alpha} - tM_{\xi+\gamma_1})\,\overline{M}_{\gamma_2+\xi'}$$

$$+M_{\xi+\gamma_1}\left(\overline{M}_{\alpha+\gamma_2+\xi'} + t\overline{M}_{\gamma_2+\xi'}\right) - M_{\xi+\gamma_1+\alpha}\overline{M}_{\gamma_2+\xi'} - M_{\xi+\gamma_1}\overline{M}_{\alpha+\gamma_2+\xi'} = 0,$$

т.е. L_φ – инвариант.

2. Пусть теперь $a' \prec -R$. Очевидно, что $a' < 0$, поскольку выполняется $\mathcal{E}(\alpha_q) = (-a, a')$. Следовательно, $\xi' = \varepsilon_{b'} - \varepsilon_{-a'}$. Выпишем, какими могут быть корни ξ и α_q в зависимости от числа a:

$$\xi = \begin{cases} \varepsilon_b - \varepsilon_{-a}, & \text{если } \ a < 0; \\ \varepsilon_b + \varepsilon_a, & \text{если } \ a > 0; \\ \varepsilon_b, & \text{если } \ a = 0; \end{cases} \qquad \alpha_q = \begin{cases} \varepsilon_{-a'} + \varepsilon_{-a}, & \text{если } \ a < 0; \\ \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_a, & \text{если } \ a > 0; \\ \varepsilon_{-a'}, & \text{если } \ a = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим присоединенное действие $g_\alpha(t)$. Мы приведем доказательства инвариантности многочлена L_φ для $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ и $\alpha = \varepsilon_i$. Случаи $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ и $\alpha = 2\varepsilon_i$ разбираются аналогично.

(a) Предположим, что корень $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$, $i < j$. Тогда $\mathcal{E}(\alpha) = (-j, -i)$. Очевидно, что $-a \prec a'$. Действие $g_\alpha(t)$ не изменит многочлен L_φ, если $-i \succcurlyeq a'$ и $-j \prec -a$. Предположим, что $-a \preccurlyeq -j \prec -i \prec a'$.

Пусть сначала $a > 0$. Представим корень α_q в виде суммы трех корней, один из которых α, а два других лежат в $\Gamma_{\mathfrak{r}}$:

$$\alpha_q = \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_a = \gamma_1 + \alpha + \gamma_2,$$

где $\gamma_1 = \varepsilon_j - \varepsilon_a$, $\gamma_2 = \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_i$. Вычислим:

$$\begin{aligned} \xi + \gamma_1 + \alpha &= \varepsilon_b + \varepsilon_i, & \gamma_2 + \xi' &= \varepsilon_{b'} - \varepsilon_i, \\ \xi + \gamma_1 &= \varepsilon_b + \varepsilon_j, & \alpha + \gamma_2 + \xi' &= \varepsilon_{b'} - \varepsilon_j. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $a<0$. Представим корень α_q в виде суммы трех корней:

$$\alpha_q = \varepsilon_{-a'} + \varepsilon_{-a} = \gamma_1 + \alpha + \gamma_2,$$

где $\gamma_1 = \varepsilon_{-a} + \varepsilon_j$, $\gamma_2 = \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_i$. Прямые вычисления показывают, что в этом случае также верны равенства (4). Если $a = 0$, то $\alpha_q = \varepsilon_{-a'}$ представим в виде суммы корней $\gamma_1 = \varepsilon_j$, α и $\gamma_2 = \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_i$. Здесь опять выполняются (4). Во всех трех случаях получаем в точности равенства (3). Тогда

$$\mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} L_\varphi - L_\varphi = 0.$$

(b) Пусть теперь $\alpha = \varepsilon_i$, тогда из (2) имеем

$$g_\alpha(t) = E + t\Big(E_{i,0} - E_{0,-i}\Big) - \frac{t^2}{2} E_{i,-i}.$$

Действие $g_\alpha(t)$ не изменит многочлен L_φ, если выполняются условия $a' \preccurlyeq -i$ или $a \geqslant 0$. Итак, пусть $a < 0$ и $a' \succ -i$. Тогда $\alpha_q = \varepsilon_{-a'} + \varepsilon_{-a}$. Представим корень α_q в виде суммы двух корней из $\Gamma_{\mathfrak{r}}$ так, чтобы один корень из суммы был равен $\alpha + \gamma$ для некоторого корня $\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{r}}$:

$$\alpha_q = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4 = \gamma_5 + \gamma_6,$$

где

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \varepsilon_{-a} - \varepsilon_i, \qquad &&\gamma_3 = \varepsilon_{-a} + \varepsilon_i, \qquad &&\gamma_5 = \varepsilon_{-a}, \\ &\gamma_2 = \varepsilon_{-a'} + \varepsilon_i, \qquad &&\gamma_4 = \varepsilon_{-a'} - \varepsilon_i, \qquad &&\gamma_6 = \varepsilon_{-a'}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\xi + \gamma_1 = \varepsilon_b - \varepsilon_i, \qquad &&\xi + \gamma_3 = \varepsilon_b + \varepsilon_i, \qquad &&\xi + \gamma_5 = \varepsilon_b, \\ &\gamma_2 + \xi' = \varepsilon_{b'} + \varepsilon_i, \qquad &&\gamma_4 + \xi' = \varepsilon_{b'} - \varepsilon_i, \qquad &&\gamma_6 + \xi' = \varepsilon_{b'}. \end{aligned}$$

Подействуем подгруппой $g_\alpha(t)$ на миноры, соответствующие этим корням, имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} \overline{M}_{\gamma_2+\xi'} &= \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} \overline{M}_{\varepsilon_{b'}+\varepsilon_i} = \overline{M}_{\varepsilon_{b'}+\varepsilon_i} - t\overline{M}_{\varepsilon_{b'}} - \frac{t^2}{2}\overline{M}_{\varepsilon_{b'}-\varepsilon_i}, \\ \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} M_{\xi+\gamma_3} &= \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} M_{\varepsilon_b+\varepsilon_i} = M_{\varepsilon_b+\varepsilon_i} - tM_{\varepsilon_b} - \frac{t^2}{2} M_{\varepsilon_b-\varepsilon_i}, \\ \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} M_{\xi+\gamma_5} &= \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} M_{\varepsilon_b} = M_{\varepsilon_b} + tM_{\varepsilon_b-\varepsilon_i}, \\ \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} \overline{M}_{\gamma_6+\xi'} &= \mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} \overline{M}_{\varepsilon_{b'}} = \overline{M}_{\varepsilon_{b'}} + t\overline{M}_{\varepsilon_{b'}-\varepsilon_i}. \end{aligned}$$

Применяя эти выражения к равенству (1), получим

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ad}_{g_\alpha(t)} L_\varphi - L_\varphi &= M_{\varepsilon_b-\varepsilon_i}\Big(\overline{M}_{\varepsilon_{b'}+\varepsilon_i} - t\overline{M}_{\varepsilon_{b'}} - \frac{t^2}{2}\overline{M}_{\varepsilon_{b'}-\varepsilon_i}\Big)\\
&+ \Big(M_{\varepsilon_b+\varepsilon_i} - tM_{\varepsilon_b} - \frac{t^2}{2}M_{\varepsilon_b-\varepsilon_i}\Big)\overline{M}_{\varepsilon_{b'}-\varepsilon_i}\\
&+ \Big(M_{\varepsilon_b} + tM_{\varepsilon_b-\varepsilon_i}\Big)\Big(\overline{M}_{\varepsilon_{b'}} + t\overline{M}_{\varepsilon_{b'}-\varepsilon_i}\Big)\\
&- M_{\varepsilon_b-\varepsilon_i}\overline{M}_{\varepsilon_{b'}+\varepsilon_i} - M_{\varepsilon_b+\varepsilon_i}\overline{M}_{\varepsilon_{b'}-\varepsilon_i} - M_{\varepsilon_b}\overline{M}_{\varepsilon_{b'}} = 0.
\end{aligned}
$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что многочлены M_ξ, $\xi \in S$, и L_φ, $\varphi \in \Phi$, алгебраически независимы. Пусть

$$
E_\gamma = \begin{cases}
E_{i,j} - E_{-j,-i}, & \text{если } \gamma = \varepsilon_i - \varepsilon_j;\\
E_{i,-j} - E_{j,-i}, & \text{если } \gamma = \varepsilon_i + \varepsilon_j \text{ и } G \neq \mathrm{Sp}_{2n}(K);\\
E_{i,-j} + E_{j,-i}, & \text{если } \gamma = \varepsilon_i + \varepsilon_j \text{ и } G = \mathrm{Sp}_{2n}(K);\\
E_{i,-i}, & \text{если } \gamma = 2\varepsilon_i \text{ и } G = \mathrm{Sp}_{2n}(K);\\
E_{i,0} - E_{0,-i}, & \text{если } \gamma = \varepsilon_i \text{ и } G = \mathrm{O}_{2n+1}(K).
\end{cases}
$$

Обозначим через $\mathcal{Y}$ подмножество в $\mathfrak{m}$, состоящее из матриц вида

$$
\sum_{\xi\in S} c_\xi E_\xi + \sum_{\varphi\in\Phi} c'_\varphi E_\varphi.
$$

Рассмотрим гомоморфизм ограничения $\pi(f) = f|_{\mathcal{Y}}$ кольца $K[\mathfrak{m}]$ на $\mathcal{Y}$. Образ $K[\mathfrak{m}]$ при этом гомоморфизме – алгебра многочленов от $x_{i,j}$, где $(-j,-i) = \mathcal{E}(\gamma)$ для некоторого корня $\gamma \in S \cup \Phi$. Обозначим $x_{i,j} = x_\xi$, если $\mathcal{E}(\xi) = (-j,-i)$. Выпишем образы многочленов M_ξ, $\xi \in S$, и L_φ, $\varphi \in \Phi$, при отображении π. Имеем

$$
\pi(M_\xi) = \pm x_\xi \prod_{\gamma\in S_\xi} x_\gamma^{\delta_\gamma},
$$

и, если корень $\varphi \in \Phi$ соответствует допустимой паре (ξ, ξ'), то

$$
\pi(L_\varphi) = \pm x_\varphi \prod_{\gamma\in\{\xi\}\cup S_\xi\cup S_{\xi'}} x_\gamma^{\delta_\gamma},
$$

где δ_γ принимает значения 1 или 2. Поскольку система $\pi(M_\xi)$, $\xi \in S$, и $\pi(L_\varphi)$, $\varphi \in \Phi$, алгебраически независима, то и система M_ξ, $\xi \in S$, L_φ, $\varphi \in \Phi$, алгебраически независима. $\square$

Как следствие из теоремы имеем следующий результат.

Теорема 16. *Размерность N-орбит в $\mathfrak{m}$ не превосходит числа*

$$\dim \mathfrak{m} - |S| - |\Phi|.$$

Литература

1. Э. Б. Винберг, В. Л. Попов, *Теория инвариантов.* — Итоги науки и техники. Совр. проб. математики, фунд. исследования **55** М.: ВИНИТИ (1989), 137—309.
2. М. Гото, Ф. Гроссханс, *Полупростые алгебры Ли.* Мир, М., 1981.
3. Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов.* Мир, М., 1987.
4. А. Н. Панов, В. В. Севостьянова, *Регулярные N-орбиты в нильрадикале параболической подалгебры.* — Тр. межд. конф. по алгебре и теории чисел, посв. 80-летию В. Е. Воскресенского. Изд. "Самарский университет" (2007), С. 152–161.
5. В. В. Севостьянова, *Поле инвариантов присоединённого действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 167–194.
6. В. В. Севостьянова, *Алгебра инвариантов присоединённого действия унитреугольной группы в нильрадикале параболической подалгебры.* — Вестник СамГУ, Естественнонаучная серия. No. 2 (76) (2010), 72–83.

Sevostianova V. V. Invariants of the adjoint action on nil-radicals of parabolic subalgebras in B_n, C_n, D_n.

We consider the conjugation action of the unitriangular subgroup N of one of the following groups Sp_{2n}, O_{2n}, O_{2n+1}, on the nilradical of a parabolic subalgebra in the corresponding Lie algebra. We introduce the notion of an extended base in the set of positive roots. To each root of the extended base there corresponds an invariant with respect to the adjoint action of N. We show that these invariants are algebraically independent. Also, we estimate trancendence degrees of these invariants.

Самарский государственный университет,
ул. акад. Павлова 1,
443011 Самара, Россия

E-mail: berlua@mail.ru

Поступило 12 ноября 2010 г.