Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 386, 2010 г.

И. М. Певзнер

ШИРИНА ГРУПП ТИПА E_6 ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА КОРНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. II

Введение

Эта работа является продолжением работ [15] и [16]. В работе [16] доказывалась теорема:

Основная теорема работы [16]. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Тогда любой элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ представляется в виде произведения не более восьми корневых элементов.*

Настоящая работа посвящена улучшению этого результата. А именно, нами будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Тогда любой элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ представляется в виде произведения не более семи корневых элементов.*

Статья организована следующим образом. В §1 определяются основные обозначения и описываются результаты из статей [15] и [16]. В §2 мы анализируем доказательство основной теоремы работы [16]. Пусть в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень, $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$, а $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ – один из трех элементов $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующий x. В §2 формулируется условие на матрицу g, названное в работе $(\star)$, и доказывается, что если g удовлетворяет этому условию, то x является произведением не более семи корневых элементов. В §3 доказывается, что если матрица g не удовлетворяют условию $(\star)$, то она сопряжена матрице специального вида, названному в работе вид (5). Отметим, что матрицы этого вида возникают и в готовящемся сейчас продолжении настоящей работы; там будет доказано, что они действительно не удовлетворяют условию $(\star)$.

Ключевые слова: группы Шевалле, исключительные группы, ширина группы, корневые элементы.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта РФФИ 09-01-00784-а

Наконец, в §4 доказывается, что матрицы вида (5) также являются произведением не более семи корневых элементов.

§1. Основные обозначения

Все обозначения и терминология, используемые в настоящей работе, достаточно подробно обсуждались в статьях [15] и [16]. Поэтому сейчас мы лишь напомним основные определения.

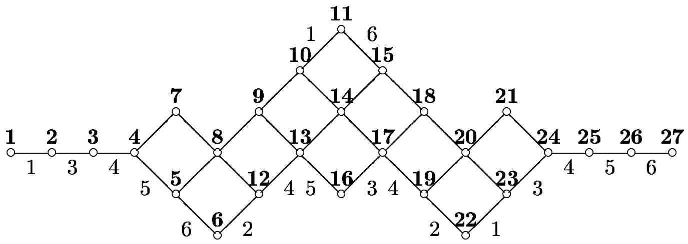
Система корней в настоящей работе всегда $\Phi = \mathrm{E}_6$, а $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$ – система простых корней в ней. Мы используем для них ту же нумерацию, что и в [2]. Система Π фиксирует некоторый порядок на Φ. Максимальный корень относительно этого порядка обозначим через $\delta = \overset{12321}{2}$.

Существует две группы Шевалле типа E_6 над кольцом R – это односвязная группа $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, R)$ и присоединенная группа $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, R)$. При этом в схемном смысле присоединенная групповая схема является фактором односвязной по схеме μ_3. Из этого, в частности, следует, что если в поле K любой многочлен степени не выше трех имеет корень, то присоединенная группа является фактором односвязной по центру, изоморфному группе $\mu_3(K)$ кубических корней из 1: $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K) \cong G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)/\mu_3(K)$.

Далее, $x_\alpha(a)$ – элементарный корневой элемент, отвечающий $\alpha \in \mathrm{E}_6$, $a \in R$, а $X_\alpha = \{x_\alpha(a) | a \in R\}$ – элементарная корневая подгруппа. Для элементов x и y группы G через $[x, y]$ обозначается их левонормированный коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$. Коммутационная формула Шевалле для системы корней E_6 принимает вид $[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = e$ в случае, если $\alpha + \beta \neq 0$ не является корнем, и вид $[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha\beta}ab)$, если $\alpha + \beta$ является корнем. При этом константы $N_{\alpha\beta}$ не зависят от a и b. Группа $E_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, R) = \langle X_\alpha, \alpha \in \mathrm{E}_6 \rangle$ называется элементарной подгруппой группы $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, R)$. В настоящей работе нас будет интересовать только случай, когда $R = K$ – поле. В этом случае $E_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K) = G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$.

Группу $G = G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ мы рассматриваем вместе с действием на 27-мерном модуле V. Через Λ обозначается множество весов этого модуля. В V можно так выбрать базис e^ρ, что если $\alpha \in \Phi, \rho, \rho + \alpha \in \Lambda$, то $x_\alpha(a)e^\rho = e^\rho + c_{\rho+\alpha,\rho} a e^{\rho+\alpha}$, где все структурные константы действия $c_{\rho+\alpha,\rho}$ равны ± 1. Более того, все структурные константы $c_{\rho+\alpha,\rho}$ будут равны $+1$ для простых и отрицательных простых корней, т.е. $c_{\rho+\alpha,\rho} = +1$, если $\alpha \in \pm\Pi$. При этом $c_{\rho+\delta,\rho}$ также будет равно $+1$ для всех $\rho, \rho + \delta \in \Lambda$.

Используемая в настоящей работе нумерация весов указана на следующей диаграмме.



В наших рассуждениях вектор $a \in V$, $a = \sum e^{\rho} a_{\rho}$, отождествляется со столбцом координат $a = (a_{\rho})$, $\rho \in \Lambda$. При этом элемент b контраградиентного модуля V^* естественно представлять себе как строку $b = (b_{\rho})$, $\rho \in \Lambda$. Разумеется, по отношению к весам Λ^* контраградиентного модуля V^* картина обратная: элементы V^* представляются столбцами $b = (b_{\rho})$, $\rho \in \Lambda^*$, а элементы V – строками $a = (a_{\rho})$, $\rho \in \Lambda^*$. Поэтому мы еще раз обращаем внимание на то, что мы индексируем как столбцы, так и строки весами модуля V – индексы ρ, σ, λ и т.д. принадлежат Λ. Иными словами, нам удобно нумеровать координаты вектора из V^* весами модуля V и записывать их как строки – в то время как обычно они нумеруются весами самого модуля V^* и записываются как столбцы. Базисные векторы контраградиентного модуля V^* будем обозначать через e_{ρ}, где $\rho \in \Lambda$.

Таким образом, элементы группы Шевалле естественным образом отождествляются с матрицами $g = (g_{\rho\sigma})$, $\rho, \sigma \in \Lambda$. Мы будем часто пользоваться следующим обозначением: σ-й столбец матрицы g будет обозначаться через $g_{*\sigma}$, а ρ-я строка – через $g_{\rho *}$.

Множество весов Λ относительно корня $\alpha \in \Phi$ распадается на три непересекающихся подмножества: $I_1^{\alpha} = \{\rho; \rho, \rho - \alpha \in \Lambda\}$, $I_2^{\alpha} = \{\rho; \rho \in \Lambda, \rho \pm \alpha \notin \Lambda\}$ и $I_3^{\alpha} = \{\rho; \rho, \rho + \alpha \in \Lambda\}$. Для корня $\alpha = \delta$ в [15] соответствующие подмножества обозначались I_1, I_2 и I_3, однако в настоящей работе нам будут более удобны обозначения без индексов, поэтому в настоящей работе мы переобозначим эти подмножества. А именно, положим $\mathrm{B} = \{\rho; \rho, \rho - \delta \in \Lambda\}$, $\Gamma = \{\rho; \rho \in \Lambda, \rho \pm \delta \notin \Lambda\}$ и $\Delta = \{\rho; \rho, \rho + \delta \in \Lambda\}$. С учетом выбранной нами нумерации весов получаем, что множества B и Δ состоят из 6 первых и 6 последних весов соответственно, а множество Γ – из 15 средних весов. Соответственно, пространство V разлагается в прямую сумму трех подпространств: $V_1 = \langle e^\rho; \rho \in \mathrm{B}\rangle$, $V_2 = \langle e^\rho; \rho \in \Gamma\rangle$ и $V_3 = \langle e^\rho; \rho \in \Delta\rangle$. Для любых двух подмножеств $I, J \subset \Lambda$ обозначим через $g_{I,J}$ подматрицу матрицы g, полученную пересечением строк с номерами из I, и столбцов с номерами из J. Иначе говоря, $g_{I,J} = (g_{ij})_{i\in I, j\in J}$.

Расстояние между различными весами ρ и σ, обозначаемое $d(\rho,\sigma)$ – это минимальное количество корней, сумма которых равна разности $\rho - \sigma$. Если веса совпадают, то расстояние между ними считается равным 0. В рассматриваемом представлении расстояние между весами может быть равно 0, 1 или 2. Веса на расстоянии 1 мы называем близкими, а веса на расстоянии 2 – далекими. Тройка попарно далеких весов называется триадой; каждая пара далеких весов входит ровно в одну триаду.

На V существует трилинейная форма $F : V \times V \times V \to R$, такая, что G является группой изометрий F. Для единообразия определений, однако, удобнее работать с 3-формой $\mathfrak{F} = (T, Q, F)$, введенной Ашбахером, где T – кубическая форма, Q – ее частичная поляризация, а F — ее полная поляризация. Более подробно, 3-форма $\mathfrak{F}$ – это тройка (T, Q, F), такая, что:

(1) F – трилинейная форма;

(2) $Q : V \times V \to K$ линейно по первой переменной и удовлетворяет равенствам $Q(x, ay) = a^2 Q(x, y)$ и $Q(x, y+z) = Q(x, y) + Q(x, z) + F(x, y, z)$ для всех $a \in K$ и $x, y, z \in V$;

(3) $T : V \to K$ удовлетворяет равенствам $T(ax) = a^3 T(x)$ и $T(x+y) = T(x) + T(y) + Q(x, y) + Q(y, x)$ для всех $a \in K$ и $x, y \in V$.

Приведем точный вид формы T (понятно, что по T формы Q и F легко определяются) в используемой в настоящей работе нумерации весов:

$$\begin{aligned}
T(x) = {} & x_1x_{11}x_{27} - x_1x_{15}x_{26} + x_1x_{18}x_{25} - x_1x_{20}x_{24} + x_1x_{21}x_{23} \\
& - x_2x_{10}x_{27} + x_2x_{14}x_{26} - x_2x_{17}x_{25} + x_2x_{19}x_{24} - x_2x_{21}x_{22} \\
& + x_3x_9x_{27} - x_3x_{13}x_{26} + x_3x_{16}x_{25} - x_3x_{19}x_{23} + x_3x_{20}x_{22} \\
& - x_4x_8x_{27} + x_4x_{12}x_{26} - x_4x_{16}x_{24} + x_4x_{17}x_{23} - x_4x_{18}x_{22} \\
& + x_5x_7x_{27} - x_5x_{12}x_{25} + x_5x_{13}x_{24} - x_5x_{14}x_{23} + x_5x_{15}x_{22} \\
& - x_6x_7x_{26} + x_6x_8x_{25} - x_6x_9x_{24} + x_6x_{10}x_{23} - x_6x_{11}x_{22} \\
& + x_7x_{16}x_{21} - x_7x_{17}x_{20} + x_7x_{18}x_{19} - x_8x_{13}x_{21} + x_8x_{14}x_{20} \\
& - x_8x_{15}x_{19} + x_9x_{12}x_{21} - x_9x_{14}x_{18} + x_9x_{15}x_{17} - x_{10}x_{12}x_{20} \\
& + x_{10}x_{13}x_{18} - x_{10}x_{15}x_{16} + x_{11}x_{12}x_{19} - x_{11}x_{13}x_{17} + x_{11}x_{14}x_{16}.
\end{aligned}$$

Для большинства интересующих нас вопросов достаточно того, что $T(x) = \sum \pm x_\rho x_\sigma x_\tau$, где сумма берется по всем неупорядоченным триадам $\{\rho, \sigma, \tau\}$. Соответственно, $F(x, y, z) = \sum \pm x_\rho y_\sigma z_\tau$, где сумма берется по всем упорядоченным триадам (ρ, σ, τ), а $Q(x, y) = \sum \pm x_\rho y_\sigma y_\tau$, где сумма берется по всем триадам $(\rho, \{\sigma, \tau\})$, в которых пара, состоящая из второго и третьего веса, неупорядочена. Отметим, что такая же форма задана на двойственном модуле V^*, элементы которого мы обозначаем строками. Эту форму мы также будем обозначать через $\mathfrak{F} = (T, Q, F)$.

Вектор v называется сингулярным (относительно 3-формы $\mathfrak{F}$), если для любого вектора x выполняется равенство $Q(x, v) = 0$. Подпространство называется сингулярным, если любой его вектор сингулярен. Расстояние между двумя различными сингулярными векторами u и v, обозначаемое $d(u, v)$, полагается равным 1, если вектор $u - v$ сингулярен, и 2 в противном случае. В первом случае векторы называются близкими, а во втором далекими. Если $u = v$, то расстояние между ними считается равным 0. Отметим, что $d(e^\rho, e^\sigma) = d(\rho, \sigma)$.

Далее, будем называть координатой корневого элемента g (или матрицы g) при корне $\alpha \in \Phi = \mathrm{E}_6$ и обозначать через $(\alpha)_g$ коэффициент при e_α в разложении элемента $g - E$ по базису Шевалле.

Для корневого элемента g обозначим через V^g шестимерное подпространство $\mathrm{Im}(g - E)$. Иначе говоря, это подпространство, порожденное всеми столбцами матрицы $g - E$. Аналогично, через V_g обозначим шестимерное подпространство в V^*, порожденное всеми строками матрицы $g - E$. Подпространство V^g является сингулярным. В работе [15] доказано, что полученное естественное отображение из множества корневых подгрупп в множество шестимерных сингулярных подпространств является биекцией.

Произвольную пару корневых элементов g и h можно сопряжением перевести в какую-нибудь пару элементарных корневых элементов $x_\alpha(a)$ и $x_\beta(b)$; углом между g и h называется угол между соответствующими корнями α и β. Такое определение оказывается корректным.

Через L в работе [16] обозначалась подгруппа Леви, соответствующая параболической подгруппе P_2, через U_2 – унипотентный радикал этой параболической подгруппы, а через U_2^- – унипотентный радикал противоположной параболической подгруппы. Таким образом, матрицы из L, U_2 и U_2^- имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} g_{\text{В},\text{В}} & 0 & 0 \\ 0 & g_{\Gamma,\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\Delta,\Delta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_6 & g_{\text{В},\Gamma} & g_{\text{В},\Delta} \\ 0 & E_{15} & g_{\Gamma,\Delta} \\ 0 & 0 & E_6 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} E_6 & 0 & 0 \\ g_{\Gamma,\text{В}} & E_{15} & 0 \\ g_{\Delta,\text{В}} & g_{\Delta,\Gamma} & E_6 \end{pmatrix},$$

где E_n обозначает единичную матрицу размером $n \times n$. Далее, в [16] определялась матрица $J = x_\delta(1)x_{-\delta}(-1)x_\delta(1)$ и множество $L' = \{gJ; g \in L\}$. Несложно видеть, что матрица J и матрицы из L' имеют, соответственно, вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & E_6 \\ 0 & E_{15} & 0 \\ -E_6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{\text{В},\Delta} \\ 0 & g_{\Gamma,\Gamma} & 0 \\ g_{\Delta,\text{В}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, в работе [16] определялась подгруппа $D = \langle X_\alpha; \alpha \perp \delta \rangle$. Она, очевидно, является подгруппой группы L. При этом для произвольной матрицы $g \in D$ получаем $g|_{V_1} = g|_{V_3} \in \mathrm{SL}(6, K)$. Верно и обратное – для произвольной матрицы $h \in \mathrm{SL}(6, K)$ существует матрица $g \in D$, такая что $g|_{V_1} = h$.

§2. Анализ доказательства основной теоремы работы [16]

Основной результат настоящей работы – это следующая теорема.

Основная теорема. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Тогда любой элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ представляется в виде произведения не более семи корневых элементов.*

Это утверждение является усилением основного результата из работы [16].

Основная теорема [16]. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Тогда любой элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ представляется в виде произведения не более восьми корневых элементов.*

Напомним доказательство этой теоремы. Пусть x – произвольный элемент группы $G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$. Ему соответствуют три элемента группы $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, получающиеся друг из друга умножением на $\sqrt[3]{1}$. Пусть $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ – один из них. Очевидно, что если g является произведением восьми корневых элементов, то x – тем более. Обратное, вообще говоря, не верно. Очевидно также, что если какой-то элемент $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ является произведением нескольких корневых элементов, то и любой сопряженный с ним посредством матрицы из $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ элемент является произведением такого же числа корневых элементов. Поэтому g можно сопрягать. В дальнейшем доказательстве ключевую роль играла подматрица $g_{\mathrm{B},\Delta}$, расположенная в правом верхнем углу матрицы g; в работе [16] она обозначалась $\overline{g}$. По [т. 6, 16] можно считать, что $\det \overline{g} \neq 0$. Далее, по [сл. из т. 5, 16], существует матрица $h \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, являющаяся произведением пяти корневых элементов и такая, что $\overline{h} = \overline{g}$. По [т. 3, 16] $h = vA'w$ и $g = \tilde{v}B'\tilde{w}$, где $v, w, \tilde{v}, \tilde{w} \in U_2^-$, а $A', B' \in L'$. Далее, как несложно видеть, $\overline{A'} = \overline{h} = \overline{g} = \overline{B'}$.

Выясним, как связаны между собой матрицы A' и B'. Они, как и все остальные матрицы из L', состоят из трех блоков, расположенных на побочной диагонали. Правые верхние блоки, как мы только что отметили, равны между собой. Поэтому, как следует из [т. 1, 16], либо $A' = B'$, либо блоки отличаются на скалярные множители: центральные блоки различаются на $\xi = \sqrt[3]{1}$, а левые нижние – на ξ^2. Тогда существует диагональная матрица $f \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ такая, что после сопряжения h матрицей f получим, что $B' = \xi A'$. Заменяя g на ξg, мы получим другой элемент из $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующий x. Таким образом, можно считать, что $B' = A'$. Более подробно об этом рассказано в пункте (2) доказательства основной теоремы работы [16]. Получаем, что $h = vA'w$ и $g = \tilde{v}B'\tilde{w} = \tilde{v}A'\tilde{w}$, причем h по-прежнему является произведением пяти корневых элементов. Сопрягая h унипотентом w, а g — унипотентом $\tilde{w}$, можно считать, что $h = wvA'$, а $g = \tilde{w}\tilde{v}A'$. Тогда $gh^{-1} = \tilde{w}\tilde{v}v^{-1}w^{-1} \in U_2^-$, то есть, по [т. 2, 16], является произведением трех корневых элементов. Поэтому g является произведением восьми корневых элементов, что и требовалось в основной теореме работы [16].

Таким образом, оценка "восемь" из основной теоремы работы [16] складывается из оценки "пять" из [сл. из т. 5, 16] и оценки "три" из [т. 2, 16]. Сейчас мы сосредоточимся на первой из этих оценок и выясним, в каком случае ее можно уменьшить. В частности, мы сразу получаем следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $g \in G$ – одна из трех матриц, соответствующих элементу $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$. Далее, предположим, что существуют матрицы h и f, такие, что $\det(\overline{fgf^{-1}}) \neq 0$, $\overline{h} = \overline{fgf^{-1}}$ и h является* *произведением не более четырех корневых элементов. Тогда x является произведением не более семи корневых элементов.*

Для того, чтобы выяснить, для каких g существует такая “улучшенная” матрица h, необходимо вспомнить доказательство [сл. из т. 5, 16]. Это доказательство легко следовало из [т. 5, 16] и [т. 4, 16]. По первой из них, матрицу $\overline{fgf^{-1}}$ можно представить в виде произведения $A_1A_2A_3A_4$, где A_1, A_2, A_3 и A_4 – матрицы некоторого специального вида, который в [16] назывался †. Возьмем корневой элемент $g_0 = x_\delta(1)$. По [т. 4, 16] существует такой корневой элемент g_1, что $\overline{g_0g_1} = \overline{g_0}A_1 = A_1$. Применяя [т. 4, 16] еще три раза, получаем $\overline{g_0g_1g_2g_3g_4} = A_1A_2A_3A_4 = \overline{fgf^{-1}}$, что и требовалось в [сл. из т. 5, 16]. Таким образом, для доказательства существования “улучшенной” матрицы h достаточно улучшить оценку в [т. 5, 16], а именно показать, что матрица $\overline{fgf^{-1}}$ представляется в виде произведения не более чем трех матриц вида †. Иначе говоря, мы доказали следующую лемму.

Лемма 2.2. *Пусть $g \in G$ – одна из трех матриц, соответствующих элементу $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$. Далее, предположим, что существует матрица f, такая, что $\det(\overline{fgf^{-1}}) \neq 0$ и $\overline{fgf^{-1}}$ является произведением не более трех матриц вида †. Тогда x является произведением не более семи корневых элементов.*

Осталось понять, какие матрицы из $\mathrm{GL}(6, K)$ являются произведением не более трех матриц вида †. Ответ на этот вопрос был получен при доказательстве [т. 5, 16] – там мы перебирали все возможные жордановы формы и доказали, что все они, кроме $D(a, b, b, b, b, b)$, где $a \neq b \in K^*$, являются произведением не более трех матриц вида †, а $D(a, b, b, b, b, b)$ – не более четырех матриц вида † (через $D(a, b, b, b, b, b)$ мы обозначали диагональную матрицу с коэффициентами a, b, b, b, b, b на диагонали). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Пусть $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$, а $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ – один из трех элементов $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующий x. Если существует матрица f, такая, что $\det(\overline{fgf^{-1}}) \neq 0$ и $\overline{fgf^{-1}}$ не сопряжена матрице $D(a, b, b, b, b, b)$ при любых $a \neq b \in K^*$, то x является произведением не более семи корневых элементов.*

Обозначим условие, возникшее в этой теореме, через $(\star)$:

$(\star)$ существует матрица f, такая, что $\det(\overline{fgf^{-1}}) \neq 0$ и $\overline{fgf^{-1}}$ не сопряжена матрице $D(a, b, b, b, b, b)$ при любых $a \neq b \in K^*$.

Тогда теорему 1 можно переформулировать:

Теорема 1'. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Пусть $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$, а $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ – один из трех элементов $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующий x. Если g удовлетворяет условию $(\star)$, то x является произведением не более семи корневых элементов.*

§3. Исследование условия $(\star)$

Цель этого параграфа – выяснить, какие из нескалярных матриц $g \in G$ не удовлетворяют условию $(\star)$.

Пусть матрица g нескалярная и не удовлетворяет условию $(\star)$. Изобразим матрицу g в виде

$$g = \begin{pmatrix} g_{\mathrm{B},\mathrm{B}} & g_{\mathrm{B},\Gamma} & g_{\mathrm{B},\Delta} \\ g_{\Gamma,\mathrm{B}} & g_{\Gamma,\Gamma} & g_{\Gamma,\Delta} \\ g_{\Delta,\mathrm{B}} & g_{\Delta,\Gamma} & g_{\Delta,\Delta} \end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, $g_{\mathrm{B},\Delta} = \overline{g}$. По [т. 6, 16] можно считать, что $\det g_{\mathrm{B},\Delta} \neq 0$. Поскольку g не удовлетворяет условию $(\star)$, то подматрица $g_{\mathrm{B},\Delta}$ сопряжена диагональной матрице $D(a,b,b,b,b,b)$, где $a \neq b \in K^*$. Более того, поскольку сопряжение g матрицей $h \in D$ соответствует сопряжению $g_{\mathrm{B},\Delta}$ матрицей $h|_{V_1} = h|_{V_3}$, то можно считать, что $g_{\mathrm{B},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b)$. Дальнейшие рассуждения представим в виде цепочки лемм.

Лемма 3.1. *Пусть матрица $g \in G$ нескалярная и не удовлетворяет условию $(\star)$. Тогда g можно сопрячь так, чтобы подматрицы $g_{\mathrm{B},\mathrm{B}}$, $g_{\mathrm{B},\Gamma}$ и $g_{\Gamma,\mathrm{B}}$ стали нулевыми, а $g_{\mathrm{B},\Delta}$ стала равной $D(a,b,b,b,b,b)$, где $a \neq b \in K^*$ – некоторые числа.*

Доказательство. Как уже говорилось, можно считать $g_{\mathrm{B},\Delta}$ равным $D(a,b,b,b,b,b)$. По [т. 3, 16] матрицу g можно представить в виде $g = vhw$, где $v, w \in U_2^-$, а $h \in L'$. Несложно видеть, что $\overline{h} = g_{\mathrm{B},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b)$. Заменим матрицу g на сопряженную к ней матрицу wgw^{-1}. Эта матрица, очевидно, также не удовлетворяет условию $(\star)$, при этом $g = wvh$ и $g_{\mathrm{B},\Delta} = \overline{h} = D(a,b,b,b,b,b)$. Очевидно, что $wv \in U_2^-$. Поэтому $gV_1 = wvhV_1 = wvV_3 = V_3$, откуда $g_{ij} = 0$ при $i \in \mathrm{B} \cup \Gamma$ и $j \in \Delta$. Аналогично $V_1^T g = V_1^T wvh = V_1^T h = V_3^T$, откуда $g_{ij} = 0$ при $i \in \mathrm{B}$ и $j \in \Gamma \cup \Delta$. Иначе говоря, после сопряжения подматрицы $g_{\mathrm{B},\mathrm{B}}, g_{\mathrm{B},\Gamma}$

и $g_{\Gamma,\text{В}}$ стали нулевыми, а $g_{\text{В},\Delta}$ по-прежнему равно $D(a,b,b,b,b,b)$, что и требовалось.

Матрица $g \in G$, у которой $g_{\text{В},\text{В}}$, $g_{\text{В},\Gamma}$ и $g_{\Gamma,\text{В}}$ – нулевые блоки, а $g_{\text{В},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b)$ для некоторых $a \neq b \in K^*$, называется **матрицей вида (1)**. Таким образом, матрица вида (1) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{\text{В},\Delta} \\ 0 & g_{\Gamma,\Gamma} & g_{\Gamma,\Delta} \\ g_{\Delta,\text{В}} & g_{\Delta,\Gamma} & g_{\Delta,\Delta} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad g_{\text{В},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b). \tag{1}$$

Лемма 3.1 говорит, что если матрица $g \in G$ нескалярная и не удовлетворяет условию $(\star)$, то она сопряжена некоторой матрице вида (1).

Лемма 3.2. *Пусть $g \in G$ имеет вид* (1). *Тогда*

$$\begin{aligned} g_{\Gamma,\Gamma} &= \frac{b^3}{d^2} D(a,a,a,a,b,a,a,a,b,a,a,b,a,b,b), \\ g_{\Delta,\text{В}} &= -\frac{1}{d} D(a,b,b,b,b,b) \end{aligned}$$

для некоторого $d = \sqrt[3]{ab^5}$.

Доказательство. Как и в предыдущей лемме, $g = uh$, где $u \in U_2^-$, а $h \in L'$. Поскольку $u \in U_2^-$, то $g_{ij} = h_{ij}$ при $i \in \text{В}, j \in \Delta$, при $i,j \in \Gamma$ или при $i \in \Delta, j \in \text{В}$. Отсюда, используя определение L' и [т. 1, 16], получаем, что $g_{\Gamma,\Gamma}$ и $g_{\Delta,\text{В}}$ имеют требуемый вид.

Матрица $g \in G$ вида (1), для которой выполняются оба равенства из леммы 3.2, называется **матрицей вида (2)**. Таким образом, матрица вида (2) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{\text{В},\Delta} \\ 0 & g_{\Gamma,\Gamma} & g_{\Gamma,\Delta} \\ g_{\Delta,\text{В}} & g_{\Delta,\Gamma} & g_{\Delta,\Delta} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $g_{\text{В},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b)$, а $g_{\Gamma,\Gamma}$ и $g_{\Delta,\text{В}}$ – как в лемме 3.2.

Лемма 3.2 утверждает, что любая матрица $g \in G$, имеющая вид (1), имеет также вид (2).

Лемма 3.3. *Пусть $g \in G$ имеет вид* (2) *и не удовлетворяет условию* ($\star$). *Тогда блок $g_{\Gamma,\Delta}$ нулевой.*

Доказательство. Последние шесть столбцов матрицы g порождают шестимерное сингулярное подпространство gV_3. По [т. 2, 15], существует корневой элемент h, такой, что $gV_3 = V^h$. Поскольку $\det g_{\mathrm{B},\Delta} \neq 0$, то, по [л. 3.5, 15], $(\delta)_h \neq 0$. Поэтому $g_{*j} = \frac{g_{j+\delta,j}}{(\delta)_h} h_{*j}$ при $j \in \Delta$, откуда, по [л. 3.1, 15], получаем при $i \in \Gamma, j \in \Delta$, что $g_{ij} = 0$ при $d(i,j) = 2$ и $g_{ij} = c_{ij}\frac{g_{j+\delta,j}}{(\delta)_h}(i-j)_h$ при $d(i,j) = 1$. Предположим, что утверждение леммы не выполняется, то есть существуют такие $i \in \Gamma$ и $j \in \Delta$, для которых $g_{ij} \neq 0$. Тогда $i - j = \alpha \in \Phi$ и, по [утв. 4, 15], $\angle(\alpha,\delta) = \pi/3$ и $(\alpha)_h = (i-j)_h \neq 0$. Обозначим корень $\delta - \alpha$ через β. Пусть f — это корневой элемент $x_\beta(t)$ при t не равном $\frac{\pm a}{(\alpha)_h}$, $\frac{\pm b}{(\alpha)_h}$ и 0. Докажем, что $\det(\overline{fgf^{-1}}) \neq 0$ и $\overline{fgf^{-1}}$ не сопряжена матрице $D(a,b,b,b,b,b)$, то есть условие ($\star$) будет выполняться.

Поскольку $\angle(\beta,\delta) = 2\pi/3$, то, по [утв. 4, 15], из шести весов $\lambda_k \in \Lambda$, таких что $\lambda_k - \beta \in \Lambda$, три принадлежат B, а три оставшихся – Г. Первые три, для определенности, назовем λ_1, λ_2 и $\lambda_3 \in \mathrm{B}$, а три других – λ_4, λ_5 и $\lambda_6 \in \Gamma$. Тогда $\lambda_1 - \beta, \lambda_2 - \beta$ и $\lambda_3 - \beta \in \Gamma$, а $\lambda_4 - \beta, \lambda_5 - \beta$ и $\lambda_6 - \beta \in \Delta$. Поэтому $\lambda_k + \alpha = \lambda_k - \beta + \delta \in \mathrm{B}$ при $4 \leqslant k \leqslant 6$; эти три веса, для краткости, назовем μ_1, μ_2 и μ_3. При этом, по [сл. из утв. 2, 15], все веса λ_k и μ_k при $1 \leqslant k \leqslant 3$ различны, то есть $\mathrm{B} = \{\lambda_k, \mu_k \mid 1 \leqslant k \leqslant 3\}$, а $\Delta = \{\lambda_k - \delta, \mu_k - \delta \mid 1 \leqslant k \leqslant 3\}$.

При умножении g на f^{-1} шесть столбцов с номерами $\lambda_k \in \Lambda$ при $1 \leqslant k \leqslant 6$ прибавляются, с коэффициентами $\pm t$, к столбцам с номерами $\lambda_k - \beta$ соответственно; при умножении f на gf^{-1} шесть строк матрицы gf^{-1} с номерами $\lambda_k - \beta$ при $1 \leqslant k \leqslant 6$ прибавляются с коэффициентами $\pm t$ к строкам с номерами λ_k соответственно. Таким образом, в образовании подматрицы $\overline{fgf^{-1}}$ участвует 81 элемент матрицы g, а именно:

(1) 36 элементов подматрицы $g_{\mathrm{B},\Delta}$;
(2) 18 элементов подматрицы g_{i,λ_k} при $i \in \mathrm{B}$, $4 \leqslant k \leqslant 6$;
(3) 18 элементов подматрицы $g_{\lambda_k - \beta, j}$ при $1 \leqslant k \leqslant 3$, $j \in \Delta$;
(4) 9 элементов подматрицы $g_{\lambda_k - \beta, \lambda_l}$ при $1 \leqslant k \leqslant 3$, $4 \leqslant l \leqslant 6$.

По условию $g_{\mathrm{B},\Gamma}$ – нулевая матрица, поэтому все 18 элементов из пункта (2) равны 0. По [утв. 2, 15] $\lambda_k - \beta \neq \lambda_l$, откуда, поскольку g имеет вид (2), получаем, что 9 элементов из пункта (4) также равны 0. Таким образом, единственное изменение, происходящее с $g_{\mathrm{B},\Delta}$ при таком сопряжении – это прибавление к $g_{\lambda_k,j}$ элемента $g_{\lambda_k-\beta,j}$ с коэффициентом $\pm t$ при $1 \leqslant k \leqslant 3$ и $j \in \Delta$. Поскольку $g_{\mathrm{B},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b)$, то $g_{\lambda_k,\mu_l-\delta} = g_{\mu_k,\lambda_l-\delta} = 0$ при $1 \leqslant k,l \leqslant 3$ и $g_{\lambda_k,\lambda_l-\delta} = g_{\mu_k,\mu_l-\delta} = 0$ при $1 \leqslant k \neq l \leqslant 3$; при этом среди чисел $g_{\lambda_k,\lambda_k-\delta}$ и $g_{\mu_k,\mu_k-\delta}$ один раз встречается a и пять раз b. Далее, $(fgf^{-1})_{\mu_k,j} = g_{\mu_k,j}$ при $1 \leqslant k \leqslant 3$ и $j \in \Delta$. Поскольку $\delta = \beta + \alpha$, то, по [сл. из утв. 2, 15], $d(\lambda_k - \beta, \lambda_l - \delta) = 2$ при $1 \leqslant k \neq l \leqslant 3$, следовательно, $g_{\lambda_k-\beta,\lambda_l-\delta} = 0$ при $1 \leqslant k \neq l \leqslant 3$. Поэтому $(fgf^{-1})_{\lambda_k,\lambda_l-\delta} = 0$ при $1 \leqslant k \neq l \leqslant 3$. Более того, $(fgf^{-1})_{\lambda_k,\lambda_k-\delta}$ не равно 0 и $g_{\lambda_k,\lambda_k-\delta}$ по выбору t. Таким образом, все собственные числа матрицы $\overline{fgf^{-1}}$, как и матрицы $g_{\mathrm{B},\Delta}$, расположены на диагонали. При этом три из них остались прежними, а три изменились, и все они по-прежнему не равны 0. Отсюда, как несложно видеть, следует, что жорданова форма $\overline{fgf^{-1}}$ не может иметь вид $D(a,b,b,b,b,b)$ – противоречие.

Матрица $g \in G$ вида (2), у которой блок $g_{\Gamma,\Delta}$ нулевой, называется **матрицей вида (3)**. Таким образом, матрица вида (3) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{\mathrm{B},\Delta} \\ 0 & g_{\Gamma,\Gamma} & 0 \\ g_{\Delta,\mathrm{B}} & g_{\Delta,\Gamma} & g_{\Delta,\Delta} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $g_{\mathrm{B},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b)$, а $g_{\Gamma,\Gamma}$ и $g_{\Delta,\mathrm{B}}$ – как в лемме 3.2.

Лемма 3.3 утверждает, что любая матрица $g \in G$, имеющая вид (2) и не удовлетворяющая условию $(\star)$, имеет также вид (3).

Две последующие леммы имеют геометрический характер.

Лемма 3.4. *Пусть $g \in G$ имеет вид* (3). *Тогда блок $g_{\Delta,\Gamma}$ нулевой.*

Доказательство. Предположим, что $g_{\Delta,\Gamma}$ не является нулевой матрицей, то есть существуют веса $i \in \Delta$ и $j \in \Gamma$, такие, что $g_{ij} \neq 0$. Несложно видеть, что для веса $i \in \Delta$ существует 10 весов из Γ, близких к i, и 5 весов из Γ, далеких от i; аналогично для веса $j \in \Gamma$ существует 8 весов из Γ, близких к j, и 6 весов из Γ, далеких от j. Это утверждение сразу следует из [утв. 5, 15], [утв. 6, 15], [утв. 1, 15] и [сл. из утв. 2, 15] (впрочем, его легко доказать и непосредственно). Поэтому существует вес $k \in \Gamma$, для которого $d(i,k) = 1$, а $d(j,k) = 2$. По [утв. 5, 15], существует вес $l \in \Gamma$, далекий от j и k, то есть образующий вместе с ними триаду. Тогда $F(e_i, e_k, e_l) = 0$ и, поскольку $g \in G$, то $F(e_i g, e_k g, e_l g) = F(e_i, e_k, e_l) = 0$. Поскольку g имеет вид (3), то $0 = F(e_i g, e_k g, e_l g) = F(g_{i*}, g_{kk} e_k, g_{ll} e_l)$. Используя определение F, получаем, что $0 = F(g_{i*}, g_{kk} e_k, g_{ll} e_l) = \pm g_{ij} g_{kk} g_{ll} \neq 0$ – противоречие.

Лемма 3.5. *Пусть* $g \in G$ *имеет вид* (3). *Тогда* $g_{\Delta,\Delta} = D(ka, kb, kb, kb, kb, kb)$ *для некоторого* $k \in K$.

Доказательство. Предположим, что блок $g_{\Delta,\Delta}$ недиагональный, то есть существует коэффициент $g_{ij} \neq 0$ при $i \neq j \in \Delta$. Тогда, по [сл. из утв. 2, 15], веса i и $j+\delta$ далеки друг от друга, то есть $d(i, j+\delta) = 2$. По [утв. 5, 15], существует вес $l \in \Gamma$, образующий вместе с i и $j+\delta$ триаду. По определению формы Q получаем, что $Q(ge^l, ge^j) = Q(e^l, e^j) = 0$, но, по [утв. 6, 15], $Q(ge^l, ge^j) = Q(g_{ll}e^l, g_{*j}) = \pm g_{ll}g_{j+\delta,j}g_{ij} \neq 0$ – противоречие. Следовательно, матрица $g_{\Delta,\Delta}$ является диагональной.

Далее, покажем, что матрица $g_{\Delta,\Delta}$ имеет вид $D(ka, kb, kb, kb, kb, kb)$ для некоторого $k \in K$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что $g_{ii}g_{j+\delta,j} = g_{jj}g_{i+\delta,i}$ для любых двух различных весов $i \neq j \in \Delta$. По [сл. из утв. 2, 15], веса $i + \delta$ и j далеки друг от друга, то есть $d(i+\delta, j) = 2$. По [утв. 5, 15], существует вес $l \in \Gamma$, образующий вместе с $i + \delta$ и j триаду. По [утв. 4, 15], вес l также будет далек от $j + \delta$ и i. Рассмотрим, чему равно $Q(ge^l, g(e^i+e^j))$. С одной стороны, это равно $Q(e^l, e^i + e^j) = 0$, а с другой стороны, $Q(ge^l, g(e^i + e^j)) = Q(g_{ll}e^l, g_{*i} + g_{*j}) = g_{ll}(\pm g_{ii}g_{j+\delta,j} \pm g_{jj}g_{i+\delta,i})$. Знаки “$\pm$” в этом выражении зависят только от весов i и j, но не от матрицы g; нам необходимо доказать, что эти знаки различны. Рассмотрим корневой элемент $h = x_\delta(l)$. Для него получаем:

$$\begin{aligned} 0 = Q(e^l, e^i + e^j) &= Q(he^l, h(e^i + e^j)) = Q(h_{ll}e^l, h_{*i} + h_{*j}) \\ &= h_{ll}(\pm h_{ii}h_{j+\delta,j} \pm h_{jj}h_{i+\delta,i}). \end{aligned}$$

Для h, как известно, $h_{ll} = h_{ii} = h_{jj} = 1$; более того, как говорилось в §1, $c_{\lambda+\delta,\lambda} = 1$ при $\lambda, \lambda + \delta \in \Lambda$, откуда $h_{i+\delta,i} = h_{j+\delta,j} = 1$. Отсюда сразу следует, что знаки “$\pm$” действительно различны, что завершает доказательство леммы.

Матрица $g \in G$ вида (3), у которой блок $g_{\Delta,\Gamma}$ нулевой, а $g_{\Delta,\Delta} = D(ka, kb, kb, kb, kb, kb)$ для некоторого $k \in K$, называется **матрицей вида (4)**. Таким образом, матрица вида (4) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{\mathrm{B},\Delta} \\ 0 & g_{\Gamma,\Gamma} & 0 \\ g_{\Delta,\mathrm{B}} & 0 & g_{\Delta,\Delta} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\text{где} \;\; g_{\mathrm{B},\Delta} = D(a, b, b, b, b, b), \;\; g_{\Delta,\Delta} = kD(a, b, b, b, b, b),$$
$$\text{а} \;\; g_{\Gamma,\Gamma} \text{и } g_{\Delta,\mathrm{B}} \text{ – как в лемме 3.2.}$$

Леммы 3.4 и 3.5 утверждают, что любая матрица $g \in G$, имеющая вид (3), имеет также вид (4).

Лемма 3.6. *Пусть $g \in G$ имеет вид (4) и не удовлетворяет условию $(\star)$. Тогда коэффициент k должен быть равен $\frac{b^3+ab^2}{d^2}$.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \alpha_2$ – второй простой корень, а $\beta = \delta - \alpha$. Положим также $f = x_\alpha(r)x_\beta(s)$ и сопряжем g матрицей f. Тогда подматрица $\overline{fgf^{-1}}$ равна $D(a + \frac{ab^3rs}{d^2}, b + \frac{b^4rs}{d^2}, b + \frac{b^4rs}{d^2}, b - \frac{ab^3rs}{d^2} + bkrs, b - \frac{ab^3rs}{d^2} + bkrs, b - \frac{ab^3rs}{d^2} + bkrs)$. Это легко проверить на компьютере, используя вычисления и результаты [8] или напрямую; можно, хотя это несколько сложнее, проверить полученные формулы и вручную. Поскольку g не удовлетворяет условию $(\star)$, то подматрица $\overline{fgf^{-1}}$ должна быть либо необратима, либо иметь жорданову форму вида $D(a', b', b', b', b', b')$ для некоторых $a', b' \in K^*$. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы $b + \frac{b^4rs}{d^2} = b - \frac{ab^3rs}{d^2} + bkrs$, откуда $\frac{b^4}{d^2} = -\frac{ab^3}{d^2} + bk$ и $k = \frac{b^3}{d^2} + \frac{ab^2}{d^2} = \frac{b^3+ab^2}{d^2}$, что и требовалось.

Матрица $g \in G$ вида (4), у которой коэффициент k равен $\frac{b^3+ab^2}{d^2}$, называется **матрицей вида (5)**. Таким образом, матрица вида (5) выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{\mathrm{B},\Delta} \\ 0 & g_{\Gamma,\Gamma} & 0 \\ g_{\Delta,\mathrm{B}} & 0 & g_{\Delta,\Delta} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\text{где } \; g_{\mathrm{B},\Delta} = D(a,b,b,b,b,b), \; g_{\Delta,\Delta} = kD(a,b,b,b,b,b),$$
$$k \quad \text{как в лемме 3.6,} \quad \text{а} \quad g_{\Gamma,\Gamma} \quad \text{и} \quad g_{\Delta,\mathrm{B}} \text{ – как в лемме 3.2.}$$

Лемма 3.6 утверждает, что любая матрица $g \in G$, имеющая вид (4) и не удовлетворяющая условию $(\star)$, имеет также вид (5).

Из теоремы 1 и лемм 3.1–3.6 сразу следует теорема 2.

Теорема 2. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Пусть $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$, а $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ – один из трех элементов $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующий x. Если g не сопряжена матрице вида (5), то x представляется в виде произведения не более семи корневых элементов.*

§4. Матрицы вида (5)

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что в поле K любой многочлен степени не выше шестой имеет корень. Пусть $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$, а $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$ – один из трех элементов $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующий x. Если g сопряжена матрице вида (5), то x представляется в виде произведения не более семи корневых элементов.*

Из теорем 2 и 3, очевидно, сразу следует основная теорема настоящей работы.

В работе [16], помимо обсуждавшейся выше оценки на ширину, есть, в неявном виде, и алгоритм для разложения элемента $x \in G_{\mathrm{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ в произведение нескольких корневых элементов. А именно, нужно:

(1) взять элемент $g \in G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующий x;

(2) сопрячь g так, чтобы определитель подматрицы $\overline{g}$ стал не равен 0 – по [т. 6, 16];

(3) разложить подматрицу $\overline{g}$ в произведение нескольких матриц вида † – по [т. 5, 16];

(4) подобрать корневые элементы $g_0, g_1, \dots, g_k$ так, чтобы $\overline{g_0 g_1 \dots g_k} = \overline{g}$ – по [сл. из т. 5, 16];

(5) представить матрицы $h = g_0 g_1 \dots g_k$ и g в виде $h = vA'w$ и $g = \tilde{v}B'\tilde{w}$, где $v, w, \tilde{v}, \tilde{w} \in U_2^-$, а $A', B' \in L'$ – по [т. 3, 16];

(6) заменяя, если необходимо, g на другую матрицу из $G_{\mathrm{sc}}(\mathrm{E}_6, K)$, соответствующую x, и сопрягая h, добиться того, чтобы $A' = B'$ – по пункту (2) доказательства основной теоремы [16];

(7) представить матрицу $u = \tilde{v}v^{-1}w^{-1}\tilde{w} \in U_2^-$ в виде произведения нескольких корневых элементов – по [т. 2, 16];

(8) представить матрицу g виде $g = (\tilde{v}v^{-1})h(\tilde{v}v^{-1})^{-1}u$.

Положим, для определенности, что матрица g имеет вид (5). Это позволяет нам сразу выполнить пункты (1) и (2). Таким образом, для доказательства теоремы 3 надо разложить $D(a, b, b, b, b, b)$ в произведение четырех матриц вида †, подобрать пять корневых элементов g_0, g_1, g_2, g_3 и g_4 так, чтобы $\overline{g_0 g_1 g_2 g_3 g_4} = D(a, b, b, b, b, b)$, найти матрицу u и доказать, что ее можно представить в виде произведения всего двух корневых элементов. Однако буквальная реализация этого плана оказывается сопряжена с большими трудностями при нахождении g_3 и g_4 из-за больших выражений для их коэффициентов. Поэтому мы постараемся обойтись без конкретных выражений этих коэффициентов.

Разложить $D(a,b,b,b,b,b)$ в произведение четырех матриц вида † (пункт (3)) можно большим количеством способов. Одним из самых простых разложений является следующее.

Лемма 4.1. *Матрица $D(a,b,b,b,b,b)$ есть произведение четырех матриц*

$$D(y,y,y,z,z,z),\ D(y,y,z,y,z,z),$$
$$D(y,z,y,y,z,z)\ \text{ и }\ D(y^2,z^2,z^2,z^2,y^2,y^2)$$

при $y=a^{\frac15}$ и $z=(ba^{-\frac25})^{\frac13}=b^{\frac13}a^{-\frac{2}{15}}=\frac{d^{\frac15}}{y}$.

Доказательство. Очевидно.

Приступим к пункту (4) и первой половине пункта (5) – их оказывается удобнее совместить. Так же как и в [сл. из т. 5, 16], положим $g_0=x_\delta(1)$. Пусть $h_l=g_0\dots g_{l-1}$, и представим h_l в виде $v_lA'_lw_l$, где $v_l,w_l\in U_2^-$, а $A'_l\in L'$. Далее, заметим, что $h_{l+1}=h_lg_l=v_lA'_lw_lg_l=v_lA'_l(w_lg_lw_l^{-1})w_l$ и $\overline{h_{l+1}}=\overline{h_lg_l}=\overline{A'_l(w_lg_lw_l^{-1})}$. Обозначим корневой элемент $w_lg_lw_l^{-1}$ через t_l. Поскольку $A'_l\in L'$, то подматрица $\overline{A'_lt_l}$ равна произведению $\overline{A'_l}$ и подматрицы $(t_l)_{\Delta,\Delta}$. Таким образом, вместо подбора корневого элемента g_l мы будем подбирать корневой элемент t_l; очевидно, что выбор одного из этих корневых элементов автоматически определяет второй. Согласно алгоритму, корневой элемент t_l выбирается так, чтобы подматрица $(t_l)_{\Delta,\Delta}$ равнялась l-ой диагональной матрице, в произведение которых раскладывается $D(a,b,b,b,b,b)$ по предыдущей лемме. Кроме этого, надо чтобы $\det\overline{t_l}=\det\overline{g_l}$ не был равен 0; это необходимо для неявно используемой здесь [т. 4, 16]. Корневой элемент t_l можно выбирать разными способами; один из самых простых способов описан в следующей лемме.

Лемма 4.2.

(1) *Пусть $\beta_1=-\begin{smallmatrix}00000\\1\end{smallmatrix}$, а $\gamma_1=-\begin{smallmatrix}12321\\1\end{smallmatrix}$. Тогда можно положить*

$$t_1=\Big(x_{\beta_1}(1)x_{\gamma_1}(z-y)x_{-\delta}(z-1)\Big)x_\delta(1)\Big(x_{\beta_1}(1)x_{\gamma_1}(z-y)x_{-\delta}(z-1)\Big)^{-1}.$$

(2) *Пусть $\beta_2=-\begin{smallmatrix}00100\\1\end{smallmatrix}$, а $\gamma_2=-\begin{smallmatrix}12221\\1\end{smallmatrix}$. Тогда можно положить*

$$t_2=\Big(x_{\beta_2}(1)x_{\gamma_2}(z-y)x_{-\delta}(z-1)\Big)x_\delta(1)\Big(x_{\beta_2}(1)x_{\gamma_2}(z-y)x_{-\delta}(z-1)\Big)^{-1}.$$

(3) *Пусть* $\beta_3 = -\genfrac{}{}{0pt}{}{01100}{1}$, а $\gamma_3 = -\genfrac{}{}{0pt}{}{11221}{1}$. *Тогда можно положить*

$$t_3 = \Big(x_{\beta_3}(1)x_{\gamma_3}(y-z)x_{-\delta}(z-1)\Big)x_\delta(1)\Big(x_{\beta_3}(1)x_{\gamma_3}(y-z)x_{-\delta}(z-1)\Big)^{-1}.$$

(4) *Пусть* $\beta_4 = -\genfrac{}{}{0pt}{}{11100}{1}$, а $\gamma_4 = -\genfrac{}{}{0pt}{}{01221}{1}$. *Тогда можно положить*

$$t_4 = \Big(x_{\beta_4}(1)x_{\gamma_4}(y^2-z^2)x_{-\delta}(y^2-1)\Big)x_\delta(1) \times\Big(x_{\beta_4}(1)x_{\gamma_4}(y^2-z^2)x_{-\delta}(y^2-1)\Big)^{-1}.$$

Доказательство. В каждом из случаев необходимо проверить два утверждения: то, что $\det\overline{t_l} \neq 0$, и то, что $(t_l)_{\Delta,\Delta}$ равняется соответствующей диагональной матрице. Первое утверждение очевидно, поскольку $x_{\beta_l}(\cdot), x_{\gamma_l}(\cdot), x_{-\delta}(\cdot) \in U_2^-$ и, следовательно, $\det\overline{t_l} = \det\overline{x_\delta(1)} = 1$. Второе утверждение легко проверяется непосредственным вычислением.

Далее мы везде фиксируем β_l, γ_l и t_l как в этой лемме.

Замечание. 1. Коэффициенты в дальнейшем нам не понадобятся – вполне хватит того, что $t_l = s_l x_\delta(1)(s_l)^{-1}$, где $s_l = x_{\beta_l}(\cdot)x_{\gamma_l}(\cdot)x_{-\delta}(\cdot)$.

2. Эту лемму можно обобщить – как несложно видеть, для любой диагональной матрицы $T \in \mathrm{GL}(6,K)$ с двумя собственными числами кратности 3 существуют такие корни $\beta, \gamma = -\delta-\beta \in \Phi$, и числа $p,q,r \in K$, что матрица $\big(x_\beta(p)x_\gamma(q)x_{-\delta}(r)\big)x_\delta(1)\big(x_\beta(p)x_\gamma(q)x_{-\delta}(r)\big)^{-1}$ имеет в правом нижнем углу подматрицу размером 6×6, равную T. Однако для наших целей нам хватит и этой леммы.

Лемма 4.3. *Пусть* $1 \leqslant l \leqslant 4$, *а* $\beta_l, \gamma_l \in \Phi$ *и корневой элемент* t_l *– как в предыдущей лемме. Предположим, что* i *и* j *– произвольные веса. Тогда если* $(t_l)_{ij} \neq 0$, *то либо* $i = j$, *либо разность* $j-i$ *равна* $\pm\beta_l$, $\pm\gamma_l$ *или* $\pm\delta$.

Доказательство. Утверждение леммы легко проверяется непосредственным вычислением.

Замечание. Лемму также можно доказать из общих соображений, заметив что корни β_l, γ_l и δ принадлежат системе корней типа A_2.

Лемма 4.4. *Пусть $1 \leqslant l \leqslant 4$, а $\beta_l, \gamma_l \in \Phi$ и корневой элемент t_l – как в лемме 4.2. Предположим, что i и j – произвольные веса. Тогда если $(A'_l t_l)_{ij} \neq 0$, то либо $i = j$, либо разность $j - i$ равна $\pm\beta_l$, $\pm\gamma_l$ или $\pm\delta$.*

Доказательство. Напомним, что матрицам $A'_l \in L'$ соответствуют матрицы $A_l \in L$, равные, соответственно, $A'_l J^{-1}$. При этом все подматрицы $A_l|_{V_1} = \overline{A'_l}$ – диагональные. Из этого, по [л. 2.2, 16], получаем, что матрицы A_l также диагональные. Таким образом, умножение справа матрицы t_l на A'_l переставляет местами первые и последние шестерки строк, а потом умножает строки на какие-то обратимые элементы поля K. Из этого легко следует доказательство леммы, если учесть, что $\beta_l + \gamma_l = -\delta$.

Лемма 4.5. *Пусть $1 \leqslant l \leqslant 4$. Тогда $A'_l t_l = v'_l A'_{l+1} w'_l$, где v'_l и w'_l имеют вид $x_{\beta_l}(\cdot) x_{\gamma_l}(\cdot) x_{-\delta}(\cdot) \in U_2^-$.*

Доказательство. Поскольку $\overline{A'_l t_l} \neq 0$, то матрицу $A'_l t_l$ можно представить в виде $v'_l B'_l w'_l$, где $B'_l \in L'$, а $v'_l, w'_l \in U_2^-$. При этом, как уже замечалось, $h_{l+1} = v_l A'_l t_l w_l$, где $v_l, w_l \in U_2^-$. Поэтому $h_{l+1} = v_l v'_l B'_l w'_l w_l$, где $B'_l \in L'$ и $v_l v'_l, w'_l w_l \in U_2^-$. По определению $h_{l+1} = v_{l+1} A'_{l+1} w_{l+1}$, где $A_{l+1} \in L'$ и $v_{l+1}, w_{l+1} \in U_2^-$, откуда $B'_l = A_{l+1}$ и $v_{l+1} = v_l v'_l$, а $w_{l+1} = w'_l w_l$.

Осталось доказать, что v'_l и w'_l имеют вид $x_{\beta_l}(\cdot) x_{\gamma_l}(\cdot) x_{-\delta}(\cdot) \in U_2^-$. Несложно видеть, что v'_l — это такой унипотент, что подпространство, порожденное первыми шестью столбцами v'_l, совпадает с подпространством, порожденным последними шестью столбцами матрицы $A'_l t_l$, а w'_l — это такой унипотент, что подпространство, порожденное последними шестью строками w'_l, совпадает с подпространством, порожденным первыми шестью строками $A'_l t_l$ (также это было показано в доказательстве [т. 3, 16]). Поскольку подматрица $\overline{A'_l t_l}$ диагональна, то первые шесть столбцов v'_l отличаются от последних шести столбцов матрицы $A'_l t_l$ лишь множителями; аналогично и последние шесть строк w'_l отличаются от первых шести строк матрицы $A'_l t_l$ лишь множителями. Поэтому если $(v'_l)_{ij} \neq 0$ при $j \in \mathrm{B}$, то либо $i = j$, либо $i - j = \beta_l, \gamma_l$ или $-\delta$. Из этого, по [л. 2.3, 16], следует, что v'_l имеет вид $x_{\beta_l}(\cdot) x_{\gamma_l}(\cdot) x_{-\delta}(\cdot) \in U_2^-$. Аналогично, если $(w'_l)_{ij} \neq 0$ при $i \in \Delta$, то либо $i = j$, либо $i - j = \beta_l, \gamma_l$ или $-\delta$. Из этого, по [л. 2.3, 16], следует, что w'_l также имеет вид $x_{\beta_l}(\cdot) x_{\gamma_l}(\cdot) x_{-\delta}(\cdot) \in U_2^-$, что и требовалось.

Как отмечалось в этом доказательстве, $v_{l+1} = v_l v'_l$ и $w_{l+1} = w'_l w_l$.

Поскольку $h_1 = g_0 = x_\delta(1)$, то $v_1 = w_1 = x_{-\delta}(1)$. Поэтому $v = v_5$ и $w = w_5$ можно представить в виде произведения $x_{-\delta}(\cdot)$, $x_{\beta_l}(\cdot)$ и $x_{\gamma_l}(\cdot)$, где $1 \leqslant l \leqslant 4$. Заметим, что все сомножители этого произведения коммутируют друг с другом, кроме $x_{\beta_l}(\cdot)$ и $x_{\gamma_l}(\cdot)$ при одном и том же l – их коммутатор равен $x_{-\delta}(\cdot)$. Таким образом, унипотенты v и w есть произведения корневых элементов вида $x_{-\delta}(\cdot)\cdot \prod\limits_{l=1}^{4} x_{\beta_l}(\cdot)\cdot \prod\limits_{l=1}^{4} x_{\gamma_l}(\cdot)$. Это завершает выполнение пункта (4) и первой половины пункта (5); такого вида v и w нам вполне достаточно. По [т. 3, 16], $\tilde{v} = x_{-\delta}(k)$, а $\tilde{w} = E_{27}$ – единичная матрица. Коэффициент k нам также не важен – хватает того, что $\tilde{v} = x_{-\delta}(\cdot)$. Это завершает выполнение пункта (5).

Перейдем к пункту (6). При его выполнении матрицы g и h могут остаться прежними, а могут и измениться – матрица g умножится на $\xi = \sqrt[3]{1}$, а h сопряжется диагональной матрицей f. Посмотрим, как при таких преобразованиях меняются $v, w, \tilde{v}$ и $\tilde{w}$. Унипотенты $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ не меняются (на ξ умножалась матрица B'); v и w сопрягаются f. Несложно видеть, что при сопряжении диагональной матрицей f все корневые подгруппы переходят в себя, поэтому после сопряжения матрицы v и w по-прежнему будут иметь вид $x_{-\delta}(\cdot)\cdot \prod\limits_{l=1}^{4} x_{\beta_l}(\cdot)\cdot \prod\limits_{l=1}^{4} x_{\gamma_l}(\cdot)$. Это позволяет нам выполнить пункт (6).

По определению, $u = \tilde{v}v^{-1}w^{-1}\tilde{w} = x_{-\delta}(\cdot)\cdot \prod\limits_{l=1}^{4} x_{\beta_l}(\cdot)\cdot \prod\limits_{l=1}^{4} x_{\gamma_l}(\cdot)$. Для выполнения пункта (7) достаточно доказать, что такой унипотент всегда есть произведение двух корневых элементов. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что $x_{-\delta}(\cdot)\cdot \prod\limits_{l=1}^{4} x_{\beta_l}(\cdot)$ и $\prod\limits_{l=1}^{4} x_{\gamma_l}(\cdot)$ есть корневые элементы. Это можно проверить непосредственно, но мы воспользуемся геометрическими соображениями из [§4, 15].

Лемма 4.6. *Произведение двух корневых элементов, угол между которыми равен $\pi/3$, также является корневым элементом.*

Доказательство. По [пр. 1, 15] эту лемму достаточно доказать для элементарных корневых элементов. Для них утверждение леммы сразу следует из коммутационной формулы Шевалле.

Замечание. 1. Для элементарных корневых элементов утверждение леммы легко можно проверить и непосредственно.

2. Отметим, что эта лемма доказывалась в [т. 2, 16].

Лемма 4.7. *Пусть g_1, g_2 и g_3 – три корневых элемента. Предположим, что $\angle(g_1, g_2) = \angle(g_1, g_3) = \angle(g_2, g_3) = \pi/3$. Тогда $\angle(g_1 g_2, g_3) \leqslant \pi/3$.*

Доказательство. По предыдущей лемме $g_1 g_2$ является корневым элементом, поэтому угол между $g_1 g_2$ и g_3 определен. По [пр. 1, 15] можно считать, что $g_3 = x_\delta(\cdot)$. Тогда из доказательства [л. 4.4, 15] следует, что $g_1, g_2 \in U_2$. Поэтому $g_1 g_2 \in U_2$, откуда, снова по доказательству [л. 4.4, 15], следует, что $\angle(g_1 g_2, g_3) = \pi/3$.

Предложение 1. *Пусть $g_1, \dots, g_k$ – несколько корневых элементов. Предположим, что $\angle(g_i, g_j) \leqslant \pi/3$ для любых $1 \leqslant i, j \leqslant k$. Тогда $g_1 g_2 \dots g_k$ есть либо единичная матрица, либо корневой элемент.*

Доказательство. Сразу следует из двух предыдущих лемм.

Из этого предложения, очевидно, сразу следует то, что $x_{-\delta}(\cdot) \cdot \prod_{l=1}^{4} x_{\beta_l}(\cdot)$ и $\prod_{l=1}^{4} x_{\gamma_l}(\cdot)$ есть корневые элементы, поскольку корни $-\delta$ и β_l при $1 \leqslant l \leqslant 4$ близки между собой, равно как и корни γ_l при $1 \leqslant l \leqslant 4$. Это позволяет нам выполнить пункт (7). Наконец, из пункта (8) следует, что матрица вида (5) есть произведение не более чем семи корневых элементов, что и требовалось.

Литература

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — В кн.: Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., 1973., с. 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы IV–VI, Мир, М., 1972.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Главы VII–VIII, Мир, М., 1978.
4. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант?.* — Алгебра и анализ **19**, №4 (2007), 34–68.
5. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и анализ **16**, №4 (2004), 54–87.
6. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
7. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6. — Алгебра и анализ **19**, №5 (2007), 35–62.
8. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
9. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
10. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М., 1988.

11. А. Ю. Лузгарев, *О надгруппах* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)$ *и* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ *в минимальных представлениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
12. А. Ю. Лузгарев, *Описание надгрупп* F_4 *в* E_6 *над коммутативным кольцом.* — Алгебра и анализ **20**, №6 (2008), 148–185.
13. О. О'Мира, *Лекции о линейных группах.* — В кн.: Автоморфизмы классических групп, Мир, М., 1976, с. 57–167.
14. О. О'Мира, *Лекции о симплектических группах*, Мир, М., 1979.
15. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ (2011).
16. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов*, I. — Алгебра и анализ (2011).
17. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы.* — В кн.: Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, М., 1989, с. 5–136.
18. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.
19. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.
20. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.
21. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6, I. — Invent. Math. **89**, №1 (1987), 159–195.
22. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6, II. — J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293.
23. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6, III. — Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 45–84.
24. M. Aschbacher, *The* 27*-dimensional module for* E_6, IV. — J. Algebra **131** (1990), 23–39.
25. M. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups.* — Geom. Dedicata **25**, no. 1–3 (1988), 417–465.
26. M. Aschbacher, *The geometry of trilinear forms.* — Finite Geometries, Buildings and Related topics, Oxford Univ. Press, Oxford, (1990), pp. 75–84.
27. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Wiley, London, 1989.
28. C. Chevalley, R. D. Schafer, *The exceptional simple Lie algebras* F_4 *and* E_6. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 137–141.
29. A. M. Cohen, M. W. Liebeck, J. Saxl, G. M. Seitz, *The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic.* — Proc. London Math. Soc. **3-64**, no. 1 (1992), 21–48.
30. D. I. Deriziotis, A. P. Fakiolas, *The maximal tori in the finite Chevalley groups of type* E_6, E_7 *and* E_8. — Communications in Algebra **19**, no. 3 (1991), 889–903.
31. J. Dieudonné, *Sur les générateurs des groupes classiques.* — Summa Brasil. Math. **3** (1955), 149–179.
32. D. Ž. Djoković, J. G. Malzan, *Products of reflections in the general linear group over a division ring.* — Linear Algebra Appl. **28** (1979), 53–62.
33. D. Ž. Djoković, J. G. Malzan, *Products of reflections in* $\mathrm{U}(p, q)$, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1982).
34. R. H. Dye, *Scherk's theorem on orthogonalities revisited.* — Geom. Dedicata **20**, №3 (1986), 349–356.

35. E. W. Ellers, *Decomposition of orthogonal, symplectic, and unitary isometries into simple isometries.* — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **46** (1977), 97–127.
36. E. W. Ellers, R. Frank, *Products of quasireflections and transvections over local rings.* — J. Geom. **31**, №1–2 (1988), 69–78.
37. E. W. Ellers, H. Ishibashi, *Factorization of transformations over a local ring.* — Linear Algebra Appl. **85** (1987), 12–27.
38. E. W. Ellers, H. Lausch, *Length theorems for the general linear group of a module over a local ring.* — J. Austral. Math. Soc. Ser. A **46** no. 1, (1989), 122–131.
39. E. W. Ellers, H. Lausch, *Generators for classical groups of modules over local rings.* — J. Geom. **39**, nos. 1–2 (1990), 60–79.
40. P. Gilkey, G. M. Seitz, *Some representations of exceptional Lie algebras.* — Geom. Dedicata **25**, no. 1–3 (1988), 407–416.
41. M. Götzky, *Unverkürzbare Produkte und Relationen in unitären Gruppen.* — Math. Z. **104** (1968), 1–15.
42. M. Götzky, *Über die Erzeugenden der engeren unitären Gruppen.* — Arch. Math. **19** (1968), 383–389.
43. H. Ishibashi, *Generators of orthogonal groups over a local valuation domain.* — J. Algebra **55**, no. 2 (1978), 302–307.
44. H. Ishibashi, *Generators of* $\mathrm{Sp}_n(V)$ *over a quasisemilocal semihereditary ring.* — J. Pure Appl. Algebra **22**, no. 2 (1981), 121–129.
45. H. Ishibashi, *Generators of orthogonal groups over valuation rings.* — Canad. J. Math. **33**, no. 1 (1981), 116–128.
46. G. Malle, J. Saxl, T. S. Weigel, *Generation of classical groups.* — Geom. Dedicata **49**, no. 1 (1994), 85–116.
47. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. École Norm. Sup., 4ème sér. **2**, no. 1 (1969), 1–62.
48. Ch. Parker, G. E. Röhrle, *Miniscule Representations*, Preprint Universität Bielefeld no. 72 (1993), 1–12.
49. E. B. Plotkin, A. A. Semenov, N. A. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas.* — Int. J. Algebra and Computations **8**, no. 1 (1998), 61–97.
50. U. Spengler, H. Wolff, *Die Länge einer symplektischen Abbildung.* — J. reine angew. Math. **274–275** (1975), 150–157.
51. T. A. Springer, *Linear algebraic groups.* Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1998.
52. C. Stanley-Albarda, *A comparison of length definitions for maps of modules over local rings.* — J. Geom. **53**, no. 1–2 (1995), 191–200.
53. J. Tits, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples.* — Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci. (1966), no. 31, 21–58.
54. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990), World Sci. Publ., London et al., 1991, pp. 219–335.
55. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **204** (2000), 1–45.
56. N. A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type* E_l. — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 60–104.
57. N. A. Vavilov, *An* A_3*-proof of structure theorems for Chevalley groups of types* E_6 *and* E_7. — Int. J. Algebra and Computations **17**, no. 5–6 (2007), 1283–1298.

58. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45** (1996), 73–115.
59. L. G. Zhou, *Scherk's theorem of orthogonal groups over a local ring* I. *Expressing orthogonal transformations as the product of symmetries and a semi-symmetry.* — Dongbei Shida Xuebao **2** (1985), 17–24.

Pevzner I. M. Width of groups of type E_6 with respect to root elements. II.

We consider simply-connected and adjoint groups of type E_6 over fields. Let K be a field such that every polynomial of degree at most 6 has a root in K. We prove that every element of an adjoint group of type E_6 over K can be written as a product of at most seven root elements.

Российский государственный
педагогический университет
им. А. И. Герцена,
С.-Петербург, наб. реки Мойки, д. 48
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 29 ноября 2010 г.