Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 386, 2011 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, II. ЛОКАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

1. Введение

В последние годы возрос интерес к изучению алгебры когомологий Хохшильда, и особенно заметный прогресс отмечен в решении этой задачи для конечномерных алгебр над полями. В [1] было получено описание алгебры когомологий Хохшильда для симметрической группы S_3 над полем $\mathbb{F}_3$, а также для знакопеременной группы A_4 и для диэдральных 2-групп над полем $\mathbb{F}_2$. В [2] алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для случая, когда R – полуцепная QF-алгебра. В [3] алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ описана для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. В этой работе, в отличие от [1], применяется прямой метод построения бимодульной резольвенты для соответствующих алгебр с последующим использованием её при вычислении групп когомологий Хохшильда, а также умножения в алгебре когомологий. Напомним, что алгебры диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работах К. Эрдман при классификации групповых блоков, имеющих ручной тип представления (см. [4]).

В последующем подход из [3] был применен к некоторым сериям алгебр кватернионного типа [5–7], диэдрального типа [8, 9] и полудиэдрального типа [10]. Кроме того, подход из [3] был использован для вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр Лю–Шульца (см. [11]) и для целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[D_{4m}]$ “чётных” диэдральных групп (т.е. порядка $4m$) [12] (см. также [13]).

Имеются также частичные результаты, относящиеся к описанию алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, полученные для так называемой алгебры Мёбиуса [14–16], для некоторых семейств самоинъективных алгебр конечного типа представления, имеющих древесный тип D_n [17, 18], для семей-

---

Ключевые слова: алгебры полудиэдрального типа, когомологии Хохшильда.
Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00635.

ства алгебр кватернионного типа с двумя простыми модулями в характеристике отличной от 2 [19], а также для групповых блоков ручного типа представления, имеющих один или три простых модуля (см. [20]).

Настоящая работа является продолжением статьи [10], в которой алгебра когомологий Хохшильда была описана для одной из серий локальных алгебр полудиэдрального типа над алгебраически замкнутым полем K характеристики два. А именно, с помощью бимодульной резольвенты, построенной в [10], мы описываем алгебру $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр рассматриваемой серии в случае, когда основное поле K имеет характеристику, отличную от двух.

1. Формулировка основного результата

Пусть K – алгебраически замкнутое поле произвольной характеристики $p := \mathrm{char}\, K$, R – конечномерная K-алгебра, $\Lambda = R^{\mathrm{e}} = R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – её обёртывающая алгебра, $\mathrm{HH}^n(R) = \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ – n-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R (с коэффициентами в R-бимодуле R). *Алгебра когомологий Хохшильда* – это линейное пространство

$$\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{HH}^n(R) = \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R),$$

снабжённое $\smile$-произведением. Алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ является градуированно коммутативной [21]; кроме того, $\smile$-произведение на $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с произведением Йонеды на Ext-алгебре $\bigoplus\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(R, R)$ Λ-модуля R [22, стр. 120].

Для $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, определим K-алгебру $R_k = K\langle X, Y\rangle/I$, где I – идеал свободной алгебры $K\langle X, Y\rangle$, порождённый элементами

$$X^2 - Y(XY)^{k-1},\ Y^2,\ (XY)^k - (YX)^k,\ X(YX)^k.$$

Образы элементов X, Y относительно канонического гомоморфизма из $K\langle X, Y\rangle$ в R_k обозначаем через x и y соответственно. Алгебра R_k – симметрическая локальная алгебра, имеющая ручной тип представления [4, III.1.2]; кроме того, в терминах [4, Chap. VIII] алгебра R_k – это алгебра полудиэдрального типа.

Далее до конца этого раздела мы предполагаем, что $p \neq 2$ (напомним, что в случае $p = 2$ алгебра $\mathrm{HH}^*(R_k)$ описана в [10]).

Для описания алгебры когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R_k)$ для алгебр R_k ($k \geqslant 2$) мы построим некоторые градуированные алгебры. Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \{p_1, p_2, p_3, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, t\}. \tag{1.1}$$

На алгебре $K\langle\mathcal{X}_1\rangle$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{aligned}&\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = 0, \quad \deg u_1 = \deg u_2 = 1,\\ &\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2, \quad \deg w_1 = \deg w_2 = 3, \quad \deg t = 4.\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1 = K\langle\mathcal{X}_1\rangle/I_1$, где идеал I_1 порождён следующими элементами:

— степени 0:

$$\left.\begin{aligned}&p_1^{k+1},\ p_2^2,\ p_3^2,\\ p_ip_j\quad &\text{для}\quad 1 \leqslant i < j \leqslant 3;\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

— степени 1:

$$p_1u_1,\ p_2u_2,\ p_3u_2,\ p_1^{k-1}u_2; \tag{1.4}$$

— степени 2:

$$\left.\begin{gathered}p_1v_1,\ p_3v_1,\ p_1v_2,\ p_2v_2,\\ p_2v_3,\ p_3v_3,\end{gathered}\right\} \tag{1.5}$$

$$p_1^{k-1}v_3,\ p_3v_2; \tag{1.6}$$

$$u_1u_2; \tag{1.7}$$

— степени 3:

$$p_1w_1,\ p_3w_1, \tag{1.8}$$

$$p_1^{k-1}w_2,\ p_2w_2,\ p_3w_2, \tag{1.9}$$

$$u_1v_3,\ u_2v_1,\ u_2v_2, \tag{1.10}$$

$$u_2v_3 + p_1w_2,\ p_2u_1v_1 - p_2w_1; \tag{1.11}$$

— степени 4:

$$p_1^kt, \tag{1.12}$$

$$p_2t,\ v_2^2 - 2p_3t,\ v_3^2 + p_1^2t, \tag{1.13}$$

$$v_1v_2,\ v_1v_3,\ v_2v_3, \tag{1.14}$$

$$u_2w_1, u_1w_2,\ u_2w_2,\ p_2u_1w_1; \tag{1.15}$$

— степени 5:

$$v_2w_1,\ v_3w_1, \tag{1.16}$$

$$v_1w_2,\ v_2w_2, \tag{1.17}$$

$$v_3w_2 - p_1u_2t; \tag{1.18}$$

— степени 6:

$$w_1w_2, \tag{1.19}$$

а также элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_1. \tag{1.20}$$

В силу однородности идеала I_1 алгебра $\mathcal{A}_1$ наследует градуировку с алгебры $K\langle \mathcal{X}_1 \rangle$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2 = \{p_1, p_2, p_3, u_1'', u_4, v_1, v_2, v_3, w_1, \widetilde{w}_2, t\}. \tag{1.21}$$

На алгебре $K\langle \mathcal{X}_2 \rangle$ вводится градуировка так, что

$$\left.\begin{array}{l} \deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = 0, \quad \deg u_1'' = \deg u_4 = 1, \\ \deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2, \quad \deg w_1 = \deg \widetilde{w}_2 = 3, \ \deg t = 4. \end{array}\right\} \tag{1.22}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2 = K\langle \mathcal{X}_2 \rangle / I_2$, где идеал I_2 порождён образующими вида (1.3), (1.5), (1.8), (1.13), (1.14), а также элементами:

$$\begin{gathered} p_1^k u_1'',\ p_3 u_1'',\ p_2 u_4,\ p_1 u_1'' - p_1 u_4; \\ p_1^{k-1} v_3 - p_3 v_2,\ u_1'' u_4; \\ p_1^k \widetilde{w}_2,\ p_2 \widetilde{w}_2,\ p_3 \widetilde{w}_2,\ u_1'' v_2,\ u_4 v_1, \\ u_1'' v_3 + p_1 \widetilde{w}_2,\ u_4 v_3 + p_1 \widetilde{w}_2,\ p_2 u_1'' v_1 - p_2 w_1; \\ u_1'' \widetilde{w}_2,\ u_4 w_1,\ u_4 \widetilde{w}_2; \\ v_1 \widetilde{w}_2,\ v_2 w_1,\ v_2 \widetilde{w}_2,\ v_3 w_1, \\ v_3 \widetilde{w}_2 - p_1 u_1'' t; \\ w_1 \widetilde{w}_2; \end{gathered}$$

и элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_2.$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_2$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K\langle \mathcal{X}_2 \rangle$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3 = \{p_1, p_2, p_3, u_1', v_1, v_2, v_3, w_1, t\}. \tag{1.23}$$

На алгебре $K\langle \mathcal{X}_3 \rangle$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{array}{l} \deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = 0, \quad \deg u_1' = 1, \\ \deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2, \quad \deg\ w_1 = 3,\ \deg t = 4. \end{array}\right\} \tag{1.24}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3 = K\langle \mathcal{X}_3 \rangle / I_3$, где идеал I_3 порождён элементами вида (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), (1.12), (1.13), (1.14), (1.16), а также элементами:

$$p_1^k u_1', \quad p_2 u_1' v_1 - (k-3) p_2 w_1, \quad p_2 u_1' w_1$$

и элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_3.$$

На алгебре $\mathcal{A}_3$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K\langle \mathcal{X}_3 \rangle$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3' = \{p_1, p_2, p_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, w_1, t\}. \tag{1.25}$$

На алгебре $K\langle \mathcal{X}_3' \rangle$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{array}{l} \deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = 0, \quad \deg u_4 = \deg u_5 = 1, \\ \deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2, \quad \deg\ w_1 = 3, \deg t = 4. \end{array}\right\} \tag{1.26}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3' = K\langle \mathcal{X}_3' \rangle / I_3'$, где идеал I_3' порождён элементами вида (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), (1.12), (1.13), (1.14), (1.16), а также элементами:

$$\begin{gathered} p_1^k u_4,\ p_2 u_4, \\ p_i u_5 \ \text{для}\ i = 1, 2, 3; \\ u_4 u_5; \ \ u_5 v_2,\ u_5 v_3,\ u_5 v_1 - p_2 w_1; \\ u_5 w_1; \ \ u_5 t; \end{gathered}$$

и элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_3'.$$

На алгебре $\mathcal{A}_3'$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K\langle \mathcal{X}_3' \rangle$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3'' = \{p_1, p_2, p_3, u_1', v_1, v_2, v_3, w_4, t\}. \tag{1.27}$$

На алгебре $K\langle \mathcal{X}_3'' \rangle$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{array}{ll} \deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = 0, & \deg u_1' = 1, \\ \deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2, & \deg\ w_4 = 3, \deg t = 4. \end{array}\right\} \tag{1.28}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3'' = K\langle \mathcal{X}_3'' \rangle / I_3''$, где идеал I_3'' порождён элементами вида (1.3), (1.5), (1.6), (1.12), (1.13), (1.14), а также элементами:

$$\begin{gathered} p_1^k u_1'; \\ p_i w_4 \ \text{для}\ i = 1, 2, 3; \\ v_2 w_4,\ v_3 w_4; \end{gathered}$$

и элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_3''.$$

На алгебре $\mathcal{A}_3''$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K\langle \mathcal{X}_3'' \rangle$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_4 = \{p_1, p_2, p_3, u_1'', u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, \widetilde{w}_2, w_3, t\}. \tag{1.29}$$

На алгебре $K\langle \mathcal{X}_4 \rangle$ введём градуировку так, что

$$\left.\begin{array}{ll} \deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = 0, & \deg u_1'' = \deg u_3 = 1, \\ \deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2, & \deg w_1 = \deg \widetilde{w}_2 = \deg w_3 = 3, \\ & \deg t = 4. \end{array}\right\} \tag{1.30}$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_4 = K\langle\mathcal{X}_4\rangle/I_4$, где идеал I_4 порождён элементами вида (1.3), (1.5), (1.6), (1.8), (1.13), (1.14), (1.16), а также элементами:

$$
\begin{gathered}
p_1^k u_1'',\, p_3 u_1'',\, p_i u_3 \text{ для } i = 1,2,3;\\
u_1'' u_3;\\
p_1^k \widetilde{w}_2,\ p_2\widetilde{w}_2,\, p_3\widetilde{w}_2,\\
p_i w_3 \text{ для } i = 1,2,3;\\
p_2 w_1 - p_2 u_1'' v_1,\, u_1'' v_3 + p_1\widetilde{w}_2,\ u_1'' v_2,\\
u_3 v_i \text{ для } i = 1,2,3;\\
u_1''\widetilde{w}_2,\, u_1'' w_3,\, u_3 w_1,\, u_3\widetilde{w}_2,\, u_3 w_3;\\
v_1 w_3,\, v_3 w_3;\\
v_2 w_3 + 2u_3 t,\ v_i\widetilde{w}_2 \text{ для } i = 1,2,3;\\
w_1\widetilde{w}_2,\, w_1 w_3,\ \widetilde{w}_2 w_3;
\end{gathered}
$$

и элементами вида

$$ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba \quad \text{для всех} \quad a, b \in \mathcal{X}_4.$$

Наконец, на алгебре $\mathcal{A}_4$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K\langle\mathcal{X}_4\rangle$.

Теорема 1.1. *Пусть $R = R_k$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.*

(1) *Если $p = 3$ и 3 не делит k, то алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре $\mathcal{A}_1$.*

(2) *Если $p = 3$ и 3 делит k, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ как градуированные K-алгебры.*

(3) *Предположим, что $p \notin \{2,3\}$, и p не делит k.*

   (3a) *Если, кроме того, p не делит $(k-3)(4k-3)$, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3$ как градуированные K-алгебры.*

   (3b) *Если, кроме того, p делит $k-3$, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3'$ как градуированные K-алгебры.*

   (3c) *Если, кроме того, p делит $4k-3$, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3''$ как градуированные K-алгебры.*

(4) *Если $p \notin \{2,3\}$ и p делит k, то $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_4$ как градуированные K-алгебры.*

Замечание 1.2. Из описания алгебр $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_4$ легко следует, что алгебра $\mathrm{HH}^*(R_k)$ (при $p \neq 2$) всегда не коммутативна; действительно, во всех случаях можно указать образующую степени 1 и образующую степени 3, произведение которых не равно нулю (см. замечание 3.10).

В процессе доказательства теоремы 1.1 мы вычисляем также размерности групп $\mathrm{HH}^n(R_k)$. Соответствующие результаты представляют самостоятельный интерес, и мы их объединим в следующем утверждении.

Следствие 1.3. (1) *Если $p \neq 2$ и $p \nmid k$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R_k) = \begin{cases} k+3, & \text{если } n = 0, \\ k+3+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3(\mod 4), \\ k+2+2\left[\frac{n}{4}\right] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если $p = 3$ и $3 \mid k$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R_k) = \begin{cases} k+4+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3(\mod 4), \\ k+3+2\left[\frac{n}{4}\right] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если $p \notin \{2,3\}$ и $p \mid k$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R_k) = \begin{cases} k+3+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 0(\mod 4), \\ k+4+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3(\mod 4), \\ k+2+2\left[\frac{n}{4}\right] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

2. Группы когомологий

Пусть $R = R_k$ – K-алгебра, определённая в разделе 1, при этом, если не оговорено иное, предполагается, что характеристика поля K отлична от 2. Алгебра R допускает в качестве K-базиса множество

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_R = \{(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{(yx)^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \\ \cup \{x(yx)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{y(xy)^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\}, \end{aligned}$$

состоящее из всех ненулевых путей колчана алгебры R (он состоит из одной вершины и двух петель x и y). В свою очередь обёртывающая алгебра Λ алгебры R допускает K-базис, состоящий из элементов вида

$$u \otimes v, \quad \text{где} \quad u, v \in \mathcal{B}_R.$$

Умножение справа на элемент $\lambda \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм λ^* левого Λ-модуля Λ; в дальнейшем ради простоты мы будем часто этот эндоморфизм обозначать также через λ.

Рассмотрим следующие элементы алгебры $\Lambda = R^{\mathrm{e}}$:

$$Y^- = y \otimes 1 - 1 \otimes y, \;\; Y^+ = y \otimes 1 + 1 \otimes y, \tag{2.1}$$
$$X^- = x \otimes 1 - 1 \otimes x, \tag{2.2}$$
$$\varphi_1 = \sum_{i=0}^{k-1} (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}, \tag{2.3}$$
$$\varphi_2 = -x \otimes 1 - 1 \otimes x + \sum_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i}, \tag{2.4}$$
$$\rho^- = x(yx)^{k-1} \otimes 1 - 1 \otimes x(yx)^{k-1}, \tag{2.5}$$
$$\rho^+ = x(yx)^{k-1} \otimes 1 + 1 \otimes x(yx)^{k-1}, \tag{2.6}$$
$$\psi = (yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1}, \tag{2.7}$$
$$\tau = Y^+ \cdot X^-, \quad \sigma = X^+ \cdot \varphi_1. \tag{2.8}$$

Кроме того, определим следующие гомоморфизмы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : \Lambda \to \Lambda^2, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \rho^+ & \psi \end{pmatrix} : \Lambda^2 \to \Lambda,$$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} Y^+ \\ 0 \end{pmatrix} : \Lambda \to \Lambda^2.$$

В категории (левых) Λ-модулей построим следующий бикомплекс $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (ненулевые строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \cdots \arrow[d, "\sigma"'] & \cdots \arrow[d, "\Psi"'] & \\
 & & & \Lambda \arrow[d, "\Phi"'] & \Lambda \arrow[l, "-\tau"'] \arrow[d, "\rho^-"'] & \Lambda \arrow[l, "-Y^-"'] \arrow[d, "\rho^-"'] & \cdots \arrow[l, "-Y^+"'] \\
 & & \Lambda \arrow[d, "\sigma"'] & \Lambda^2 \arrow[l, "{(Y^-,X^-)}"'] \arrow[d, "\Psi"'] & \Lambda \arrow[l, "\Upsilon"'] \arrow[d, "\rho^+"'] & \Lambda \arrow[l, "Y^-"'] \arrow[d, "\rho^+"'] & \cdots \arrow[l, "-Y^+"'] \\
 & \Lambda \arrow[d, "\Phi"] & \Lambda \arrow[l, "-\tau"'] \arrow[d, "\rho^-"'] & \Lambda \arrow[l, "-Y^-"'] \arrow[d, "\rho^-"'] & \Lambda \arrow[l, "-Y^+"'] \arrow[d, "\rho^-"'] & \Lambda \arrow[l, "-Y^-"'] \arrow[d, "\rho^-"'] & \cdots \arrow[l, "-Y^+"'] \\
\Lambda & \Lambda^2 \arrow[l, "{(Y^-,X^-)}"'] & \Lambda \arrow[l, "\Upsilon"'] & \Lambda \arrow[l, "Y^-"'] & \Lambda \arrow[l, "Y^+"'] & \Lambda \arrow[l, "Y^-"'] & \cdots . \arrow[l, "Y^+"']
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Следующее утверждение доказано в [10].

Предложение 2.1. *Пусть $R = R_k$, и пусть* char K *произвольна. Тотализация $Q_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{B}_{\bullet\bullet})$ бикомплекса (2.9) вместе с пополняющим отображением $\mu{:}\, Q_0 = \Lambda \to R$, индуцированным умножением в R (т.е. $\mu(r \otimes s) = rs$), представляет собой минимальную проективную резольвенту Λ-модуля R.*

Замечание 2.2. Пусть $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} R$ – минимальная Λ-проективная(=Λ-свободная) резольвента алгебры R, описанная в предложении 2.1. В дальнейшем мы всегда будем использовать упорядочение прямых слагаемых в разложении n-го члена этой резольвенты $Q_n = \bigoplus\limits_{i+j=m} B_{ij}$ по возрастанию второго индекса j. Соответствующее разложение модуля Q_n будем называть стандартным.

Замечание 2.3. Пусть l_n обозначает ранг свободного Λ-модуля Q_n (вновь Q_n – это n-й член резольвенты из предложения 2.1). Тогда рассматривая строение бикомплекса (2.9), получаем:

$$l_n = \begin{cases} 1 + 2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } \ n \equiv 0(\mod 4), \\ 2 + 2\left[\frac{n}{4}\right] & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Рассмотрим бикомплекс $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых строк бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ с номерами 0 и 1 (а остальные строки в $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_\bullet = \mathrm{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$. Следующее утверждение также получено в [10].

Предложение 2.4. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0,$$

в которой $i_n\colon X_n \to Q_n$ *– вложение в качестве прямого слагаемого, а* $\pi_n\colon Q_n \to Q_{n-4}$ *– проекция на соответствующее прямое слагаемое* ($n \geqslant 4$).

Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры $R = R_k$ мы используем комплекс

$$\Big(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\ \Big)_{n\geqslant 0}. \tag{2.11}$$

Так как для любого $n \geqslant 0$ модуль Q_n свободный, то любой элемент f из $\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ отождествляется с набором его значений $f(e^{(i)}) \in R$ на элементах канонического базиса модуля Q_n (т.е. i-я координата в $e^{(i)}$ равна $1 \otimes 1$, а остальные равны нулю). В дальнейшем, когда в таком наборе значений f встречается подпоследовательность, состоящая из нулей, скажем, из r штук, то мы такую подпоследовательность обозначаем через O_r. Аналогично нулевую $r \times s$-матрицу обозначаем через $\mathrm{O}_{r,s}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Отметим, что если $f = w^*\colon \Lambda \to \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то в соответствии с указанным выше отождествлением индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$\widetilde{w}\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(f, R)\colon \operatorname{Hom}(\Lambda, R) \simeq R \to \operatorname{Hom}(\Lambda, R) \simeq R$$

действует следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ-модульной структуре на R).

Поэтому дифференциал

$$\delta^0\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_0, R) \simeq R \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_1, R) \simeq R^2$$

может быть описан следующим образом: для $r \in R$

$$\delta^0(r) = (Y^- * r, X^- * r) = (yr - ry, xr - rx).$$

Следующее утверждение фактически доказано в [10, предложение 3.1], поскольку в соответствующем доказательстве не используются ограничения на $\operatorname{char} K$.

Предложение 2.5. (1) *Пространство* $\mathrm{HH}^0(R)$ *допускает в качестве* K*-базиса следующее множество*

$$\{(xy)^i+(yx)^i \mid 1\leqslant i\leqslant k-1\}\cup\{1,\ x(yx)^{k-1},\ y(xy)^{k-1},\ (xy)^k\}. \quad (2.12)$$

(2) *Пространство* $\mathrm{Im}\ \delta^0$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*

$$\begin{aligned} &((xy)^i+(yx)^i,0) \quad \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ &(0,(xy)^i+(yx)^i) \quad \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1,\\ &(y(xy)^i,x(yx)^i) \quad \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1. \end{aligned}$$

В частности, $\dim_K \mathrm{HH}^0(R)=k+3$, $\dim_K \mathrm{Im}\ \delta^0(R)=3k-3$.

Замечание 2.6. В дальнейшем для некоторых элементов из (2.12) будем использовать следующие сокращённые обозначения:

$$p_1:=xy+yx,\quad p_2:=x(yx)^{k-1},\quad p_3:=y(xy)^{k-1}. \quad (2.13)$$

Отметим, что $p_1^i=(xy)^i+(yx)^i$ $(1\leqslant i\leqslant k-1)$, $p_1^k=2(xy)^k$.

Прежде чем продолжить вычисление групп когомологий, отметим следующее вспомогательное утверждение, доказываемое прямыми вычислениями.

Лемма 2.7. *Для элемента* $\chi\in\Lambda$ *рассмотрим отображение*

$$\widetilde{\chi}\colon R\to R,\quad \chi(r)=\chi*r.$$

Если $\chi\in\{\rho^-,\psi\}$ *(см. обозначения в* (2.5), (2.7)*), то* $\widetilde{\chi}$ *– нулевое отображение.*

Дифференциал $\delta^1\colon \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_1,R)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_2,R)$ описывается следующим образом: для $r_1,r_2\in R$ имеем

$$\delta^1(r_1,r_2)=(Y^+*r_1,\varphi_1*r_1+\varphi_2*r_2).$$

Предположим, что $(r_1,r_2)\in \mathrm{Ker}\ \delta^1$, т.е.

$$\left.\begin{aligned} &Y^+*r_1=yr_1+r_1y=0,\\ &\varphi_1*r_1+\varphi_2*r_2=\sum_{i=0}^{k-1}(yx)^i\cdot r_1\cdot(xy)^{k-1-i}\\ &\qquad +xr_2+r_2x+\sum_{i=0}^{k-2}(yx)^iy\cdot r_2\cdot y(xy)^{k-2-i}=0. \end{aligned}\right\} \quad (2.14)$$

Представим компоненты этого 1-коцикла в виде

$$r_1 = \sum_{w \in \mathcal{B}_R} \lambda_w w, \quad r_2 = \sum_{w \in \mathcal{B}_R} \mu_w w \tag{2.15}$$

$(\lambda_w, \mu_w \in K)$. Первое уравнение из (2.14) приводит к следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{(xy)^i} + \lambda_{(yx)^i} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\lambda_{x(yx)^i} = 0 \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \quad \lambda_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Далее, второе уравнение из (2.14) равносильно системе

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{(xy)^i} + \mu_{(yx)^i} = 0 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ &\mu_{y(xy)^i} = 0 \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-2, \\ &k\lambda_y + (k-3)\mu_x = 0, \\ &\lambda_{xy} + \lambda_{yx} - 2\mu_{y(xy)^{k-1}} = 0, \\ &\lambda_1 = \mu_1 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Теперь анализируя соотношения (2.16) и (2.17), легко приходим к следующим утверждениям.

Предложение 2.8. (a) *Если $p = 3$ и $3 \nmid k$, то пространство* $\operatorname{Ker} \delta^1$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i - (yx)^i,\, 0\Big) \ \text{ и } \ \Big(0, (xy)^i - (yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.18}$$

$$\Big(y(xy)^i,\, 0\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.19}$$

$$\Big(0, x(yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{2.20}$$

$$(y,\, -x),\ \Big((xy)^k,\, 0\Big), \Big(0, (xy)^k\Big). \tag{2.21}$$

(b) *Если $p = 3$ и $3 \mid k$, то для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker} \delta^1$ *надо в множество, указанное в пункте* (a), *вместо элемента* $(y, -x)$ *(см.* (2.21)*) включить элементы* $(y, 0)$ *и* $(0, x)$.

(c) *Если $p \neq 3$, то для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker} \delta^1$ *надо в множестве, указанном в пункте* (a), *элемент* $(y, -x)$ *заменить на элемент* $((k-3)y, -kx)$.

Предложение 2.9. (a) *Предположим, что либо* $p = 3$ *и* 3 *не делит* k, *либо* $p \neq 3$. *Тогда пространство* $\operatorname{Im}\delta^1$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i,\, 0\Big) \ \text{ и } \ \Big(0, (xy)^i + (yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.22}$$

$$\Big(y(xy)^i,\, 0\Big) \text{ и } \Big(0, x(yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.23}$$

$$\Big(0,\, y(xy)^{k-1}\Big),\ \Big((xy)^k,\, 0\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big). \tag{2.24}$$

(b) *Если* $p = 3$ *и* $3 \mid k$, *то для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\delta^1$ *надо из множества, описанного в* (2.22)–(2.24), *удалить элемент* $\Big(0,\, y(xy)^{k-1}\Big)$.

Из предложений 2.5 и 2.8 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.10.

$$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+2, & \text{если } \ p=3 \text{ и } 3 \text{ не делит } k \text{ или } p \neq 3,\\ k+3, & \text{если } \ p = 3 \text{ и } 3 \text{ делит } k. \end{cases}$$

Используя лемму 2.7, получаем, что дифференциал $\delta^2\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_2, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3, R)$ описывается формулой: для $r_1, r_2 \in R$

$$\delta^2(r_1, r_2) = (Y^- * r_1, -\tau * r_2).$$

Предположим, что $(r_1, r_2) \in \operatorname{Ker}\delta^2$, и представим компоненты r_1, r_2 в виде (2.15). Тогда аналогично предыдущему приходим к следующим соотношениям, связывающим координаты разложений (2.15):

$$\begin{array}{ll} \lambda_{(xy)^i} = \lambda_{(yx)^i} & \text{для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\ \lambda_{x(yx)^i} = 0 & \text{для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-2;\\ \mu_{(xy)^i} = \mu_{(yx)^i} & \text{для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1. \end{array}$$

Анализируя эти соотношения, получаем следующие два утверждения.

Предложение 2.11. *Пространство* $\operatorname{Ker}\delta^2$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i + (yx)^i,\, 0\Big) \ \text{ и } \ \Big(0, (xy)^i + (yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.25}$$

$$\Big(y(xy)^i,\, 0\Big),\ \Big(y(xy)^i,\, 0\Big) \ \text{ и } \ \Big(0, x(yx)^i\Big) \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.26}$$

$$(1,\, 0),\ \Big(x(yx)^{k-1},\ 0\Big),\ (0,\, 1),\ \Big((xy)^k,\, 0\Big), \Big(0, (xy)^k\Big). \tag{2.27}$$

Предложение 2.12. *Пространство* $\operatorname{Im}\delta^2$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i-(yx)^i,\,0\Big)\quad \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.28}$$

$$\Big(0,(xy)^i+(yx)^i\Big)\quad \text{для}\ \ 2\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.29}$$

$$\Big(y(xy)^i,\,0\Big)\qquad\quad \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.30}$$

$$\Big(0,(xy)^k\Big). \tag{2.31}$$

Из предложений 2.9 и 2.11 непосредственно вытекает

Следствие 2.13.

$$\dim_K \mathrm{HH}^2(R)=\begin{cases} k+2, & \text{если}\ \ p=3\ \text{и}\ 3\ \text{не делит}\ k\ \text{или}\ p\neq 3,\\ k+3, & \text{если}\ \ p=3\ \text{и}\ 3\ \text{делит}\ k.\end{cases}$$

Дифференциал $\delta^3\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_3,R)\to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4,R)$ описывается формулой: для $r_1,r_2\in R$

$$\delta^3(r_1,r_2)=(Y^+*r_1,\,-Y^-*r_2,\ \sigma*r_3),$$

и если $(r_1,r_2)\in\operatorname{Ker}\delta^3$, то представляя r_1 и r_2 в виде (2.15), получим соотношения:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{(xy)^i}+\lambda_{(yx)^i}=0 & \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
\lambda_{x(yx)^i}=0 & \text{для}\ \ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
\lambda_1=0; & \\
\mu_{(xy)^i}=\mu_{(yx)^i} & \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
\mu_{x(yx)^i}=0 & \text{для}\ \ 0\leqslant i\leqslant k-2;\\
\mu_1=0,\ k\cdot\mu_y=0. &
\end{array}$$

Отсюда легко получается следующее описание ядра и образа δ^3.

Предложение 2.14. (a) *Если p делит k, то пространство* $\operatorname{Ker}\delta^3$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i-(yx)^i,\,0\Big)\ \ \text{и}\ \ \Big(0,(xy)^i+(yx)^i\Big)\quad \text{для}\ \ 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.32}$$

$$\Big(y(xy)^i,\,0\Big)\ \text{и}\ \Big(0,y(xy)^i\Big)\quad \text{для}\ \ 0\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.33}$$

$$\Big((xy)^k,\,0\Big),\ \Big(0,\ x(yx)^{k-1},\,0\Big),\ \Big(0,(xy)^k\Big). \tag{2.34}$$

(b) *Если p не делит k, то для получения базиса пространства* $\operatorname{Ker}\,\delta^3$ *надо из множества, описанного в пункте* (a), *удалить элемент* $(0,y)$ *(см.* (2.33)*).*

Предложение 2.15. (a) *Предположим, что p делит k. Тогда пространство* $\operatorname{Im}\,\delta^3$ *допускает в качестве K-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i+(yx)^i,\,0,\,0\Big)\ \text{ и }\ \Big(0,\,(xy)^i-(yx)^i,\,0\Big)\ \text{ для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.35}$$

$$\Big(y(xy)^i,\,0,\,0\Big)\ \text{ для }\ 0\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.36}$$

$$\Big(0,\,y(xy)^i,\,0\Big)\ \text{ для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.37}$$

$$\Big((xy)^k,\,0,\,0\Big),\ \Big(0,\ 0,\ x(yx)^{k-1}\Big). \tag{2.38}$$

(b) *Если p не делит k, то для получения базиса пространства* $\operatorname{Im}\,\delta^3$ *надо к множеству, описанному в* (2.35)–(2.38), *присоедить элемент* $\Big(0,\,0,\,(xy)^k\Big)$.

Следствие 2.16.

$$\dim_K \mathrm{HH}^3(R)=\begin{cases} k+3, & \text{если } p \text{ не делит } k,\\ k+4, & \text{если } p \text{ делит } k.\end{cases}$$

Далее, вновь используя лемму 2.7, получаем, что дифференциал $\delta^4\colon \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4,R)\to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_5,R)$ действует следующим образом: для $r_1,r_2,r_3\in R$

$$\delta^4(r_1,r_2,r_3)=(Y^-*r_1,\,-Y^+*r_2,\,\rho^+*r_2+Y^-*r_3,X^-*r_3).$$

Если $(r_1,r_2,r_3)\in \operatorname{Ker}\,\delta^4$, то представим r_1 и r_2 в виде (2.15), а также запишем $r_3=\sum_{w\in\mathcal{B}_R}\nu_w w$, где $\nu_w\in K$. Тогда для коэффициентов этих разложений выполняются соотношения:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{(xy)^i}=\lambda_{(yx)^i} & \text{для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
\lambda_{x(yx)^i}=0 & \text{для }\ 0\leqslant i\leqslant k-2;\\
\mu_{(xy)^i}+\mu_{(yx)^i}=0 & \text{для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
\mu_{x(yx)^i}=0 & \text{для }\ 0\leqslant i\leqslant k-1;\\
\mu_1=0,\ \mu_y=0, & \\
\nu_{(xy)^i}=\nu_{(yx)^i} & \text{для }\ 1\leqslant i\leqslant k-1;\\
\nu_{x(yx)^i}=0 \text{ и } \nu_{y(xy)^i}=0 & \text{для }\ 0\leqslant i\leqslant k-2.
\end{array}$$

Анализ этих соотношений приводит к следующему описанию ядра и образа δ^4.

Предложение 2.17. (a) *Пространство* $\operatorname{Ker}\delta^4$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\Big((xy)^i+(yx)^i,\, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(0,\, (xy)^i-(yx)^i,\, 0\Big) \text{ и } \Big(\mathrm{O}_2,\, (xy)^i+(yx)^i\Big) \quad \text{для } 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.39}$$

$$\Big(y(xy)^i,\, \mathrm{O}_2\Big) \quad \text{для } 0\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.40}$$

$$\Big(0,\ y(xy)^i,\, 0\Big) \quad \text{для } 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{2.41}$$

$$\Big(1,\, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(x(yx)^{k-1},\mathrm{O}_2\Big),\ \Big((xy)^k,\, \mathrm{O}_2\Big),\ \Big(0,\, (xy)^k,\, 0\Big), \tag{2.42}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2,\, 1\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2,\ x(yx)^{k-1}\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2,\ y(xy)^{k-1}\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2,\ (xy)^k\Big). \tag{2.43}$$

(b) *Пространство* $\operatorname{Im}\delta^4$ *допускает в качестве* K*-базиса множество, состоящее из следующих элементов*:

$$\big((xy)^i-(yx)^i,\mathrm{O}_3\,\big),\ \big(0,\,(xy)^i+(yx)^i,\mathrm{O}_2\,\big),\ \big(\,\mathrm{O}_2,\,(xy)^i-(yx)^i,\,0\big), \tag{2.44}$$

$$\Big(\mathrm{O}_3,\,(xy)^i-(yx)^i,\Big)\Big(\mathrm{O}_2,\,y(xy)^i,\ -x(yx)^i\Big), \tag{2.45}$$

$$\Big(y(xy)^i,\, \mathrm{O}_3\Big) \text{ и } \Big(0,\,y(xy)^i,\mathrm{O}_2\Big) \quad \text{для } 1\leqslant i\leqslant k-1; \tag{2.46}$$

$$\Big(0,\,-y,\,x(yx)^{k-1},\,0\Big),\ \Big(0,\,(xy)^k,\mathrm{O}_2\Big),\ \Big(\mathrm{O}_2,\ (xy)^k,\ 0\Big). \tag{2.47}$$

Следствие 2.18.

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R)=\begin{cases} k+4, & \text{если } p \text{ не делит } k,\\ k+5, & \text{если } p \text{ делит } k.\end{cases}$$

Предложение 2.19. *Для* $n\geqslant 5$ *имеем:*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R)=\dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R)+2.$$

Доказательство. Из предложения 2.4 следует, что имеется следующая точная последовательность комплексов

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

где $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$. Эта последовательность, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \\ \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots . \end{aligned} \tag{2.48}$$

Вычислим когомологии вспомогательного комплекса $\mathcal{X}^\bullet$.

Лемма 2.20. *Для* $n \geqslant 4$

$$\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 4.$$

Доказательство. Как обычно, $\mathcal{X}^n = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_n, R)$ при $n \geqslant 1$ отождествляется с R^2 (а $\mathcal{X}^0$ – с R); кроме того, мы упорядочиваем прямые слагаемые в X_n в соответствии с порядком прямых слагаемых в Q_n (см. замечание 2.2).

Для $n = 2m+1$, где $m \geqslant 1$, дифференциал в $\mathcal{X}^\bullet$ описывается формулой $d_{\mathcal{X}^\bullet}^{2m+1}(r_1, r_2) = (Y^+ * r_1, -Y^- * r_2)$ (здесь мы учитываем лемму 2.7). Тогда аналогично доказательству предложений 2.8 и 2.9 получаем, что $\mathrm{Ker}\, d_{\mathcal{X}^\bullet}^{2m+1}$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из элементов

$$\begin{aligned} &\Big((xy)^i - (yx)^i,\, 0\Big) \ \text{ и } \ \Big(0,\, (xy)^i + (yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\Big(y(xy)^i,\, 0\Big) \text{ и } \Big(0,\, y(xy)^i\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\Big((xy)^k,\, 0\Big),\ (0,\, 1),\ \Big(0,\ x(yx)^{k-1}\Big),\ \Big(0,\, (xy)^k\Big), \end{aligned}$$

а пространство $\mathrm{Im}\, d_{\mathcal{X}^\bullet}^{2m+1}$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из элементов

$$\begin{aligned} &\Big((xy)^i + (yx)^i,\, 0\Big),\ \Big(0,\, y(xy)^i\Big) \ \text{ и } \ \Big(0,\, (xy)^i - (yx)^i\Big) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \\ &\Big(y(xy)^i,\, 0\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1;\ \Big((xy)^k,\, 0\Big). \end{aligned}$$

Аналогично для чётных $n = 2m$, $m \geqslant 2$, имеем $d^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}(r_1, r_2) = (Y^- * r_1, -Y^+ * r_2)$, и тогда, по симметрии, множество

$$\Big((xy)^i + (yx)^i,\, 0\Big) \ \text{ и } \ \Big(0,\, (xy)^i - (yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$
$$\Big(y(xy)^i,\, 0\Big) \text{ и } \Big(0,\, y(xy)^i\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1;$$
$$\Big((xy)^k,\, 0\Big),\ (1,\ 0),\ \Big(x(yx)^{k-1},\, 0\Big),\ \Big(0,\, (xy)^k\Big)$$

является базисом пространства Ker $d^{2m}_{\mathcal{X}^\bullet}$ а множество

$$\Big((xy)^i - (yx)^i,\, 0\Big),\ \Big(y(xy)^i,\, 0\Big) \ \text{ и } \ \Big(0,\, (xy)^i + (yx)^i\Big)$$
$$\text{для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$
$$\Big(0,\, y(xy)^i\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1;\ \Big(0,\, (xy)^k\Big)$$

является базисом Im $d^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}$. Отсюда следует, что для всех $n \geqslant 4$ $\dim_K \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = 4$, при этом $\mathrm{H}^{2m}(\mathcal{X}^\bullet)$, $m \geqslant 2$, порождается когомологическими классами элементов

$$(1,0),\ \Big(x(yx)^{k-1},\, 0\Big),\ (0,\, y),\ \Big(0,\, (xy)^k\Big), \tag{2.49}$$

а $\mathrm{H}^{2m+1}(\mathcal{X}^\bullet)$, $m \geqslant 2$, порождается когомологическими классами элементов

$$(y,\, 0),\ \Big((xy)^k,\, 0\Big),\ (0,\, 1),\ \Big(0,\, x(yx)^{k-1}\Big). \tag{2.50}$$

□

Продолжим доказательство предложения 2.19. Докажем, что для связывающих гомоморфизмов Δ^n из последовательности (2.48) при $n \geqslant 4$ имеем

$$\dim_K \operatorname{Im} \Delta^n = 1.$$

Рассмотрим следующую диаграмму, используемую при построении связывающего гомоморфизма:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{X}^n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^{n-4}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta^{n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d^n_{\mathcal{X}}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n+1}, R) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{X}^{n+1} & \longrightarrow & 0;
\end{array}$$

если $f \in \mathcal{X}^n$ – n-коцикл, то $f = i^*(\widetilde{f})$ для некоторого $\widetilde{f} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$, и тогда $\Delta^n(\mathrm{cl}\ f) = \mathrm{cl}\ g$, где $g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ – элемент, такой, что $\pi^*(g) = \delta^n(\widetilde{f})$.

Предположим дополнительно, что n чётно: $n = 2m$, $m \geqslant 2$. Пусть $f = (r_1, r_2) \in \mathcal{X}^{2m}$ – $2m$-коцикл. Через $\nu\colon Q_{2m} = X_{2m} \oplus Q_{2m-4} \to X_{2m}$ обозначим проекцию на прямое слагаемое и определим $\widetilde{f} = f \circ \nu\colon Q_{2m} \to R$, т.е. $\widetilde{f} = (r_1, r_2, \mathrm{O})$. Ввиду доказательства леммы 2.20 можем предположить, что f является линейной комбинацией элементов, указанных в (2.49).

Матрица дифференциала d_{2m}^Q имеет следующую блочную структуру

$$d_{2m}^Q = \left(\begin{array}{cc|cc} Y^- & \rho^- & 0 & \mathrm{O}_{1,l'-3} \\ 0 & -Y^+ & \rho^+ & \mathrm{O}_{1,l'-3} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}_{l-2,2}} & \multicolumn{2}{c}{d_{2m-4}^Q} \end{array}\right). \tag{2.51}$$

где $l = l_n, l' = l_{n+1}$ (см. формулу (2.10)). Поэтому для

$$f \in \Big\{ \big(1,\, 0\big),\ \big(x(yx)^{k-1},\, 0\big),\ \big(0,\, (xy)^k\big) \Big\}$$

сразу получаем, что $\delta^{2m}(\widetilde{f}) = 0$, и, следовательно, $\Delta^{2m}(\mathrm{cl}\ f) = 0$. С другой стороны, если $f = (0,\, y)$, то $\delta^{2m}(\widetilde{f}) = \Big(0, 0, 2(xy)^k, \mathrm{O}\Big) = \pi^*(g)$, где $g = \Big(2(xy)^k, \mathrm{O}\Big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{2m-3}, R)$; при этом из вида матрицы дифференциала δ^{2m-4} (для $m \geqslant 4$ см. (2.51), а для $m \in \{2, 3\}$ надо отдельно выписать матрицы дифференциалов d_0 и d_2) непосредственно усматриваем, что $g \notin \mathrm{Im}\ \delta^{2m-4}$. Отсюда следует, что $\dim \mathrm{Im}\ \Delta^{2m} = 1$. То, что $\dim \mathrm{Im}\ \Delta^{2m+1} = 1$ для $m \geqslant 2$, доказывается аналогично (в этом случае, рассматривая элементы из (2.50), получаем, что лишь для $f = (0,\, 1)$ имеем $\Delta^{2m+1}(\mathrm{cl}\ f) \neq 0$).

Наконец, из точности последовательности (2.48) следует, что

$$\dim \mathrm{Im}\ \Delta^{n-1} - \dim \mathrm{HH}^{n-4}(R) + \dim \mathrm{HH}^n(R) - \dim \mathrm{Ker}\ \Delta^n = 0,$$

и таким образом при $n \geqslant 5$

$$\dim \mathrm{HH}^n(R) - \dim \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \dim \mathrm{Ker}\ \Delta^n - \dim \mathrm{Im}\ \Delta^{n-1} = 2. \quad \square$$

Следствие 2.21. (1) *Если $p \nmid k$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} k+3, & \text{если } n = 0, \\ k+3+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3(\mod 4), \\ k+2+2\left[\frac{n}{4}\right] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если $p = 3$ и $3 \mid k$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} k+4+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3(\mod 4), \\ k+3+2\left[\frac{n}{4}\right] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(3) *Если $p \neq 3$ и $p \mid k$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) = \begin{cases} k+3+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 0(\mod 4), \\ k+4+2\left[\frac{n}{4}\right], & \text{если } n \equiv 3(\mod 4), \\ k+2+2\left[\frac{n}{4}\right] & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

3. Образующие и соотношения

Пусть $R = R_k$. Мы по-прежнему предполагаем, что характеристика основного поля $p = \operatorname{char} K$ отлична от 2. Мы сейчас кратко опишем интерпретацию произведения Йонеды в алгебре $\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus\limits_{m \geqslant 0} \mathrm{Ext}^m_\Lambda(R, R)$, использованную в [3]. Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента, описанная в разделе 2. Пусть

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \Big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\Big)$$

– комплекс из (2.11). Тогда для коциклов $f \in \operatorname{Ker} \delta^n$ и $g \in \operatorname{Ker} \delta^t$ имеем $\mathrm{cl}\, g \cdot \mathrm{cl}\, f = \mathrm{cl}\,(\mu\, \mathrm{T}^0(g)\, \mathrm{T}^t(f))$, где $\mathrm{T}^i(h)$ обозначает i-ю трансляцию коцикла h. В дальнейшем мы будем описывать трансляции $\mathrm{T}^i(h)$ ($i \geqslant 0$) с помощью матриц, соответствующих стандартным разложениям модулей Q_i (см. замечание 2.2).

Случай 1. Сначала мы исследуем случай, когда $p = 3$ и $3 \nmid k$. Из предложений 2.8, 2.9, 2.11, 2.12, 2.14, 2.15 и 2.17 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Предположим, что $p=3$ и $3\nmid k$. Тогда:*

(a) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(y(xy)^i,0\Big)\quad \text{для}\quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.1}$$

$$\Big(y,-x\Big),\ \Big((xy)^k,0\Big),\ \Big(0,(xy)^k\Big); \tag{3.2}$$

(b) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(0,y(xy)^i\Big)\quad \text{для}\quad 0\leqslant i\leqslant k-2, \tag{3.3}$$

$$(1,0),\ \Big(x(yx)^{k-1},0\Big),\ \Big(0,1\Big); \tag{3.4}$$

(c) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(0,y(xy)^i\Big)\quad \text{для}\quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.5}$$

$$\Big(y,0\Big),\ \Big((xy)^k,0\Big),\ \Big(0,xy+yx\Big),\ \Big(0,x(yx)^{k-1}\Big); \tag{3.6}$$

(d) *пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_2,(xy)^i+(yx)^i\Big)\quad \text{для}\quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.7}$$

$$(1,\mathrm{O}_2),\ \Big(x(yx)^{k-1},\mathrm{O}_2\,\Big),\ \Big(0,(xy)^k,0\Big),\ (\mathrm{O}_2,1),\ \Big(\,\mathrm{O}_2,y(xy)^{k-1}\Big). \tag{3.8}$$

Предложение 3.2. (a) *Пространство* $\mathrm{HH}^5(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_2,y(xy)^i,0\Big)\quad \text{для}\quad 1\leqslant i\leqslant k-1, \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{array}{c}(y,\mathrm{O}_3\,),\quad \Big((xy)^k,\mathrm{O}_3\Big),\quad \Big(0,x(yx)^{k-1},\mathrm{O}_2\Big),\\ (\,\mathrm{O}_2,y,-x),\quad \Big(\,\mathrm{O}_3,(xy)^k\Big).\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

(b) *Пространство* $\mathrm{HH}^6(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_3, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{3.11}$$

$$(1, \mathrm{O}_3),\ \Big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\Big),\ \Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\,\Big),\ (\mathrm{O}_2, 1, 0),\ \Big(\,\mathrm{O}_3, 1\Big). \tag{3.12}$$

Доказательство. (a) Аналогично доказательству предложений 2.8 и 2.9 получаем (детали вычислений оставляем читателю), что $\mathrm{Ker}\ \delta^5$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из элементов:

$$\begin{aligned}
&\Big((xy)^i - (yx)^i, \mathrm{O}_3\,\Big),\ \Big(0,\ (xy)^i + (yx)^i, \mathrm{O}_2\,\Big), \Big(\,\mathrm{O}_2,\ (xy)^i - (yx)^i,\ 0\Big),\\
&\Big(\,\mathrm{O}_3,\ (xy)^i - (yx)^i,\ 0\Big),\ \Big(0,\ y(xy)^i, \mathrm{O}_2\,\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_2,\ y(xy)^i,\ 0\Big),\\
&\Big(\,\mathrm{O}_3,\ x(yx)^i\Big) \quad \text{и} \quad \Big(0,\ y(xy)^i, \mathrm{O}_2\,\Big), \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\Big(y(xy)^i,\ \mathrm{O}_3\,\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\Big((xy)^k,\ \mathrm{O}_3\,\Big),\ \Big(0,\ x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\,\Big), \Big(0,\ -y,\ x(yx)^{k-1},\ 0\Big),\\
&\Big(0,\ (xy)^k, \mathrm{O}_2\,\Big), \Big(\,\mathrm{O}_2, y, -x\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_3,\ (xy)^k\Big).
\end{aligned}$$

С учётом предложения 2.17, (b) отсюда выводим требуемое утверждение.

(b) Утверждение следует из описания базисов $\mathrm{Im}\ \delta^5$ и $\mathrm{Ker}\ \delta^6$: множество

$$\begin{aligned}
&\Big((xy)^i + (yx)^i,\ \mathrm{O}_3\,\Big),\ \Big(0, (xy)^i - (yx)^i, \mathrm{O}_2\,\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i, 0\Big),\\
&\Big(\,\mathrm{O}_3, (xy)^i + (yx)^i\Big),\ \Big(0, y(xy)^i, \mathrm{O}_2\,\Big) \quad \text{и} \quad \Big(\,\mathrm{O}_3, x(yx)^i\Big),\\
&\qquad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\Big(y(xy)^i, \mathrm{O}_3\,\Big) \quad \text{и} \quad \Big(\,\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) \ \text{для} \ 0 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&\Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\,\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_2, x(yx)^{k-1}, 0\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_2, (xy)^k, 0\Big),\\
&\Big(\,\mathrm{O}_3, y(xy)^{k-1}\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_3, x\Big),\ \Big(\,\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big)
\end{aligned}$$

служит базисом для $\operatorname{Im}\delta^5$, а множество

$$\Bigl((xy)^i+(yx)^i, \mathrm{O}_3\Bigr),\ \Bigl(0,\,(xy)^i-(yx)^i, \mathrm{O}_2\Bigr),\ \Bigl(\mathrm{O}_2,\,(xy)^i+(yx)^i,\,0\Bigr),$$
$$\Bigl(\mathrm{O}_3,\,(xy)^i+(yx)^i,\,0\Bigr)\ \text{ и }\ \Bigl(0,\,y(xy)^i, \mathrm{O}_2\Bigr),$$
$$\text{где }\ 1\leqslant i\leqslant k-1;$$
$$\Bigl(y(xy)^i,\,\mathrm{O}_3\Bigr),\ \Bigl(\mathrm{O}_2,\,y(xy)^i,\,0\Bigr),\ \Bigl(\mathrm{O}_3,\,x(yx)^i\Bigr)\ \text{ и }\ \Bigl(\mathrm{O}_3,\,y(xy)^i\Bigr),$$
$$\text{где }\ 0\leqslant i\leqslant k-1;$$
$$\Bigl(1, \mathrm{O}_3\Bigr),\ \Bigl(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_3\Bigr),\ \Bigl((xy)^k, \mathrm{O}_3\Bigr),\ \Bigl(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Bigr),\ \Bigl(\mathrm{O}_2, 1, 0\Bigr),$$
$$\Bigl(\mathrm{O}_2, x(yx)^{k-1},\,0\Bigr),\ \Bigl(\mathrm{O}_2, (xy)^k,\,0\Bigr),\ \Bigl(\mathrm{O}_3, 1\Bigr),\ \Bigl(\mathrm{O}_3,\,(xy)^k\Bigr)$$

служит базисом для $\operatorname{Ker}\delta^6$. □

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $p_1,\, p_2,\, p_3$ из (2.13);

— степени 1 : $u_1 := (y, -x),\quad u_2 := (yxy, 0);$ (3.13)

— степени 2 : $v_1 := (1, 0),\quad v_2 := (0, 1),\quad v_3 := (0, y);$ (3.14)

— степени 3 : $w_1 := (y, 0),\quad w_2 := (0, yxy);$ (3.15)

— степени 4 : $t := (0, 0, 1).$ (3.16)

Предложение 3.3. *Предположим, что* $p = 3$ *и* $3 \nmid k$. *Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_1, p_2, p_3, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, t\} \tag{3.17}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\left.\begin{aligned} p_1^{k+1} = p_2^2 = p_3^2 = 0,\\ p_ip_j = 0 \ \text{ для }\ 1\leqslant i<j\leqslant 3;\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

$$p_1u_1 = p_2u_2 = p_3u_2 = p_1^{k-1}u_2 = 0, \tag{3.19}$$

$$\left.\begin{aligned} p_1v_1 = p_3v_1 = p_1v_2 = p_2v_2 = 0,\\ p_2v_3 = p_3v_3 = 0,\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

$$p_1^{k-1}v_3 = p_3v_2 = 0, \tag{3.21}$$

$$u_1u_2 = 0; \tag{3.22}$$

$$p_1w_1 = p_3w_1 = 0, \tag{3.23}$$

$$p_1^{k-1}w_2 = p_2w_2 = p_3w_2 = 0, \tag{3.24}$$

$$u_1v_3 = u_2v_1 = u_2v_2 = 0, \tag{3.25}$$

$$u_2v_3 = -p_1w_2, \quad p_2u_1v_1 = p_2w_1; \tag{3.26}$$

$$p_1^k t = 0, \tag{3.27}$$

$$p_2t = 0,\, v_2^2 = 2p_3t, \quad v_3^2 + p_1^2t = 0, \tag{3.28}$$

$$v_1v_2 = v_1v_3 = v_2v_3 = 0, \tag{3.29}$$

$$u_2w_1 = u_1w_2 = u_2w_2 = p_2u_1w_1 = 0; \tag{3.30}$$

$$v_2w_1 = v_3w_1 = 0, \tag{3.31}$$

$$v_1w_2 = v_2w_2 = 0, \tag{3.32}$$

$$v_3w_2 = p_1u_2t; \tag{3.33}$$

$$w_1w_2 = 0. \tag{3.34}$$

Доказательство. Соотношения (3.18), (3.19), (3.20), (3.23), (3.24), (3.27) проверяются непосредственно. Для доказательства остальных соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень.

Из предложения 2.4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Для любого $i \geqslant 0$ проекция на прямое слагаемое $\pi_{i+4}\colon Q_{i+4} = X_{i+4} \oplus Q_i \to Q_i$ является i-ой трансляцией $\mathrm{T}^i(t)$ коцикла t.*

Необходимые трансляции остальных элементов из $\mathcal{Y}_1$ представлены в следующей лемме.

Лемма 3.5. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \{t\}$, имеющих положительную степень, можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \Big(y \otimes 1, -x \otimes 1\Big),$$

$$\mathrm{T}^1(u_1) = \begin{pmatrix} -y \otimes 1 & 0 \\ 0 & -x \otimes 1 - \sum\limits_{i=0}^{k-2} y(xy)^i \otimes y(xy)^{k-2-i} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_2)=\Big(yxy\otimes 1,0\Big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_2)=\begin{pmatrix} -yxy\otimes 1 & -\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i-1)(yx)^i\otimes(xy)^{k-i} \\ 0 & -\sum\limits_{i=1}^{k-2} iy(xy)^i\otimes y(xy)^{k-1-i}+(k-1)x\otimes xy \end{pmatrix};$$
$$\mathrm{T}^0(v_1)=\Big(1\otimes 1,0\Big),\quad \mathrm{T}^1(v_1)=\begin{pmatrix} 1\otimes 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i\otimes x(yx)^{k-2-i} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1}(xy)^i\otimes(yx)^{k-1-i} \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^2(v_1)=\begin{pmatrix} 1\otimes 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^- & -(xy)^{k-1}\otimes(yx)^{k-1} \end{pmatrix};$$
$$\mathrm{T}^0(v_2)=\Big(0,1\otimes 1\Big),\quad \mathrm{T}^1(v_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Y^+ \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^2(v_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -(yx)^{k-1}\otimes(xy)^{k-1} \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(v_2))_{23}=\sum_{i=0}^{k-1} y(xy)^i\otimes(yx)^{k-1-i}+\sum_{i=0}^{k-1}(xy)^i\otimes y(xy)^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(v_3)=\Big(0,y\otimes 1\Big),\quad \mathrm{T}^1(v_3)=\begin{pmatrix} 0 & -yx\otimes 1-x\otimes y \\ 0 & -y\otimes y \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^2(v_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -y(xy)^{k-1}\otimes(xy)^{k-1} \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(v_3))_{23}=-x\otimes xy-yx\otimes x+y\otimes x^2+x^2\otimes y;$$

$$\mathrm{T}^0(w_1)=\Big(y\otimes 1,0\Big),$$
$$\mathrm{T}^1(w_1)=\begin{pmatrix} -y\otimes 1 & \sum\limits_{i=1}^{k-1}(yx)^i\otimes x(yx)^{k-1-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} y(xy)^i\otimes(yx)^{k-1-i} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^2(w_1)=\begin{pmatrix} y\otimes 1 & \star & 0 & 0 \\ 0 & -1\otimes xy+x\otimes y & \star & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{12} = 1\otimes x(yx)^{k-1} - x(yx)^{k-1}\otimes 1,$$
$$(\mathrm{T}^2(w_1))_{23} = -\,y(xy)^{k-1}\otimes (yx)^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w_1) = \begin{pmatrix} -y\otimes 1 & \star & 0 & 0\\ 0 & 1\otimes y & \star & 0\end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{12} = 2\cdot x(yx)^{k-1}\otimes 1 - 2\cdot 1\otimes x(yx)^{k-1},$$
$$(\mathrm{T}^3(w_1))_{23} = \sum_{i=0}^{k-2} x(yx)^i\otimes (xy)^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(w_2) = \Big(0, yxy\otimes 1\Big),\quad \mathrm{T}^1(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & -yxy\otimes 1 & \star\\ 0 & 0 & \star\end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_2))_{13} = -\sum_{i=2}^{k-1}(i-1)x(yx)^i\otimes (xy)^{k-i} - \sum_{i=2}^{k}(i-1)(yx)^i\otimes x(yx)^{k-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(w_2))_{23} = -\sum_{i=2}^{k}(i-1)(xy)^i\otimes y(xy)^{k-i} - \sum_{i=1}^{k-1} iy(xy)^i\otimes (yx)^{k-i};$$

$$\mathrm{T}^2(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & yxy\otimes 1 & -yx\otimes x(yx)^{k-1} & (k-1)(yx)^k\otimes (xy)^{k-1}\\ 0 & 0 & yx\otimes xy & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & -yxy\otimes 1 & yx\otimes x(yx)^{k-1} & -x(yx)^{k-1}\otimes x(yx)^{k-1}\\ 0 & 0 & 0 & \star\end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{24} = \sum_{i=0}^{k}(i-1)(yx)^i\otimes (xy)^{k-i}.$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке соотношений $\mu\,\mathrm{T}^0(b)=b$, $d_{i-1}\,\mathrm{T}^i(b)=\mathrm{T}^{i-1}(b)d_{i+\deg b}$ $(i>0)$ для $b\in\mathcal{Y}_1\setminus\{t\}$ с $\deg b>0$.

Замечание 3.6. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций элементов v_1, v_2, v_3, w_1, t остаются справедливыми для произвольного p (отличного от 2) в тех случаях, когда эти элементы включаются в множество образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$.

Теперь доказательство предложения 3.3 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в лемме 3.5, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 3.7. *Предположим, что* $p = 3$ *и* $3 \nmid k$. *Множество* $\mathcal{Y}_1$, *указанное в* (3.17), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Мы сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{6} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$, а затем с помощью индукции по n установим включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$.

Ввиду замечания 2.6 имеем $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.1, часть (a), справедливы соотношения

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) = p_1^{i-1}u_2 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$$\Big((xy)^k, 0\Big) = p_2u_1, \quad \Big(0, (xy)^k\Big) = -p_3u_1,$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в предложении 3.1, (b), справедливы соотношения

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) = p_1^iv_3 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{3.35}$$

$$\Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big) = p_2v_1. \tag{3.36}$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Аналогично предыдущему для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.1, часть (c), получаем следующие соотношения:

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) = p_1^{i-1}w_2 \quad \text{для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$$\Big((xy)^k, 0\Big) = p_2w_1, \ \Big(0, xy+yx\Big) = u_1v_2, \ \Big(0, x\big(yx\big)^{k-1}\Big) = w_1 - u_1v_1,$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$. Отметим, что здесь и ниже мы производим умножение элементов $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень, используя трансляции таких элементов, представленные в лемме 3.5 (см. также лемму 3.4).

Далее, для элементов из (3.7) и (3.8) имеем:

$$\Big(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i\Big) = p_1^i t \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.37}$$

$$(1, \mathrm{O}_2) = v_1^2, \ \big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\,\big) = p_2 v_1^2, \ \big(\,\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}\big) = p_3 t, \tag{3.38}$$

$$\Big(0, (xy)^k, 0\Big) = -u_1 w_1. \tag{3.39}$$

Таким образом, $\mathrm{HH}^4(R) \subset \mathcal{H}$.

Для элементов из (3.9) и (3.10) имеем:

$$\Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) = p_1^{i-1} u_2 t \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.40}$$

$$(y, \mathrm{O}_3\,) = v_1 w_1, \ \Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\,\Big) = p_2 v_1 w_1, \tag{3.41}$$

$$\Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\,\Big) = v_1 w_1 - u_1 v_1^2, \tag{3.42}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, y, -x\Big) = u_1 t, \ \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big) = -p_3 u_1 t, \tag{3.43}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^5(R) \subset \mathcal{H}$.

Наконец, для элементов из (3.11) и (3.12) имеем:

$$\Big(\mathrm{O}_3, y(xy)^i\Big) = p_1^i v_3 t \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{3.44}$$

$$\left.\begin{array}{l} (1, \mathrm{O}_3) = v_1^3, \ \big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\big) = p_2 v_1^3, \\ (\mathrm{O}_2, 1, 0) = v_1 t, \ (\mathrm{O}_3, 1) = v_2 t, \end{array}\right\} \tag{3.45}$$

$$\Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\,\Big) = -u_1 v_1 w_1, \tag{3.46}$$

и, таким образом, $\mathrm{HH}^6(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, доказываемое аналогично лемме 4.7 в [10].

Лемма 3.8. *Положим* $z := v_1^2 = (1, 0, 0) \in \mathrm{HH}^4(R)$. *Трансляции* $\mathrm{T}^i(z)$,

$i \leqslant 3$, *могут быть представлены отображениями*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^0(z) = (\,1\otimes 1 \quad 0 \quad 0\,),\\
&\mathrm{T}^1(z) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} (xy)^i \otimes (yx)^{k-1-i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.47)\\
&\mathrm{T}^2(z) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^- & -(xy)^{k-1}\otimes (yx)^{k-1} & 0 \end{pmatrix},\\
&\mathrm{T}^3(z) = \begin{pmatrix} 1\otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1\otimes 1 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} x(yx)^i \otimes x(yx)^{k-2-i} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Кроме того, для $i \geqslant 4$

$$\mathrm{T}^i(z) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id}_{\Lambda^2} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{T}^{i-4}(z) \end{array}\right).$$

Отметим также, что указанные выше формулы для $\mathrm{T}^i(z)$ остаются справедливыми для произвольного p.

Продолжим доказательство предложения 3.7. Индукцией по n докажем включение

$$\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}. \qquad (3.48)$$

Пусть $n > 6$, и пусть $f = (f', f'') \in \operatorname{Ker} \delta^n \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$, где $f' = (r_1, r_2) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, R) = \mathcal{X}^n$, $f'' = (s_1, \dots, s_\ell) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R)$, $\ell := l_{n-4}$ (мы используем отождествление $\mathcal{X}^n$ с R^2). Ясно, что $f' \in \operatorname{Ker} \delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$.

(a) Предположим дополнительно, что $f' = 0$. Тогда $f'' \in \operatorname{Ker} \delta^{n-4}$. Используя лемму 3.4, получаем: $f'' \cdot t = (\mathrm{O}_2, f'') = f$. По индуктивному предположению $f'' \in \mathcal{H}$, а тогда и $f \in \mathcal{H}$.

(b) Переходя к общему случаю, сначала предположим, что n чётно: $n = 2m$, $m \geqslant 4$. Из вида матрицы дифференциала d^Q_{2m} (см. (2.51)) получаем соотношение

$$\rho^+ * r_2 + Y^- * s_1 = 0.$$

Однако легко видеть, что $\operatorname{Im} \rho^+ \cap \operatorname{Im} Y^- = 0$, и поэтому $\rho^+ * r_2 = 0$. Отсюда следует, что коцепь

$$g := (f', \mathrm{O}_{\ell-4}) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2m-4}, R)$$

на самом деле является коциклом (при $n = 8$ надо учесть также, что $\psi * r_2 = 0$). Используя лемму 3.8, получаем:

$$g \cdot v_1^2 = (f', \mathrm{O}_{\ell-2}).$$

Ввиду части (a) доказательства имеем $f - g \cdot v_1^2 \in \mathcal{H}$; при этом по индуктивному предположению $g \in \mathcal{H}$. Следовательно, также и $f \in \mathcal{H}$.

(c) Пусть теперь n нечётно: $n = 2m + 1$, $m \geqslant 3$. Матрица дифференциала d^Q_{2m+1} имеет вид

$$d^Q_{2m+1} = \left(\begin{array}{cc|cc} Y^+ & \rho^- & 0 & \mathrm{O}_{1,l'-3} \\ 0 & -Y^- & \rho^+ & \mathrm{O}_{1,l'-3} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathrm{O}_{l-2,2}} & \multicolumn{2}{c}{d^Q_{2m-3}} \end{array}\right). \tag{3.49}$$

здесь $l = l_n, l' = l_{n+1}$ (см. (2.10)). Так как $\delta^{2m+1}_{\mathcal{X}^\bullet}(f') = 0$, то ввиду леммы 2.20 можно считать, что f' – линейная комбинация элементов множества из (2.50) и, в частности,

$$r_2 = \mu' \cdot 1 + \mu'' \cdot x(yx)^{k-1} \tag{3.50}$$

для некоторых $\mu', \mu'' \in K$. Из вида матрицы дифференциала d^Q_{2m+1} (3.49) следует, что

$$\rho^+ * r_2 + Y^+ * s_1 = 0. \tag{3.51}$$

Ввиду (3.51) имеем $\rho^+ * r_2 = 2\mu' x(yx)^{k-1} \in \operatorname{Im}(Y^+)^*$, откуда следует, что $\mu' = 0$ и $\rho^+ * r_2 = 0$. Теперь рассматривая коцепь

$$g := (f', \mathrm{O}_{\ell-3}) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{2m-3}, R),$$

видим, что $\delta^{2m-3}(g) = 0$ (при $m = 3$ используем то, что для r_2 из (3.50) $\sigma * r_2 = 0$). Тогда с помощью леммы 3.8 получаем: $g \cdot v_1^2 = (f', \mathrm{O}_{\ell-2})$ (при $m = 3$ учитываем, что в (3.50) $\mu' = 0$, а также вид элемента $(\mathrm{T}^3(z))_{23}$ из (3.47)). Далее, переходя к элементу $f - g \cdot v_1^2$, рассуждаем аналогично случаю (b). Это завершает доказательство включения (3.48). □

Пусть $\mathcal{A}_1 = K\langle\mathcal{X}_1\rangle/I_1$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_1$ из (1.1), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. (1.3)–(1.20)). (Ненулевые) образы мономов из $K\langle\mathcal{X}_1\rangle$ относительно канонического эпиморфизма $K\langle\mathcal{X}_1\rangle \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ записывается в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Из предложений 3.3 и 3.7 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (3.17)); заметим, что, не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (1) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.9. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w_1 > w_2 > v_1 > v_2 > v_3 > u_1 > u_2 > t > p_1 > p_2 > p_3.$$

По построению $\mathcal{A}_1$ – градуированно-коммутативная алгебра. Поэтому в соответствии с таким порядком любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_1$ с точностью до знака представи́м в виде

$$f = w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} v_1^{i} v_2^{\beta_2} v_3^{\beta_3} u_1^{\gamma_1} u_2^{\gamma_2} t^{\ell} p_1^{j} p_2^{\mathrm{e}_2} p_3^{\mathrm{e}_3}; \tag{3.52}$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3 \in \{0,1\}, i, j, \ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}, j \leqslant k.$$

Такие представления для мономов из $\mathcal{A}_1$ мы отождествляем с соответствующими мономами из $K[\mathcal{X}_1]$.

Назовём *редукцией* монома f из $\mathcal{A}_1$ процесс замены некоторых подмономов в f на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($a \mapsto b$ означает замену каждого вхождения монома a на элемент b):

$$\begin{aligned} &w_2p_1 \mapsto -v_3u_2, && w_1p_2 \mapsto v_1u_1p_2,\\ &v_2^2 \mapsto 2tp_3, && v_3^2 \mapsto -tp_1^2,\\ &w_2v_3 \mapsto u_2tp_1. && \end{aligned}$$

Любую замену из приведенного выше списка назовём *элементарным шагом редукции*. Так как после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в строго меньший относительно лексикографического порядка, то за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $a \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет *нормальную форму*, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1$, то любой элемент $a \in \mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{3.53}$$

Докажем, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\left\{p_1^i\right\}_{i=0}^{k}, \; p_2, \; p_3;$$

мономы степени $4n$, $n > 0$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{w_1v_1^{2(n-i-1)}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-1}, \quad v_1^{2n}p_2, \quad t^np_3;$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n}, \; \left\{w_1v_1^{2(n-i)-1}t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \; \left\{u_2t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \; v_1^{2n}u_1p_2, \; u_1t^np_3;$$

мономы степени $4n+2$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{w_1v_1^{2(n-i)-1}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_3t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \quad v_1^{2n+1}p_2, \quad v_2t^n;$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}u_1t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{w_1v_1^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_3u_2t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-3}, \quad w_2t^n, \quad v_1^{2n+1}u_1p_2, \quad v_2u_1t^n;$$

(здесь $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму.

Пусть $f \in \mathcal{A}_1$ – некоторый ненулевой моном вида (3.52), имеющий нормальную форму. Сейчас мы проанализируем последовательно несколько случаев.

1) Предположим, что в f входит w_1. Тогда ввиду некоторых мономиальных соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathcal{A}_1$, следует, что в f не входят $w_2, v_2, v_3, u_2, p_1, p_3$; кроме того, не входит p_2 (так как есть редукция $w_1p_2 \mapsto v_1u_1p_2$). Тогда f совпадает с одним из следующих мономов:

$$w_1t^\ell, \quad w_1v_1^it^\ell, \quad w_1u_1t^\ell, \quad w_1v_1^iu_1t^\ell.$$

2) Предположим, что w_1 не входит в f, но входит w_2. Тогда аналогично предыдущему заключаем, что в f не входят $v_1, v_2, u_1, u_2, p_2, p_3$; кроме того, не входят v_3 и p_1 (так как $w_2v_3 \mapsto u_2tp_1$ и $w_2p_1 \mapsto -v_2u_2$). Таким образом, $f = w_2t^\ell$.

3) Пусть в f не входят w_1, w_2, и предположим, что v_1 входит в f. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что в f не могут входить v_2, v_3, u_2, p_1, p_3. При этом если $\ell > 0$, то $\mathrm{e}_2 = 0$ (так как $p_2t = 0$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_1^it^\ell, \quad v_1^iu_1t^\ell, \quad v_1^ip_2, \quad v_1^iu_1p_2.$$

4) Пусть w_1, w_2, v_1 не входят, а v_2 входит в f. Тогда в f не входят v_3, u_2, p_1, p_2, p_3. Не входит также u_1' (так как $v_1u_1' \mapsto v_1u_1$). Кроме того, в (3.52) имеем $j \leqslant k-2$, так как $p_1^{k-1}v_1 = 0$. Следовательно, f равно v_2t^ℓ или $v_2u_1t^\ell$.

5) Пусть w_1, w_2, v_1, v_2 не входят, а v_3 входит в f. Тогда в f не входят u_1, p_2, p_3. Кроме того, если в (3.52) $\beta_2 = 1$, то $j \leqslant k-3$ (так как $p_1^{k-2}u_2v_3 = -p_1^{k-1}w_1 = 0$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$v_3t^\ell p_1^j \ (j \leqslant k-2); \quad v_3u_2t^\ell p_1^j \ (j \leqslant k-3).$$

6) Пусть w_1, w_2, v_1, v_2, v_3 не входят, а u_1 входит в f. Тогда в f не входят u_2 и p_1. Кроме того, если $\ell > 0$, то $\mathrm{e}_2 = 0$ (так как $tp_2 = 0$). Следовательно, f совпадает с одним из следующих мономов:

$$u_1 t^\ell, \quad u_1 p_2, \quad u_1 t^\ell p_3.$$

7) Пусть $w_1, w_2, v_1, v_2, v_3, u_1$ не входят, а u_2 входит в f. Тогда в f не входят p_2 и p_3; при этом $j \leqslant k-1$ (так как $u_2 p_1^{k-1} = 0$). Следовательно, $f = u_2 t^\ell p_1^j$, где $0 \leqslant j \leqslant k-2$.

8) Наконец, если в f не входят $w_1, w_2, v_1, v_2, v_3, u_1, u_2$, то ясно, что f совпадает с одним из мономов: $t^\ell p_1^j$ $(0 \leqslant j \leqslant k-1)$; $t^\ell p_3$; p^k и p_2 (при $\ell = 0$).

Таким образом, мы показали, что любой моном, имеющий нормальную форму, содержится в приведённом выше списке. С учётом следствия 2.21, пункт (1), отсюда вытекает равенство (3.53). □

Замечание 3.10. Из приведённого описания нормальных форм сразу получаем, что алгебра $\mathcal{A}_1$ не коммутативна; действительно, $u_1 w_1 \neq 0$. Аналогичное наблюдение можно сделать, рассматривая нормальные формы для элементов остальных алгебр $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_3'$, $\mathcal{A}_3''$, $\mathcal{A}_4$ (см. ниже).

Случай 2. Теперь предположим, что $p = 3$ и $3 \mid k$. Из предложений 2.8, 2.9, 2.11, 2.12, 2.14, 2.15 и 2.17 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.11. *Предположим, что $p = 3$ и $3 \mid k$. Тогда:*

(a) *пространство $\mathrm{HH}^1(R)$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \ \ \text{для} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(0, x),\ \Big((xy)^k, 0\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big);$$

(b) *пространство $\mathrm{HH}^2(R)$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \ \ \text{для} \ \ 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(1, 0),\ \Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big),\ \Big(0, 1\Big);$$

(c) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \quad \textit{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$

$$\Big(y, 0\Big), \ \Big((xy)^k, 0\Big), \ \Big(0, xy + yx\Big), \ \Big(0, x(yx)^{k-1}\Big);$$

(d) *пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i\Big) \quad \textit{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.54}$$

$$(1, \mathrm{O}_2), \ \Big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\,\Big), \ \Big(0, (xy)^k, 0\Big), \tag{3.55}$$

$$(\mathrm{O}_2, 1)\ \Big(\,\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}\Big), \ \Big(\,\mathrm{O}_2, (xy)^k\Big). \tag{3.56}$$

Аналогично предложению 3.2 доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.12. (a) *Пространство* $\mathrm{HH}^5(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) \quad \textit{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.57}$$

$$(y, \mathrm{O}_3), \ \Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\,\Big), \ \Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\,\Big), (\mathrm{O}_3, x), \ \Big(\,\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big). \tag{3.58}$$

(b) *Пространство* $\mathrm{HH}^6(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_3, y(xy)^i\Big) \quad \textit{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.59}$$

$$(1, \mathrm{O}_3), \ \Big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_3\,\Big), \ \Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\,\Big), (\mathrm{O}_2, 1, 0), \ \Big(\,\mathrm{O}_3, 1\Big). \tag{3.60}$$

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : p_1, p_2, p_3 из (2.13);
— степени 1 : $u_1'' := (y, 0), \quad u_4 := (0, x)$;
— степени 2 : $v_1, \ v_2, \ v_3$ из (3.14);
— степени 3 : $w_1 := (y, 0), \ \widetilde{w}_2 := (0, y)$;
— степени 4 : $t := (0, 0, 1)$.

Предложение 3.13. *Предположим, что $p=3$ и $3 \mid k$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2=\{p_1,p_2,p_3,u_1'',u_4,v_1,v_2,v_3,w_1,\widetilde{w}_2,t\} \tag{3.61}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.18), (3.20), (3.23), (3.28), (3.29), *а также следующие соотношения*:

$$p_1^k u_1''=p_3u_1''=p_2u_4=0,\quad p_1u_1''=p_1u_4;$$

$$u_1''u_4=0,\ p_1^{k-1}v_3=p_3v_2;$$

$$p_1^k\widetilde{w}_2=p_2\widetilde{w}_2=p_3\widetilde{w}_2=0,$$

$$u_1''v_2=u_4v_1=0,$$

$$u_1''v_3=u_4v_3=-p_1\widetilde{w}_2,\ p_2u_1''v_1=p_2w_1;$$

$$u_1''\widetilde{w}_2=u_4w_1=u_4\widetilde{w}_2=0;$$

$$v_1\widetilde{w}_2=v_2w_1=v_2\widetilde{w}_2=v_3w_1=0,$$

$$v_3\widetilde{w}_2=p_1u_1''t;$$

$$w_1\widetilde{w}_2=0.$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.3 для вычисления произведений элементов из $\mathcal{Y}_2$, имеющих степень больше 0, надо знать для этих элементов трансляции подходящих порядков. Ввиду замечания 3.6 мы должны дополнительно вычислить трансляции элементов u_1'', u_4, $\widetilde{w}_2$. Эти трансляции представлены в следующем легко проверяемом утверждении.

Лемма 3.14. *В качестве трансляций элементов* $u_1'',u_4,\widetilde{w}_2$ *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_1'')=\Big(y\otimes 1, 0\Big),$$

$$\mathrm{T}^1(u_1'')=\begin{pmatrix} -y\otimes 1 & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i} \\ 0 & -\sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)y(xy)^i\otimes y(xy)^{k-2-i}\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_4)=\Big(0, x\otimes 1\Big),$$

$$\mathrm{T}^1(u_4)=\begin{pmatrix}0 & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i}\\ 0 & -\sum\limits_{i=1}^{k-2} iy(xy)^i\otimes y(xy)^{k-2-i}+x\otimes 1\end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{w}_2)=\Big(0,y\otimes 1\Big),\quad \mathrm{T}^1(\widetilde{w}_2)=\begin{pmatrix}0 & -y\otimes 1 & \star\\ 0 & 0 & \star\end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}_2))_{13}=-\sum_{i=1}^{k-1} ix(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i}-\sum_{i=1}^{k-1} i(yx)^i\otimes x(yx)^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(\widetilde{w}_2))_{23}=-\sum_{i=1}^{k-1} i(xy)^i\otimes y(xy)^{k-1-i}-\sum_{i=0}^{k-2}(i+1)y(xy)^i\otimes(yx)^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^2(\widetilde{w}_2)=\begin{pmatrix}0 & y\otimes 1 & -x(yx)^{k-1}\otimes 1 & -(yx)^{k-1}\otimes(xy)^{k-1}\\ 0 & 0 & yx\otimes 1-y\otimes x & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^3(\widetilde{w}_2)=\begin{pmatrix}0 & -y\otimes 1 & 1\otimes x(yx)^{k-1} & 0\\ 0 & 0 & -1\otimes y & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i}\end{pmatrix}.$$

Замечание 3.15. Полезно отметить, что формулы для трансляций элементов $u_1'', \widetilde{w}_2$ остаются справедливыми для произвольного p , делящего k (и отличного от 2). Подобное замечание относится к трансляциям элемента u_4 (для случая, когда $p\neq 3$ и $p\mid k-3$).

Аналогично предложению 3.3 доказательство предложения 3.13 завершается с помощью прямых вычислений; соответствующую проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 3.16. *Предположим, что* $p=3$ *и* $3\mid k$. *Множество* $\mathcal{Y}_2$, *указанное в* (3.61), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_2\cup\{1\}$. Мы докажем лишь включение $\mathrm{HH}^n(R)\subset\mathcal{H}$ для $n\leqslant 6$, поскольку индукционный переход (по n) осуществляется аналогично доказательству предложения 3.7.

Включение $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$ уже доказано (см. замечание 2.6). Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.11, часть (a), справедливы соотношения

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) = p_1^i u_1'' \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big((xy)^k, 0\Big) = p_2 u_1'', \quad \Big(0, (xy)^k\Big) = p_3 u_4,$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в предложении 3.11, часть (b), справедливо соотношение (3.36), а также соотношения

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) = p_1^i v_3 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1.$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$.

Аналогично предыдущему для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.11, часть (c), получаем следующие соотношения:

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) = p_1^i \widetilde{w}_2 \quad \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big((xy)^k, 0\Big) = p_2 w_1, \quad \Big(0, xy + yx\Big) = -u_4 v_2,$$
$$\Big(0, x(yx)^{k-1}\Big) = w_1 - u_1'' v_1,$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для элементов из (3.54), (3.55) и (3.56) справедливы соотношения (3.37) и (3.38), а также соотношения

$$\Big(0, (xy)^k, 0\Big) = -u_1'' w_1, \ \Big(\mathrm{O}_2, (xy)^k\Big) = (1/2) p_1^k t.$$

Таким образом, $\mathrm{HH}^4(R) \subset \mathcal{H}$.

Для элементов из (3.57) и (3.58) выполняются соотношения (3.41), а также соотношения

$$\Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) = p_1^i u_1'' t \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big) = v_1 w_1 - u_1'' v_1^2,$$
$$\Big(\mathrm{O}_3, x\Big) = u_4 t, \quad \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big) = p_3 u_4 t,$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^5(R) \subset \mathcal{H}$.

Наконец, для элементов из (3.59) и (3.60) выполняются соотношения (3.45), а также соотношения

$$\begin{aligned} &\Big(\mathrm{O}_3, y(xy)^i\Big) = p_1^i v_3 t \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1, \\ &\Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Big) = -u_1'' v_1 w_1, \end{aligned}$$

и, таким образом, $\mathrm{HH}^6(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K\langle\mathcal{X}_2\rangle/I_2$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_2$ из (1.21), а I_2 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 3.13 и 3.16 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$ (см. (3.61)). Пусть $\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_2^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (2) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.17. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{3.62}$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.9 на кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w_1 > \widetilde{w}_2 > v_1 > v_2 > v_3 > u_4 > u_1'' > t > p_1 > p_2 > p_3.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_2$ с точностью до знака представи́м в виде

$$f = w_1^{\alpha_1}(\widetilde{w}_2)^{\alpha_2} v_1^i v_2^{\beta_2} v_3^{\beta_3} u_4^{\gamma_4} (u_1'')^{\gamma_1} t^\ell p_1^j p_2^{\mathrm{e}_2} p_3^{\mathrm{e}_3};$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_2$

$$\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_4, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3 \in \{0,1\}, \quad i, j, \ell \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad j \leqslant k.$$

Такие представления для мономов из $\mathcal{A}_2$ мы отождествляем с соответствующими мономами из $K[\mathcal{X}_2]$.

Рассмотрим следующий список элементарных шагов редукции:

$$\left.\begin{array}{ll} \widetilde{w}_2 p_1 \mapsto -v_3 u_1'' \mapsto -v_3 u_4, & w_1 p_2 \mapsto v_1 u_1'' p_2, \\ v_2^2 \mapsto 2tp_3, & v_3^2 \mapsto -tp_1^2, \\ \widetilde{w}_2 v_3 \mapsto u_1'' t p_1 & v_2 p_3 \mapsto v_3 p_1^{k-1}, \\ u_4 p_1 \mapsto u_1'' p_1. & \end{array}\right\} \tag{3.63}$$

Аналогично доказательству предложения 3.9 определяется нормальная форма элемента $a \in \mathcal{A}_2$ (относительно шагов редукции (3.63)) и устанавливается, что любой элемент $a \in \mathcal{A}_2$ допускает хотя бы одну нормальную форму. Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\left\{p_1^i\right\}_{i=0}^{k},\ p_2,\ p_3;$$

мономы степени $4n$, $n > 0$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)} t^i\right\}_{i=0}^{n-1},\quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i-1)} u_1'' t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k},\quad v_1^{2n} p_2,\quad t^n p_3;$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)} u_1'' t^i\right\}_{i=0}^{n-1},\quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i)-1} t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{u_1'' t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k-1},\quad v_1^{2n} u_1'' p_2,\quad u_4 t^n,\quad u_4 t^n p_3;$$

мономы степени $4n+2$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1} t^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i)-1} u_1'' t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_3 t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k-1},\quad v_1^{2n+1} p_2,\quad v_2 t^n;$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1} u_1'' t^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i)} t^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_3 u_4 t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k-2},\quad \widetilde{w}_2 t^n,\quad v_1^{2n+1} u_1'' p_2,\quad v_2 u_4 t^n;$$

(для $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$). С учётом следствия 2.21, пункт (2), отсюда вытекает равенство (3.62). $\square$

Случай 3. Предположим, что $p \neq 3$ и $p \nmid k$. Из предложений 2.8, 2.9, 2.11, 2.12, 2.14, 2.15 и 2.17 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.18. *Предположим, что $p \neq 3$ и $p \nmid k$. Тогда:*

(a) *пространство $\mathrm{HH}^1(R)$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big((k-3)y, -kx\Big),\ \Big((xy)^k, 0\Big),\ \Big(0, (xy)^k\Big);$$

(b) *пространство $\mathrm{HH}^2(R)$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{3.64}$$
$$(1,0),\ \Big(x(yx)^{k-1}, 0\Big),\ \Big(0, 1\Big); \tag{3.65}$$

(c) *пространство $\mathrm{HH}^3(R)$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big(y, 0\Big), \quad \Big((xy)^k, 0\Big), \quad \Big(0, xy+yx\Big)\ \Big(0, x(yx)^{k-1}\Big);$$

(d) *пространство $\mathrm{HH}^4(R)$ имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\,\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.66}$$

$$(1, \mathrm{O}_2),\ \Big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\,\Big),\ \Big(0, (xy)^k, 0\Big),\ (\mathrm{O}_2, 1)\ \Big(\,\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}\Big). \tag{3.67}$$

Аналогично предложению 3.2 доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.19. (a) *Пространство* $\mathrm{HH}^5(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.68}$$

$$(y, \mathrm{O}_3),\ \Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\Big),\ \Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big), \tag{3.69}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, (k-3)y, -kx\Big),\ \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big). \tag{3.70}$$

(b) *Пространство* $\mathrm{HH}^6(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\mathrm{O}_3, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{3.71}$$

$$(1, \mathrm{O}_3),\ \Big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_3\Big),\ \Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Big),\ (\mathrm{O}_2, 1, 0),\ \Big(\mathrm{O}_3, 1\Big). \tag{3.72}$$

Случай 3.1. Предположим дополнительно, что p не делит ни $4k-3$, ни $k-3$.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

$$\begin{aligned}
&\text{— степени } 0: && p_1,\ p_2,\ p_3 \ \text{ из } (2.13);\\
&\text{— степени } 1: && u_1' := \Big((k-3)y, -kx\Big);\\
&\text{— степени } 2: && v_1,\ v_2,\ v_3 \ \text{ из } (3.14);\\
&\text{— степени } 3: && w_1 := (y, 0);\\
&\text{— степени } 4: && t := (0,0,1).
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Предложение 3.20. *Предположим, что* $p \neq 3$ *и* p *не делит ни* k, *ни* $4k-3$, *ни* $k-3$. *Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3 = \{p_1, p_2, p_3, u_1', v_1, v_2, v_3, w_1, t\} \tag{3.74}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.18), (3.20), (3.21), (3.23), (3.27), (3.28), (3.29), (3.31), *а также следующие соотношения*:

$$p_1^k u_1' = 0;$$

$$p_2 u_1' v_1 = (k-3) p_2 w_1;\ p_2 u_1' w_1 = 0.$$

Доказательство. Нам осталось вычислить трансляции лишь для u_1' (см. замечание 3.6).

Лемма 3.21. *В качестве трансляций элемента u_1' можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_1') = \Big((k-3)\cdot y\otimes 1, -k\cdot x\otimes 1\Big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_1') = \begin{pmatrix} -(k-3)y\otimes 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{12} = \sum_{i=1}^{k-1} 3i\cdot (yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i},$$
$$(\mathrm{T}^1(u_1'))_{22} = -k\cdot x\otimes 1 + \sum_{i=0}^{k-2}(3+3i-k)y(xy)^i\otimes y(xy)^{k-2-i}.$$

Замечание 3.22. Отметим, что формулы для трансляций элемента u_1' остаются справедливыми и для случая, когда p делит $4k-3$ (и по-прежнему $p\nmid k$).

Теперь доказательство предложения 3.20 завершается с помощью прямых вычислений; соответствующую проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 3.23. *Предположим, что $p\neq 3$ и p не делит $k(k-3)(4k-3)$. Множество $\mathcal{Y}_3$, указанное в* (3.74), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_3\cup\{1\}$. Как и в доказательстве предложения 3.16, нам достаточно доказать включения $\mathrm{HH}^n(R)\subset\mathcal{H}$ для $n\leqslant 6$ (затем индукционный переход осуществляется аналогично доказательству предложения 3.7).

Включение $\mathrm{HH}^0(R)\subset\mathcal{H}$ уже доказано (см. замечание 2.6). Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 3.18, часть (a), справедливы соотношения

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) = (-1/3)p_1^i u_1' \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1,$$
$$\Big((xy)^k, 0\Big) = (k-3)^{-1}p_2u_1', \quad \Big(0, (xy)^k\Big) = -k^{-1}p_3u_1',$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$. Включение $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$ доказывается так же, как и в доказательстве предложения 3.7 (см. соотношения (3.35) и (3.36)).

Далее, для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 3.18, часть (c), получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
\Big(0, y(xy)^i\Big) = (1/3)p_1^{i-1}u_1'v_3 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\
\Big((xy)^k, 0\Big) = p_2w_1, \quad \Big(0, xy + yx\Big) = k^{-1}u_1'v_2, \\
\Big(0, x(yx)^{k-1}\Big) = (4k-3)^{-1}\Big((k-3)w_1 - u_1'v_1\Big),
\end{gathered}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Для элементов из (3.66) и (3.67) справедливы соотношения (3.37) и (3.38), а также соотношение

$$\Big(0, (xy)^k, 0\Big) = (3-4k)^{-1}u_1'w_1.$$

Таким образом, $\mathrm{HH}^4(R) \subset \mathcal{H}$.

Для элементов из (3.68)–(3.70) выполняются соотношения (3.41), а также соотношения

$$\Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) = (-1/3)p_1^iu_1't \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{3.75}$$

$$\Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big) = (4k-3)^{-1}\Big((k-3)v_1w_1 - u_1'v_1^2\Big), \tag{3.76}$$

$$\Big(\mathrm{O}_2, (k-3)y, -kx\Big) = u_1't, \quad \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big) = -k^{-1}p_3u_1't, \tag{3.77}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^5(R) \subset \mathcal{H}$.

Наконец, для элементов из (3.71) и (3.72) выполняются соотношения (3.44) и (3.45), а также соотношение

$$\Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Big) = (3-4k)^{-1}u_1'v_1w_1,$$

и, таким образом, $\mathrm{HH}^6(R) \subset \mathcal{H}$. □

Пусть $\mathcal{A}_3 = K\langle\mathcal{X}_3\rangle/I_3$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_3$ из (1.23), а I_3 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 3.20 и 3.23 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3$. Пусть $\mathcal{A}_3 = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_3^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_3$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (3a) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.24. *Для любого $m \geqslant 0$*

$$\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{3.79}$$

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 3.9 на кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$v_1 > w_1 > v_2 > v_3 > u_1' > t > p_1 > p_2 > p_3.$$

Сейчас мы в список элементарных шагов редукции включим следующие преобразования

$$v_2^2 \mapsto 2tp_3, \quad v_3^2 \mapsto -tp_1^2, \quad v_1u_1' \mapsto (k-3)w_1p_2.$$

Аналогично доказательству предложения 3.9 определяется нормальная форма элемента $a \in \mathcal{A}_3$ и устанавливается, что любой элемент из $\mathcal{A}_3$ допускает хотя бы одну нормальную форму. Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\left\{p_1^i\right\}_{i=0}^{k}, \ p_2, \ p_3;$$

мономы степени $4n$, $n > 0$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{v_1^{2(n-i-1)}w_1u_1't^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-1}, \quad v_1^{2n}p_2, \quad t^np_3;$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{v_1^{2(n-i)-1}w_1t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{u_1't^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-1}, \quad u_1't^np_3,$$
$$v_1^{2n-1}w_1p_2 \ (\text{для} \ \ n>0), \quad u_1'p_2 \ (\text{для} \ \ n=0);$$

мономы степени $4n+2$:

$$\Big\{v_1^{2(n-i)+1}t^i\Big\}_{i=0}^{n},\quad \Big\{v_1^{2(n-i)-1}w_1u_1't^i\Big\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\Big\{v_3t^np_1^j\Big\}_{j=0}^{k-2},\quad v_1^{2n+1}p_2,\ v_2t^n;$$

мономы степени $4n+3$:

$$\Big\{v_1^{2(n-i)+1}u_1't^i\Big\}_{i=0}^{n},\quad \Big\{v_1^{2(n-i)}w_1t^i\Big\}_{i=0}^{n},$$
$$\Big\{v_3u_1't^np_1^j\Big\}_{j=0}^{k-2},\quad v_1^{2n}w_1p_2,\ v_2u_1't^n;$$

(для $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$). С учётом следствия 2.21, пункт (1), отсюда вытекает равенство (3.79). □

Случай 3.2. Теперь предположим, что p делит $k-3$ (и по-прежнему $p\nmid k$). Заметим, что тогда $p\nmid 4k-3$.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $p_1,\,p_2,\,p_3$ из (2.13);

— степени 1 : $u_4:=\big(0,x\big),\ u_5:=\Big((xy)^k,0\Big)$;

— степени 2 : $v_1,\,v_2,\,v_3$ из (3.14);

— степени 3 : $w_1:=(y,0)$;

— степени 4 : $t:=(0,0,1)$.

Предложение 3.25. *Предположим, что p не делит k, но делит $k-3$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3'=\{p_1,p_2,p_3,u_4,u_5,v_1,v_2,v_3,w_1,t\} \tag{3.80}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.18), (3.20), (3.21), (3.23), (3.27), (3.28), (3.29), (3.31), *а также следующие соотношения*:

$$p_1^ku_4=p_2u_4=0,$$
$$p_iu_5=0 \text{ для } i=1,2,3;$$
$$u_4u_5=0;$$
$$u_5v_1=p_2w_1,\ u_5v_2=u_5v_3=0.$$
$$u_5w_1=u_5t=0.$$

Доказательство. Для некоторых элементов из $\mathcal{Y}_3'$ трансляции подходящих порядков уже известны, и нам надо лишь дополнительно вычислить трансляции для u_4 и u_5.

Лемма 3.26. *В качестве трансляций элементов* u_4 *и* u_5 *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_4) = \Big(0, x\otimes 1\Big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_4) = \begin{pmatrix} 0 & -\sum\limits_{i=1}^{k-1} i\cdot(yx)^i\otimes(xy)^{k-1-i} \\ 0 & x\otimes 1 - \sum\limits_{i=1}^{k-2} iy(xy)^i\otimes y(xy)^{k-2-i} \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(u_5) = \Big((xy)^k\otimes 1, 0\Big),$$
$$\mathrm{T}^1(u_5) = \begin{pmatrix} -(xy)^k\otimes 1 & 0 \\ 0 & -(xy)^k\otimes y(xy)^{k-2} \end{pmatrix}.$$

Теперь доказательство предложения 3.25 завершается с помощью прямых вычислений, и это мы предоставляем проделать читателю.□

Предложение 3.27. *Предположим, что* p *не делит* k, *но* p *делит* $k-3$. *Множество* $\mathcal{Y}_3'$, *указанное в* (3.80), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* K*-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_3'\cup\{1\}$. Как и в доказательстве предложения 3.16, нам достаточно доказать включение

$$\bigcup_{i=0}^{i=6}\mathrm{HH}^i(R)\subset\mathcal{H}. \tag{3.81}$$

Поскольку соотношения, связанные только с w_1, v_1, v_2, v_3, t, уже были представлены (см. доказательство предложений 3.7, 3.16 и 3.23), то мы для краткости приведем лишь новые соотношения, необходимые для получения включения (3.81):

$$p_1^i u_4 = \Big(y(xy)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 0\leqslant i\leqslant k-1,$$
$$p_3u_4 = \Big(0, xy)^k\Big), \quad u_4v_1 = -\Big(0, xy+yx\Big),$$
$$p_1^{i-1}u_4v_3 = -\Big(0, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 1\leqslant i\leqslant k-1,$$
$$u_4v_1 = k\Big(0, x(yx)^{k-1}\Big), \quad u_4w_1 = k\Big(0, (xy)^k, 0\Big),$$
$$u_4v_1^2 = k\Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big), \quad u_4t = \Big(\mathrm{O}_3, x\Big), \quad p_3u_4t = \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big),$$

$$p_1^i u_4 t = \Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$u_4 v_1 w_1 = k\Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Big).$$

Наконец, включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ для всех n устанавливается с помощью индукции аналогично доказательству предложения 3.7. □

Пусть $\mathcal{A}_3' = K\langle \mathcal{X}_3' \rangle / I_3'$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_3'$ из (1.25), а I_3' – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 3.25 и 3.27 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3' \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3'$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3'$. Пусть $\mathcal{A}_3' = \bigoplus_{m \geqslant 0} (\mathcal{A}_3')^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_3'$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (3b) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.28. *Для любого $m \geqslant 0$*

$$\dim_K (\mathcal{A}_3')^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{3.82}$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3']$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w_1 > v_1 > v_2 > v_3 > u_4 > u_5 > t > p_1 > p_2 > p_3.$$

Сейчас мы в список элементарных шагов редукции включим такие преобразования

$$v_2^2 \mapsto 2tp_3, \quad v_3^2 \mapsto -tp_1^2, \quad w_1 p_2 \mapsto v_1 u_5.$$

Как и выше, определяется нормальная форма элемента из $\mathcal{A}_3'$ и устанавливается, что любой элемент допускает хотя бы одну нормальную форму. Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\Big\{p_1^i\Big\}_{i=0}^k, \ p_2, \ p_3;$$

мономы степени $4n$, $n > 0$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i-1)}u_4 t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k-1}, \quad v_1^{2n}p_2, \quad t^n p_3;$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}u_4 t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i)-1} t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{u_4 t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k-1}, \quad u_4 t^n p_3, \quad v_1^{2n}u_5;$$

мономы степени $4n+2$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i)-1}u_4 t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_3 t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \quad v_1^{2n+1}p_2, \quad v_2 t^n;$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}u_4 t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i)} t^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_3 u_4 t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \quad v_1^{2n+1}u_5, \quad v_2 u_4 t^n;$$

(для $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$). С учётом следствия 2.21, пункт (1), отсюда вытекает равенство (3.82).

Случай 3.3. Теперь предположим, что p делит $4k-3$ (и по-прежнему $p \nmid k$). Заметим, что тогда $p \nmid k-3$.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : p_1, p_2, p_3 из (2.13);
— степени 1 : u_1' из (3.73);
— степени 2 : v_1, v_2, v_3 из (3.14);
— степени 3 : $w_4 := (0, x(yx)^{k-1})$;
— степени 4 : $t := (0,0,1)$.

Предложение 3.29. *Предположим, что p не делит k, но делит $4k-3$. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3'' = \{p_1, p_2, p_3, u_1', v_1, v_2, v_3, w_4, t\} \tag{3.83}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.18), (3.20), (3.21), (3.27), (3.28), (3.29), *а также следующие соотношения*:

$$p_1^k u_1' = 0;$$

$$p_i w_4 = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3;$$

$$v_2 w_4 = v_3 w_4 = 0.$$

Доказательство. Трансляции для большинства элементов (положительной степени) из $\mathcal{Y}_3''$ подходящих порядков уже известны, и нам осталось вычислить трансляции для w_4.

Лемма 3.30. *В качестве трансляций элемента w_4 можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{T}^0(w_4) = \Big(0, x(yx)^{k-1} \otimes 1\Big),\\
&\mathrm{T}^1(w_4) = \begin{pmatrix} 0 & -x(yx)^{k-1} \otimes 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x(yx)^{k-1} \otimes (yx)^{k-1} \end{pmatrix},\\
&\mathrm{T}^2(w_4) = \begin{pmatrix} 0 & x(yx)^{k-1} \otimes 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x(yx)^{k-1} \otimes x & 0 \end{pmatrix},\\
&\mathrm{T}^3(w_4) = \begin{pmatrix} 0 & -x(yx)^{k-1} \otimes 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x(yx)^{k-1} \otimes 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Теперь доказательство предложения 3.29 завершается с помощью прямых вычислений, и это мы предоставляем проделать читателю.

Предложение 3.31. *Предположим, что p не делит k, но p делит $4k-3$. Множество $\mathcal{Y}_3''$, указанное в* (3.83), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_3'' \cup \{1\}$. Как и в доказательстве предложения 3.16, нам достаточно доказать включение

$$\bigcup_{i=0}^{i=6} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}. \tag{3.84}$$

Поскольку соотношения, связанные только с u_1', v_1, v_2, v_3, t, ранее были представлены, то мы для краткости приведем лишь новые соотношения, необходимые для получения включения (3.84):

$$\begin{aligned}
&p_1^i u_1' = -3\Big(y(xy)^i, 0\Big) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&p_2 u_1' = (k-3)\Big(xy)^k, 0\Big), \quad p_3 u_1' = -k\Big(0, xy)^k\Big),\\
&p_1^{i-1} u_1' v_3 = \frac{1}{3}\Big(0, y(xy)^i\Big) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant i \leqslant k-2,\\
&u_1' v_1 = (k-3)\Big(y, 0\Big), \quad u_1' v_2 = k\Big(0, xy + yx\Big),\\
&u_1' w_4 = -(k-3)\Big(0, (xy)^k, 0\Big), \quad u_1' v_1^2 = (k-3)(y, \mathrm{O}_3),\\
&p_2 u_1' v_1^2 = (k-3)\Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\Big),\\
&v_1 w_4 = \Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big), \quad u_1' v_1 w_4 = -(k-3)\Big(0, (xy)^k, \mathrm{O}_2\Big).
\end{aligned}$$

Наконец, включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ для всех n устанавливается с помощью индукции аналогично доказательству предложения 3.7. □

Пусть $\mathcal{A}_3'' = K\langle \mathcal{X}_3'' \rangle / I_3''$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_3''$ из (1.27), а I_3'' – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 3.29 и 3.31 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3'' \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3''$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3''$. Пусть $\mathcal{A}_3'' = \bigoplus_{m \geqslant 0} \left(\mathcal{A}_3''\right)^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_3''$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (3с) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.32. *Для любого $m \geqslant 0$*

$$\dim_K \left(\mathcal{A}_3''\right)^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{3.85}$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3'']$ введём лексикографический порядок такой, что

$$v_1 > v_2 > v_3 > w_4 > u_1' > t > p_1 > p_2 > p_3.$$

Сейчас мы в список элементарных шагов редукции включим такие преобразования

$$v_2^2 \mapsto 2tp_3, \quad v_3^2 \mapsto -tp_1^2.$$

Как и выше, определяется нормальная форма элемента из $\mathcal{A}_3''$ и устанавливается, что любой элемент допускает хотя бы одну нормальную форму. Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\left\{p_1^i\right\}_{i=0}^k,\ p_2,\ p_3;$$

мономы степени $4n$, $n > 0$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n-1},\quad \left\{v_1^{2(n-i-1)}w_4u_1't^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-1},\quad v_1^{2n}p_2,\quad t^np_3;$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n-1},\quad \left\{v_1^{2(n-i)-1}w_4t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{u_1't^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-1},\quad u_1't^np_3,\quad v_1^{2n}u_1'p_2;$$

мономы степени $4n+2$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{v_1^{2(n-i)-1}w_4u_1't^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_3t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2},\quad v_1^{2n+1}p_2,\quad v_2t^n;$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n},\quad \left\{v_1^{2(n-i)}w_4t^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_3u_1't^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2},\quad v_1^{2n+1}u_1'p_2,\quad v_2u_1't^n;$$

(для $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$). С учётом следствия 2.21, пункт (1), отсюда вытекает равенство (3.85). □

Случай 4. Теперь предположим, что p делит k (и $p \notin \{2,3\}$). Из предложений 2.8, 2.9, 2.11, 2.12, 2.14, 2.15 и 2.17 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.33. *Предположим, что* $p \neq 3$ *и* $p \mid k$. *Тогда:*

(a) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(y(xy)^i, 0\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big((xy)^k, 0\Big), \ \Big(0, (xy)^k\Big);$$

(b) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (3.64) *и* (3.65)*;*

(c) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(0, y(xy)^i\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\Big(y, 0\Big), \ \Big((xy)^k, 0\Big), \ \Big(0, xy + yx\Big), \ \Big(0, x(yx)^{k-1}\Big);$$

(d) *пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\mathrm{O}_2, (xy)^i + (yx)^i\Big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(1, \mathrm{O}_2), \ \Big(x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big), \ \Big(0, (xy)^k, 0\Big),$$
$$(\mathrm{O}_2, 1), \ \Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^{k-1}\Big) \ \Big(\mathrm{O}_2, (xy)^k\Big).$$

Аналогично предложению 3.2 доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.34. (a) *Пространство* $\mathrm{HH}^5(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\Big(\mathrm{O}_2, y(xy)^i, 0\Big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$(y, \mathrm{O}_3), \ \Big((xy)^k, \mathrm{O}_3\Big), \ \Big(0, x(yx)^{k-1}, \mathrm{O}_2\Big), \ \Big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\Big).$$

(b) *Пространство* $\mathrm{HH}^6(R)$ *имеет в качестве базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (3.71) *и* (3.72).

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $p_1,\, p_2,\, p_3$ из (2.13);

— степени 1 : $u_1'' := (y, 0),\ u_3 := (0, (xy)^k)$;

— степени 2 : $v_1,\, v_2,\, v_3$ из (3.14);

— степени 3 : $w_1 := (y, 0),\ \widetilde{w}_2 := (0, y),\ w_3 := (0, xy + yx)$;

— степени 4 : $t := (0, 0, 1)$.

Предложение 3.35. *Предположим, что* $p \notin \{2, 3\}$ *и* p *делит* k. *Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_4 = \{p_1, p_2, p_3, u_1'', u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, \widetilde{w}_2, w_3, t\} \tag{3.86}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (3.18), (3.20), (3.21), (3.23), (3.28), (3.29), (3.31), *а также следующие соотношения*:

$$\begin{gathered}
p_1^k u_1'' = p_3 u_1'' = 0,\\
p_i u_3 = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3;\\
u_1'' u_3 = 0;\\
p_1^k \widetilde{w}_2 = p_2 \widetilde{w}_2 = p_3 \widetilde{w}_2 = 0,\\
p_i w_3 = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3;\\
p_2 w_1 = p_2 u_1'' v_1,\\
u_1'' v_3 + p_1 \widetilde{w}_2 = 0, \quad u_1'' v_2 = 0,\\
u_3 v_i = 0 \ \text{ для } \ i = 1, 2, 3;\\
u_1'' \widetilde{w}_2 = u_1'' w_3 = 0;\\
u_3 w_1 = u_3 \widetilde{w}_2 = u_3 w_3 = 0;\\
v_1 w_3 = v_3 w_3 = 0;\\
v_i \widetilde{w}_2 = 0 \text{ для } i = 1, 2, 3;\\
v_2 w_3 + 2 u_3 t = 0;\\
w_1 \widetilde{w}_2 = w_1 w_3 = \widetilde{w}_2 w_3 = 0.
\end{gathered}$$

Доказательство. Трансляции подходящих порядков для большинства элементов (положительной степени) из $\mathcal{Y}_4$ уже известны; нам осталось вычислить трансляции для u_3 и w_3.

Лемма 3.36. *В качестве трансляций элементов u_3 и w_3 можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_3) = \Big(0, (xy)^k \otimes 1\Big), \quad \mathrm{T}^1(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (xy)^k \otimes 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_3) = \Big(0, x \otimes y + y \otimes x\Big), \quad \mathrm{T}^1(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y \otimes y & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{23} = x \otimes x^2 - x^2 \otimes x + 2 \cdot 1 \otimes x^3 - 2 \cdot x^3 \otimes 1;$$

$$\mathrm{T}^2(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x(yx)^{k-1} \otimes (xy)^{k-1} \\ 0 & 0 & -x^2 \otimes y - y \otimes x^2 & -x \otimes x^2 - x^3 \otimes 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^3(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_3))_{24} = \sum_{i=0}^{k-1} x(yx)^i \otimes (xy)^{k-1-i}.$$

Теперь доказательство предложения 3.35 завершается с помощью прямых вычислений, и это мы предоставляем проделать читателю.□

Предложение 3.37. *Предположим, что $p \neq 3$ и p делит k. Множество $\mathcal{Y}_4$, указанное в* (3.86), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_4 \cup \{1\}$. Как и в доказательстве предложения 3.16, нам достаточно доказать включение

$$\bigcup_{i=0}^{i=6} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}.$$

Соотношения, связанные с $u_1'', v_1, v_2, v_3, w_1, \widetilde{w}_2, t$, уже были представлены. Оказывается, что лишь для доказательства включения $\mathrm{HH}^5(R) \subset \mathcal{H}$ понадобится одно дополнительное соотношение, а именно $u_3 t = \big(\mathrm{O}_3, (xy)^k\big)$. Наконец, включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$ для всех n устанавливается с помощью индукции аналогично доказательству предложения 3.7. □

Пусть $\mathcal{A}_4 = K\langle\mathcal{X}_4\rangle/I_4$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $\mathcal{X}_4$ из (1.29), а I_4 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 3.35 и 3.37 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_4 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_4$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_4$. Пусть $\mathcal{A}_4 = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_4^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_4$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (4) теоремы 1.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 3.38. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_4^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R). \tag{3.87}$$

Доказательство. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_4]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$w_1 > \widetilde{w}_1 > v_1 > v_2 > v_3 > w_3 > u_1'' > u_3 > t > p_1 > p_2 > p_3.$$

Сейчас мы в список элементарных шагов редукции включим такие преобразования

$$\begin{aligned} &\widetilde{w}_2 p_1 \mapsto -v_3 u_1'', \qquad && w_1 p_2 \mapsto v_1 u_1'' p_2,\\ &v_2^2 \mapsto 2tp_3, && v_3^2 \mapsto -tp_1^2,\\ &\widetilde{w}_2 v_3 \mapsto u_1'' t p_1, && v_2 w_3 \mapsto -2u_3 t. \end{aligned}$$

Как и выше, определяется нормальная форма элемента из $\mathcal{A}_4$ и устанавливается, что любой элемент допускает хотя бы одну нормальную форму. Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\left\{p_1^i\right\}_{i=0}^k,\ p_2,\ p_3;$$

мономы степени $4n$, $n > 0$:

$$\begin{aligned} &\left\{v_1^{2(n-i)} t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{w_1 v_1^{2(n-i-1)} u_1'' t^i\right\}_{i=0}^{n-1},\\ &\left\{t^n p_1^j\right\}_{j=0}^{k}, \quad v_1^{2n} p_2, \quad t^n p_3; \end{aligned}$$

мономы степени $4n+1$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)}u_1''t^i\right\}_{i=0}^{n-1}, \quad \left\{w_1v_1^{2(n-i)-1}t^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{u_1''t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-1}, \quad u_3t^n, \quad v_1^{2n}u_1''p_2;$$

мономы степени $4n+2$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{w_1v_1^{2(n-i)-1}u_1't^i\right\}_{i=0}^{n-1},$$
$$\left\{v_3t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \quad v_1^{2n+1}p_2, \quad v_2t^n;$$

мономы степени $4n+3$:

$$\left\{v_1^{2(n-i)+1}u_1''t^i\right\}_{i=0}^{n}, \quad \left\{w_1v_1^{2(n-i)}t^i\right\}_{i=0}^{n},$$
$$\left\{v_3u_1''t^np_1^j\right\}_{j=0}^{k-2}, \quad v_1^{2n+1}u_1''p_2, \quad w_3t^n;$$

(для $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$). С учётом следствия 2.21, пункт (3), отсюда вытекает равенство (3.87). $\square$

Литература

1. S. F. Siegel, S. J. Witherspoon, *The Hochschild cohomology ring of a group algebra.* — Proc. London Math. Soc. **79** (1999), 131–157.
2. K. Erdmann, Th. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math. **11** (1999), 177–201.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–122.
4. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lect Notes Math. **1428**, Berlin, Heidelberg, 1990.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 1, 55–107.
6. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.

10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 2, 1–51.
11. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 4, 39–82.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 5, 70–123.
13. T. Hayami, *Hochschild cohomology ring of the integral group ring of dihedral groups.* — Tsukuba J. Math. **31** (2007), 99–127.
14. K. Erdmann, Th. Holm, N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* II. — Algebras and Repr. Theory **5** (2002), 457–482.
15. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
16. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
17. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
18. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
19. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия $Q(2\mathcal{B})_1(k,s,a,c)$ над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 63–72.
20. Th. Holm, *Hochschild cohomology of tame blocks.* — J. Algebra **271** (2002), 798–826.
21. M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring.* — Ann. Math. **78** (1963), 267–288.
22. M. Gerstenhaber, S. D. Schack, *Algebraic cohomology and deformation theory.* — In: Deformation theory of algebras and structures and applications, eds. M. Hazewinkel, M. Gerstenhaber, Kluwer Acad. Publ., NATO ASI Ser., Ser. C: Math. and Phys. Sci. **247** (1988), pp. 11–264.

Generalov A. I. Hochschild cohomology for algebras of semidihedral type, II. Local algebras.

We describe in terms of generators and relations the Hochschild cohomology algebra for a family of local algebras of semidihedral type over the ground field that has the characteristic not equal to 2. In the corresponding calculations, we use the free bimodule resolution which was constructed in the another author's paper.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 13 ноября 2010 г.