Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 386, 2011 г.

С. В. Востоков, М. А. Иванов

ЗАКОН ВЗАИМНОСТИ ЭЙЗЕНШТЕЙНА ДЛЯ ФОРМАЛЬНЫХ ГРУПП ЛЮБИНА–ТЕЙТА

Введение

Классический закон взаимности Эйзенштейна дает условия равенства степенных вычетов в круговом поле, когда один из аргуметов лежит в основном поле: пусть $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ – круговое расширение ($p \neq 2$ – нечетное простое число, ζ_p – первообразный корень степени p из 1), $a \in \mathbb{Q}^*$, $\alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$, причем $\alpha \equiv b \bmod (\zeta_p - 1)^2$ для некоторого $b \in \mathbb{Z}$, $(ab, p) = 1$, $(a, \alpha) = 1$; тогда

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)_p = \left(\frac{\alpha}{a}\right)_p \tag{1}$$

(см. [1]).

Закон взаимности теории полей классов связывает произведение степенных вычетов с локальными символами норменного вычета, в частности для кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_p)$

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right)_p \left(\frac{\alpha}{a}\right)_p^{-1} = \left(\frac{a,\, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_p,$$

где $\mathfrak{p} = (\zeta_p - 1)$ – простой идеал в $\mathbb{Q}(\zeta_p)$. Поэтому равенство (1) сводится к исследованию тривиальности локального символа норменного вычета $\left(\frac{a,\,\alpha}{p}\right)$. Используя это соображение, а также явные формулы для символа норменного вычета (см. [2]), в работе [6] закон взаимности Эйзенштейна обобщается на произвольное круговое поле $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, $n \neq 2$.

В настоящей работе рассматривается обобщенный символ норменного вычета на формальных модулях Любина–Тейта и исследуется тривиальность этого символа, когда первый аргумент лежит в

Ключевые слова: формальные группы, символ Гильберта.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00777-а. Также авторы благодарят СПбГУ за поддержку исследований.

поле определения формальной группы. Пусть k – локальное поле, над кольцом целых $\mathfrak{o}$ которого определена формальная группа Любина–Тейта $F(X,Y)$, соответствующая простому элементу π поля k, пусть $[\pi]_F(X)$ – изогения для π, и расширение k' поля k содержит все корни изогении $[\pi^n]_F(X)$. Пусть $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал поля k' и $F(\mathfrak{M})$ – формальный модуль на идеале $\mathfrak{M}$. На поле k' определен обобщенный символ норменного вычета:

$$(\, , \,)_{F,n}: \quad k'^{*} \times F(\mathfrak{M}) \to \ker [\pi^n]_F$$

$$(\alpha, \beta)_{F,n} = \rho^{\sigma_\alpha} -_F \rho,$$

где σ_α – автоморфизм из $\mathrm{Gal}(k'^{alg}/k')$, соответствующий элементу α в системе локальной теории полей классов, а ρ – элемент алгебраического замыкания поля k, получающийся делением точки β на изогению $[\pi^n]_F$, то есть $[\pi^n]_F(\rho) = \beta$ (см. [3, 4]).

Теорема. *Пусть $k' = k(\xi)$, $[\pi](\xi) = 0$, $\xi \neq 0$, – поле деления круга для формальной группы Любина–Тейта $F(X,Y)$. Тогда для $a \in \mathfrak{o}^*$, $\beta \in F(\mathfrak{M})$ имеем*

$$(a, \beta)_{F,1} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \, \underline{\beta}'(0) \equiv 0 \bmod \pi,$$

где $\underline{\beta}(X)$ – произвольный ряд из кольца $\mathfrak{o}[[X]]$, такой что $\underline{\beta}(\xi) = \beta$.

Теорема. *Пусть $k' = k(\xi)$, $[\pi^n]_F(\xi) = 0$, $[\pi^{n-1}]_F(\xi) \neq 0$. Тогда для $a \in \mathfrak{o}^*$*

$$(a, \beta)_F = 0 \ \forall \beta \Leftrightarrow \frac{a^{q-1} - 1}{\pi} \equiv 0 \bmod \pi^n.$$

Для доказательства этих теорем используются явные формулы для обобщенного символа норменного вычета $(\, , \,)_{F,n}$. Такие формулы впервые были получены Востоковым в работе [3], однако в этих формулах требовалось, чтобы разложение первого аргумента α в $(\alpha, \beta)_{F,n}$ из мультипликативной группы k'^* начиналось с представителя Тайхмюллера (подробнее см. [3, с. 788]). Такое ограничение не позволяет использовать эти формулы напрямую для обобщения закона взаимности Эйзенштейна на формальные группы Любина–Тейта. Поэтому в настоящей работе мы избавляемся от этого ограничения в формуле работы [3] (см. ниже §1.5). В первом параграфе доказываются вспомогательные результаты, а основные теоремы проверяются в последнем параграфе.

1. Вспомогательные результаты

1.1. Обозначения

• k – локальное поле характеристики 0 с полем вычетов нечетной характеристики p,

• k' – конечное расширение k,

• T', T – подполя инерции в расширении k'/k и $k'/\mathbb{Q}_p$ соответственно,

• $\mathfrak{o}$ – кольцо целых поля k,

• $\mathfrak{o}_{T'}, \mathfrak{o}_T$ – кольца целых полей T' и T соответственно,

• $\mathfrak{o}'$ – кольцо целых поля k',

• π – простой элемент в $\mathfrak{o}$,

• π' – простой элемент в $\mathfrak{o}'$,

• $\mathfrak{M}$ – максимальный идеал поля k',

• $q = p^f$ – порядок поля вычетов k,

• e – индекс ветвления k'/T,

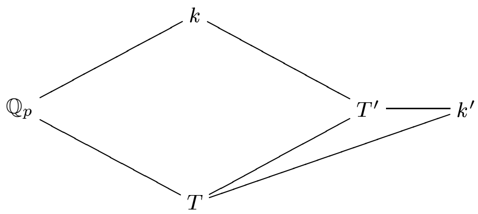
• $\triangle$ – автоморфизм Фробениуса в T'/k,

• $\mathfrak{R}$ – система представителей Тайхмюллера в поле T',

• $\mathrm{Tr}\ : T' \to k$ – оператор следа,

• $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$ такой, что $\underline{\alpha}(\pi') = \alpha$,

• $d = \frac{d}{dX}$.



Пусть $F(X, Y)$ – одномерная коммутативная формальная группа Любина–Тейта, определенная над кольцом $\mathfrak{o}$. Она определяет $\mathfrak{o}$-модуль $F(\mathfrak{M})$ (см. [3, 4]). Обозначим $\lambda(X) = X + c_2X^2 + \sum\limits_{j=3}^{\infty} c_jX^j$ – ее логарифм, а $[\pi](X) = \pi X + \pi CX^2 + X^q + \pi \sum\limits_{i=3}^{\infty} g_kX^k$ – изогению элемента π. Пусть поле k' содержит все корни изогении $[\pi^n]$ и ξ – первообразный корень этой изогении, то есть $[\pi^n](\xi) = 0$, а $[\pi^{n-1}](\xi) \neq 0$.

Определим действие оператора $\triangle$ на $\mathfrak{o}_{T'}\{\{X\}\}$:

$$\triangle\left(\sum a_i X^i\right) = \left(\sum a_i X^i\right)^{\triangle} = \sum a_i^{\triangle} X^{qi}.$$

Введем ряд $\underline{\xi}(X)$ из $\mathfrak{o}_T$ такой, что $\underline{\xi}(\pi') = \xi$. Пусть $s_m(X) = [\pi^m](\underline{\xi}(X))$. Будем обозначать $s_n(X)$ просто $s(X)$. Через $u(X)$ обозначим $\frac{s_n(X)}{s_{n-1}(X)}$.

Построим логарифмы Артина–Хассе. Для мультипликативной группы: для любого $\varphi(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$

$$\ell_m(\varphi) = \frac{1}{q}\log\left(\frac{\varphi^q}{\varphi^{\triangle}}\right),$$

или если $\varphi(X) \in 1 + X\mathfrak{o}_T[[X]]$, то

$$\ell_m(\varphi) = \left(1 - \frac{\triangle}{q}\right)\log(\varphi).$$

Для формальной группы логарифм Артина–Хассе задается формулой: для любого $\psi(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$

$$\ell_F(\psi) = \left(1 - \frac{\triangle}{\pi}\right)\lambda(\psi).$$

Теперь можно определить спаривание

$$k'^{*} \times F(\mathfrak{M}) \to \ker[\pi^n]_F,$$
$$\langle \alpha,\, \beta\rangle = \left[\mathrm{Tr}\ \mathrm{res}\ \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})V\right]_F(\xi),$$

где

$$\Phi(\underline{\alpha},\, \underline{\beta}) = \ell_F(\underline{\beta})\,\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha} - \ell_m(\underline{\alpha})\,d\left(\tfrac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\right) \tag{2}$$
$$V = \frac{1}{s} - c_2,$$

где c_2 – коэффициент при X^2 в логарифме формальной группы.

В работе мы будем использовать те же обозначения для спаривания $\langle\underline{\alpha},\, \underline{\beta}\rangle = \left(\mathrm{Tr}\ \mathrm{res}\ \Phi(\underline{\alpha},\, \underline{\beta})V\right) \bmod \pi^n$.

Легко видеть, что спаривание $\langle\alpha,\, \beta\rangle$ (а также $\langle\underline{\alpha},\, \underline{\beta}\rangle$) имеет следующие свойства:

$$\begin{gathered}
\langle\alpha_1\,\alpha_2,\, \beta\rangle = \langle\alpha_1,\, \beta\rangle +_F \langle\alpha_2,\, \beta\rangle,\\
\langle\alpha,\, \beta_1 +_F \beta_2\rangle = \langle\alpha,\, \beta_1\rangle +_F \langle\alpha,\, \beta_2\rangle\\
\langle\alpha^a,\, \beta\rangle = [a]_F\langle\alpha,\, \beta\rangle,\\
\langle\alpha,\, [c]_F\beta\rangle = [c]_F\langle\alpha,\, \beta\rangle,
\end{gathered} \tag{3}$$

где $a \in \mathbb{Z}_p$, $c \in \mathfrak{o}_k$.

1.2. Несколько лемм

Лемма 1.1. *В обозначениях предыдущего параграфа:*

1. $c_m\pi^{m-1} \in \mathfrak{o}$, *для коэффициентов* c_m *логарифма* $\lambda(X)$.
2. *Свойства* $s_m : ds_m \underset{\pi^m}{\equiv} 0$, $s^\Delta \underset{\pi^n}{\equiv} s_{n-1}^{\Delta^\Delta}$, $\frac{1}{s} \underset{\pi^n}{\equiv} \frac{1}{s_{n-1}^\Delta}$.
3. $-c_2 = \frac{C}{\pi-1}$.
4. *Если* $G(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ *такой ряд, что* $G(\pi') = 0$, *то существует ряд* $\psi(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ *такой, что* $G(X) = u(X)\psi(X)$.
5. *Для любых* $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ *выполнено* $\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]X^{-1}$.
6. *Ряд* $\ell_m(\underline{\alpha})$ *корректно определен, и* $p^{f-1}\ell_m(\underline{\alpha}) \in \mathfrak{o}_T[[X]]$.
7. *Для любого ряда* $h \in \mathfrak{o}_T((X))$ *выполнено* $dh^\Delta = X^{-1}q\,(Xdh)^\Delta$.
8. *Для любого ряда* $h \in \mathfrak{o}_T((X))^*$ *выполнено* $h^{-1}dh = d\ell_m(h) + X^{-1}\left(Xh^{-1}dh\right)^\Delta$.

Доказательство.

1. см. [3, §1, п. 1].
2. см. [3, §1, п. 4].
3. Так как $\lambda(X) = X + c_2X^2 + \cdots$, то $\lambda^{-1}(X) = X - c_2X^2 + \cdots$. Поэтому

$$\begin{aligned}[\pi]_F(X) &= \lambda^{-1}(\pi\lambda(X)) \\ &= \left(\pi X + \pi c_2X^2 + \cdots\right) - c_2\left(\pi X + \pi c_2X^2 + \cdots\right)^2 + \cdots \\ &= \pi X - \pi(\pi-1)c_2X^2 + \cdots .\end{aligned}$$

   А так как мы обозначили $[\pi]_F(X) = \pi X + \pi CX^2 + \cdots$, то получаем, что $-c_2 = \frac{C}{\pi-1}$.
4. См. [2, §2, лемма 6].
5. См. [3, §5, лемма 12].
6. См. [3, в доказательстве леммы 12].
7. Так как это тождество линейное, его достаточно доказать для одночленов. Подставив $h(X) = X^i$, получаем, что обе части равны qiX^{qi-1}.
8. Пусть $h(X) = aX^m\varepsilon(X)$, где $a \in \mathfrak{o}_T^*$, $\varepsilon \equiv 1 \bmod X$. Тогда из определения функции ℓ_m следует, что $\ell_m(h) = \ell_m(a) + \ell_m(\varepsilon)$ и, значит, $d\ell_m(h) = d\ell_m(\varepsilon)$, так как $\ell_m(a) \in \mathfrak{o}_T$.

Далее $\ell_m(\varepsilon) = (1 - \frac{\triangle}{q})\log\varepsilon$, откуда, используя тождество п. 7, получаем $d\ell_m(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}d\varepsilon - X^{-1}(X\varepsilon^{-1}d\varepsilon)^{\triangle}$. Кроме того, для $h(X) = aX^m\varepsilon(X)$ имеем $h^{-1}dh = mX^{-1} + \varepsilon^{-1}d\varepsilon$. Значит,

$$\begin{aligned} d\ell_m(h) + X^{-1}(Xh^{-1}dh)^{\triangle} &= \varepsilon^{-1}d\varepsilon + X^{-1}(X(h^{-1}dh - \varepsilon^{-1}d\varepsilon))^{\triangle} \\ &= \varepsilon^{-1}d\varepsilon + X^{-1}(XmX^{-1})^{\triangle} \\ &= \varepsilon^{-1}d\varepsilon + mX^{-1} = h^{-1}dh. \end{aligned}$$

□

Замечание 1.2. Из леммы 1.1, пп. 2, 3 следует, что ряд V в формуле (2) можно заменить на

$$\frac{1}{s_{n-1}^{\triangle}} + \frac{C}{\pi - 1}.$$

Лемма 1.3. *Для любого $m \geqslant 1$ выполнено сравнение*

$$c_m \frac{u^{\triangle m}}{\pi}(1 - \pi\triangle)V \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 1).$$

Доказательство. Заметим, что

$$u = \frac{s_n}{s_{n-1}} = \frac{[\pi](s_{n-1})}{s_{n-1}} = \pi + \pi C s_{n-1} + s_{n-1}^2 f(s_{n-1}),$$

где $f \in \mathfrak{o}[[X]]$. Тогда

$$u^{\triangle m} \equiv \pi^m + \pi^m m C s_{n-1}^{\triangle} \bmod (s_{n-1}^2)^{\triangle}. \tag{4}$$

Откуда получаем

$$c_m \frac{u^{\triangle m}}{\pi}\,\frac{1}{s_{n-1}^{\triangle}} \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\triangle}} + c_m \pi^{m-1} m C \bmod \deg 1,$$

и, значит, (пользуясь замечанием 1.2)

$$c_m \frac{u^{\triangle m}}{\pi} V \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\triangle}} + c_m \pi^{m-1} m C + c_m \frac{u^{\triangle m}}{\pi}\,\frac{C}{\pi - 1} \bmod \deg 1. \tag{5}$$

Далее

$$\frac{u^{\Delta m}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} = \frac{u^{\Delta m}}{s^{\Delta}} \cdot \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} = \frac{u^{\Delta(m-1)}}{s_{n-1}^{\Delta}} \cdot \frac{u^{\Delta} s_{n-1}^{\Delta}}{s^{\Delta}} \cdot \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} = \frac{u^{\Delta(m-1)}}{s_{n-1}^{\Delta}} \cdot \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}},$$

так как $u = \frac{s}{s_{n-1}}$. Используя вид $u^{\Delta m}$, получаем

$$\begin{aligned} c_m \frac{u^{\Delta m}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} &\equiv c_m \left(\frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\Delta}} + \pi^{m-1}(m-1)C \right) \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} \\ &\equiv c_m \pi^{n-1} \left(\frac{1}{s_{n-1}^{\Delta}} + (m-1)C \right) \frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} \bmod \deg 1. \end{aligned}$$

По лемме 1.1, п. 1, первый сомножитель имеет целые коэффициенты, а по п. 2 $\frac{s^{\Delta}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} \equiv 1 \bmod \pi^n$, значит

$$c_m \frac{u^{\Delta m}}{s_{n-1}^{\Delta\Delta}} \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\Delta}} + c_m \pi^{m-1}(m-1)C \bmod (\pi^n, \deg 1).$$

Отсюда (пользуясь замечанием 1.2)

$$c_m u^{\Delta m} V^{\Delta} \equiv c_m \frac{\pi^{m-1}}{s_{n-1}^{\Delta}} + c_m \pi^{m-1}(m-1)C + c_m u^{\Delta m} \frac{C}{\pi - 1}. \tag{6}$$

Вычитая из сравнения (5) сравнение (6), получаем

$$\begin{aligned} c_m \frac{u^{\Delta m}}{\pi}(1 - \pi\,\Delta)V &\equiv c_m \pi^{m-1} C - c_m U^{\Delta m} \frac{C}{\pi} \\ &= c_m C \left(\pi^{n-1} - \frac{u^{\Delta m}}{\pi} \right) \bmod (\pi^n, \deg 1). \end{aligned}$$

Осталось заметить, что согласно сравнению (4) $\pi^{n-1} - \frac{u^{\Delta m}}{\pi} \equiv 0 \bmod \deg 1$, откуда следует сравнение нашей леммы. □

1.3. Независимость спаривания по второму аргументу

Независимость спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ по второму аргументу означает, что спаривание $\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle$ не зависит от способа разложения элемента β из $F(\mathfrak{M})$ в степенной ряд по униформизующей π' с коэффициентами из $\mathfrak{o}_{T'}$. Из линейности спаривания по второму аргументу (см. (3)) нам достаточно доказать, что

$$\langle \underline{\alpha}, \underline{\beta} \rangle = 0, \quad \text{если} \quad \underline{\beta}(\pi') = 0.$$

Лемма 1.4. *Если* $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ *и* $\underline{\beta}(\pi') = 0$, *то для любого* $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$ *выполнено сравнение*

$$\ell_m(\underline{\alpha})\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})dV \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 0). \tag{7}$$

Доказательство. Так как $\frac{1}{s} \equiv \frac{1}{s_{n-1}^{\triangle}} \bmod \pi^n$, то

$$d\frac{1}{s} \equiv X^{-1}q\left(X\,d\frac{1}{s_{n-1}}\right)^{\triangle} \bmod \pi^n,$$

тем самым сравнение (7) равносильно

$$\left(\frac{q}{\pi}\ell_m(\underline{\alpha})\right)X^{-1}\left(X\lambda(u\psi)d\frac{1}{s_{n-1}}\right)^{\triangle} \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 0). \tag{8}$$

Согласно лемме 1.1, п. 4, $\underline{\beta} = u\psi$, для некоторого ряда $\psi(X) \in X\mathfrak{o}_{T'}[[X]]$. Кроме того, $\frac{q}{\pi}\ell_m(\underline{\alpha}) \in \mathfrak{o}_T[[X]] \subset \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ и, значит, сравнение (8) сводится к проверке сравнения

$$\lambda(u\psi)d\left(\frac{1}{s_{n-1}}\right) \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 0).$$

Из определения рядов u, λ и s_{n-1} следует, что

$$\lambda(u\psi) = \pi a + a_0X^e + a_1\frac{X^{qe}}{\pi} + a_2\frac{X^{2qe}}{\pi^2} + \cdots,$$

где a, $a_i \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$. Далее,

$$ds_{n-1} \equiv 0 \bmod \pi^{n-1},$$

(см. лемму 1.1, п. 2). Кроме того,

$$\frac{1}{s_{n-1}} \in X^{-\frac{e}{q-1}}\mathfrak{o}\Big[\Big[X\Big]\Big]\Big[\Big[\pi X^{-\frac{e}{q}}\Big]\Big]$$

по определению s_{n-1}. Поэтому

$$\begin{aligned} d\frac{1}{s_{n-1}} &= \frac{ds_{n-1}}{s_{n-1}^2} \\ &= \pi^{n-1}\left(b_0X^{-\frac{2e}{q-1}} + b_1\pi X^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{e}{q}} + b_2\pi^2X^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{2e}{q}} + \cdots\right), \end{aligned}$$

где $b_i \in \mathfrak{o}[[X]]$. Откуда

$$\lambda(u\psi)d\frac{1}{s_{n-1}} = \pi^{n-1}\left(\pi a + a_0 X^e + a_1\frac{X^{qe}}{\pi} + a_2\frac{X^{2qe}}{\pi^2} + \cdots\right)$$
$$\times\left(b_0 X^{-\frac{2e}{q-1}} + b_1\pi X^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{e}{q}} + b_2\pi^2 X^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{2e}{q}} + \cdots\right).$$

Осталось проверить, что коэффициенты при отрицательных степенях делятся на π^n. Действительно рассмотрим произведение

$$\pi^{n-1}\frac{1}{\pi^m}a_m X^{mqe}\cdot\pi^r b_r X^{-\frac{2e}{q-1}-\frac{re}{q}}.$$

Надо проверить, что если: $mqe < \frac{2e}{q-1} - \frac{re}{q}$, то: $n-1-m+r \geqslant n \Leftrightarrow r \geqslant m+1$. Последнее проверяется непосредственно. □

Лемма 1.5. *Если* $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ *и* $\underline{\beta}(\pi') = 0$, *то при любом* $\alpha(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$ *выполнено*

$$\operatorname{res}\Phi(\underline{\alpha},\underline{\beta})V \equiv \operatorname{res}\left(\lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V - \frac{1}{q}\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle}V\right) \bmod \pi^n.$$

Доказательство. Из предыдущей леммы и очевидного равенства

$$\begin{aligned}0 &= \operatorname{res} d\left(\ell_m(\underline{\alpha})\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})V\right)\\ &= \operatorname{res}\left(d\left(\ell_m(\underline{\alpha})\right)\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})V + \ell_m(\underline{\alpha})d\left(\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\right)V + \ell_m(\underline{\alpha})\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})dV\right)\end{aligned}$$

следует, что

$$\operatorname{res}\ell_m(\underline{\alpha})d(\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta}))V \equiv -\operatorname{res} d(\ell(\underline{\alpha}))\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})V \bmod \pi^n.$$

Отсюда и из определения ряда Φ (см. (2)) получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\Phi V &\underset{\pi^n}{\equiv} \operatorname{res}\left(\ell_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V + d\ell_m(\underline{\alpha})\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})V\right)\\ &= \operatorname{res}\left(\ell_F(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V + \frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V - \frac{1}{q}\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle}V\right)\\ &= \operatorname{res}\left(\lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}V - \frac{1}{q}\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle}V\right).\end{aligned}$$

□

Лемма 1.6. *При выполнении условий леммы* 1.4 *имеем*

$$\operatorname{res}\,\Phi V \equiv \operatorname{res}\,\big(X^{-1}(1-\triangle)(X\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V)\big) \equiv 0 \bmod \pi^n.$$

Доказательство. Так как $d\underline{\alpha}^{\triangle} = qX^{q-1}(d\underline{\alpha})^{\triangle}$, то ряд

$$h = \frac{1}{q}X\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle} \in \mathfrak{o}_T[[X]].$$

Поэтому сравнение леммы 1.3 дает сравнение для $\underline{\beta} = u\psi$:

$$\frac{1}{q}X\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle}\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})(1-\pi\,\triangle)V \equiv 0 \bmod (\pi^n, \deg 1).$$

Откуда

$$\operatorname{res}\,\frac{1}{q}\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle}\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})V \equiv \operatorname{res}\,\frac{1}{q}\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle}\lambda(\underline{\beta})^{\triangle}V^{\triangle} \bmod \pi^n.$$

Тогда, используя лемму 1.5, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\,\Phi V &= \operatorname{res}\,\left(\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V - \frac{1}{q}\underline{\alpha}^{-\triangle}d\underline{\alpha}^{\triangle}\lambda(\underline{\beta})^{\triangle}V^{\triangle}\right)\\ &\equiv \operatorname{res}\,X^{-1}\left(X\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V - (X\underline{\alpha}^{-1}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V)^{\triangle}\right)\\ &\equiv \operatorname{res}\,\Big(X^{-1}(1-\triangle)(X\underline{\alpha}^{(-1)}d\underline{\alpha}\lambda(\underline{\beta})V)\Big) \equiv 0 \bmod \pi^n.\end{aligned}$$

□

Предложение 1.7. *Если* $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$, $\beta(\pi') = 0$ *и* $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$, *то выполнено равенство* $\langle\underline{\alpha}, \underline{\beta}\rangle = 0$.

Доказательство. $\langle\underline{\alpha}, \underline{\beta}\rangle = [\operatorname{Tr}\,\operatorname{res}\,\Phi V](\xi)$, при этом согласно лемме 1.6, $\operatorname{Tr}\,\operatorname{res}\,\Phi V \equiv 0 \bmod \pi^n$. □

1.4. Инвариантность спаривания относительно замены переменной

Пусть имеется замена переменной $X = g(Y) = rY\varepsilon(Y)$, где $r \in \mathfrak{o}_T^*$, $\varepsilon(Y) \equiv 1 \bmod Y$. Докажем инвариантность спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ для пары $X, \beta(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]X$. Заметим, что так как $\beta(X) = E_F(\ell_F(\beta))$ (см. [3, §2, п. 3, (29)]), то из формальной аддитивности функции E_F и линейности спаривания по второму аргументу следует, что инвариантность достаточно доказать для пары $X, E_F(aX^m)$, $m \geqslant 1$, где a – представитель системы Тайхмюллера $\mathfrak{R}$.

Поскольку функции ℓ_F и E_F так же, как и $\triangle$, зависят от выбора переменной, то будем писать $\ell_{F,X}$, $E_{F,X}$, $\triangle_X$. Кроме того, для удобства обозначим

$$[\underline{\alpha}(X), \underline{\beta}(X)]_X := \operatorname{res}\,{}_X\Phi_X(\underline{\alpha}, \underline{\beta})V(X).$$

Предложение 1.8. *Пусть* $p \neq 2$, $X = g(Y) = rY\varepsilon(Y)$. *Тогда*

$$[X,\, E_{F,X}(aX^m)]_X = [g(Y),\, E_{F,X}(ag^m(Y))]_Y \bmod \pi^n.$$

Доказательство. Из определения спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\Phi_X(X, E_{F,X}(aX^m)) = aX^{m-1},\\
&\Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m))\\
&\qquad = \ell_{F,Y}(E_{F,X}(ag^m))g^{-1}\frac{dg}{dY} - \ell_{m,Y}(g)\frac{d}{dY}\left(\frac{\triangle_Y}{\pi}\lambda(E_{F,X}(ag^m))\right)\\
&\qquad = \left(1 - \frac{\triangle_Y}{\pi}\right)\left(ag^m + \frac{(ag^m)^q}{\pi} + \frac{(ag^m)^{q^2}}{\pi^2} + \cdots\right)g^{-1}\frac{dg}{dY}\\
&\qquad - \ell_{m,Y}(g)\frac{d}{dY}\frac{\triangle_Y}{\pi}\left(ag^m + \frac{(ag^m)^q}{\pi} + \frac{(ag^m)^{q^2}}{\pi^2} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}
&\Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m)) = ag^{m-1}\frac{dg}{dY}\\
&\quad + \sum_{r\geqslant 1}\frac{a^{q^r}}{\pi^r}\left((g^{mq^r} - g^{mq^{r-1}\triangle_Y})g^{-1}\frac{dg}{dY} - \ell_{m,Y}(g)\frac{d}{dY}(g^{mq^{r-1}\triangle_Y})\right).
\end{aligned}$$

Из леммы 1.1, пп. 7 и 8, получаем

$$\begin{aligned}
&(g^{mq^r} - g^{mq^{r-1}\triangle_Y})g^{-1}\frac{dg}{dY} - \ell_{m,Y}(g)\frac{d}{dY}\left(g^{mq^{r-1}\triangle_Y}\right)\\
&\qquad\qquad = \frac{d}{dY}\left(\frac{g^{mq^r} - g^{mq^{r-1}\triangle_Y}}{q^r m} - \ell_{m,Y}(g)g^{mq^{r-1}\triangle_Y}\right).
\end{aligned}$$

Поэтому ряд $\Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m))$ можно записать в виде

$$\Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m)) = ag^{m-1}\frac{dg}{dY} + \frac{d}{dY}\sum_{r\geqslant 1}\varphi_r(Y),$$

где $\varphi_r(Y) = (ag^m)^{q^{r-1}\triangle_Y}S_r$, а $S_r = \frac{g^{q^r m\left(1-\frac{\triangle_Y}{q}\right)} - 1}{q^r m\pi^r} - \frac{\ell_{m,Y}(g)}{\pi^r}$.

Проверим, что $p^{f-1}S_r \in \mathfrak{o}_T[[X]]$. Действительно,

$$p^{f-1}S_r = p^{f-1}\left(\frac{\exp(q^r m\ell_{m,Y}(g)) - 1}{q^r m\pi^r} - \frac{\ell_{m,Y}(g)}{\pi^r}\right) = \sum_{i\geqslant 2}\frac{a_i}{i!}(p^{f-1}\ell_{m,Y}(g))^i,$$

где $a_i = \frac{(q^r m)^{i-1}}{\pi^r p^{(f-1)(i-1)}}$. Ряд $p^{f-1}\ell_{m,Y}(g)$ имеет целые коэффициенты согласно лемме 1.1, п. 6. Кроме того, из условий $r \geqslant 1$, $i \geqslant 2$, $q = p^f$ следует, что $a_i \equiv 0 \bmod p^{i-2}$. Поэтому при $p \neq 2$ элемент $\frac{a_i}{i!} \in \mathbb{Z}_p$, то есть ряд $p^{f-1}S_r$, а с ним ряды $p^{f-1}\varphi_r$, а значит и $p^{f-1}\sum\limits_{r\geqslant 1}\varphi_r(Y)$ будут иметь целые коэффициенты.

Осталось использовать лемму 13 работы [3], чтобы получить сравнение

$$\begin{aligned}
[g, E_{F,X}(ag^m)]_Y &= \operatorname{res}_Y \Phi_Y(g, E_{F,X}(ag^m))/s^{\vartriangle}_{n-1}(Y)\\
&= \operatorname{res}_Y\left(ag^{m-1}\frac{dg}{dY} + \frac{d}{dY}\sum_{r\geqslant 1}\varphi_r\right)\Big/ s^{\vartriangle}_{n-1}(Y)\\
&\equiv \operatorname{res}_Y\left(ag^{m-1}\frac{dg}{dY}\right)/s^{\vartriangle}_{n-1}(Y)\\
&= \operatorname{res}_Y ag^{m-1}/s^{\vartriangle}_{n-1}(Y)\frac{dg}{dY}\\
&= \operatorname{res}_X aX^{m-1}/s^{\vartriangle}_{n-1}(X) = [X, E_{F,X}(aX^m)]_X,
\end{aligned}$$

и предложение доказано. □

1.5. Совпадение с обобщенным символом норменного вычета

Целью этого параграфа является доказательство совпадения построенного в явном виде спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ с обобщенным символом норменного вычета.

Теорема 1.9. *Для любого $\alpha \in k'^*$ и $\beta \in F(\mathfrak{M})$ и рядов $\underline{\alpha}(X) \in \mathfrak{o}_T((X))^*$, $\underline{\beta}(X) \in \mathfrak{o}_{T'}[[X]]$ таких, что $\underline{\alpha}(\pi') = \alpha$, $\underline{\beta}(\pi') = \beta$ имеем равенство*

$$\langle\underline{\alpha}, \underline{\beta}\rangle = (\alpha, \beta)_F,$$

тем самым,

$$(\alpha, \beta)_F = [\operatorname{Tr}\operatorname{res}_X \Phi(\alpha, \beta)V](\xi),$$

где ряды Φ *и* V *определены в* (2).

Доказательство. Доказательство проходит так же, как и доказательство теоремы 2 в работе [3], с использованием выше доказанных предложений 1.7 и 1.8. Именно, сперва, используя независимость спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ (см. предложение 1.7), доказывается, что $\langle \underline{\pi'}, \underline{\beta}\rangle = (\pi', \beta)_F$ для простого элемента π' из k' и элемента $\beta \in F(\mathfrak{M})$.

Далее, пусть u – единица кольца $\mathfrak{o}'$, π' – фиксированный простой элемент поля k', а $\tau = \pi' u$ – другой простой из k'.

Тогда из инвариантности спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ (см. предложение 1.8) следует

$$\begin{aligned}\langle u, \beta\rangle_{\pi'} &= \langle \tau, \beta\rangle_{\pi'} -_F \langle \pi', \beta\rangle_{\pi'} = \langle \tau, \beta\rangle_{\tau} -_F \langle \pi', \beta\rangle_{\pi'}\\ &= (\tau, \beta)_F -_F (\pi', \beta)_F = (u, \beta)_F.\end{aligned}$$

В общем случае, отсюда и из линейности спаривания $\langle\ ,\ \rangle$ по первому аргументу получаем для $\alpha = (\pi')^a u$, $u \in \mathfrak{o}'^*$:

$$\langle \alpha, \beta\rangle_F = [a]_F \langle \pi', \beta\rangle_F +_F \langle u, \beta\rangle_F = [a](\pi', \beta)_F +_F (u, \beta)_F = (\alpha, \beta)_F.$$

□

2. Закон взаимности Эйзенштейна

В этом разделе мы обобщим закон взаимности Эйзенштейна на символ норменного вычета в случае формальной группы Любина–Тейта. В мультипликативном случае соответствующие результаты получены в [6].

Лемма 2.1. *Пусть* $a \in \mathfrak{o}^*$, *тогда*

$$\frac{q}{\pi}\ell_m(a) = \frac{a^{q-1}-1}{\pi}\, t,$$

причем

$$t \equiv 1 \bmod \pi.$$

Доказательство. Так как $\frac{a^{q-1}-1}{\pi} \in \mathfrak{o}$, то

$$\frac{q}{\pi}\ell_m(a) = \frac{q}{\pi}\cdot\frac{1}{q}\log\left(\frac{a^q}{a^{\Delta}}\right) = \frac{1}{\pi}\log(a^{q-1}) = \frac{1}{\pi}\log\left(1 + \frac{a^{q-1}-1}{\pi}\pi\right)$$

$$= \frac{a^{q-1}-1}{\pi}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^{q-1}-1}{\pi}\pi + \frac{1}{3}\left(\frac{a^{q-1}-1}{\pi}\pi\right)^2 - \cdots\right)}_{t} \underset{\pi}{\equiv} \frac{a^{q-1}-1}{\pi}\, t.$$

□

Теорема 2.2. *Пусть $k' = k(\xi)$, $[\pi](\xi) = 0$, $\xi \neq 0$, – поле деления круга для формальной группы Любина–Тейта $F(X,Y)$. Тогда для $a \in \mathfrak{o}^*$, $\beta \in F(\mathfrak{M})$ имеем*

$$(a,\, \beta)_{F,1} = 0 \Leftrightarrow \frac{a^{q-1}-1}{\pi}\,\underline{\beta}'(0) \equiv 0 \bmod \pi,$$

где $\underline{\beta}(X)$ – произвольный ряд из кольца $\mathfrak{o}[[X]]$, такой что $\underline{\beta}(\xi) = \beta$.

Доказательство. Обозначим ξ – корень $[\pi]_F(X) = 0$ в k'. Тогда ξ – униформизующая поля k' (см. [5]). Пусть $\beta = b_1\xi + b_2\xi^2 + \cdots$. Воспользовавшись тем, что $\underline{\beta}'(0) \bmod \pi$ не зависит от разложения β по степеням π, будем считать, что $\underline{\beta}(X) = b_1X + b_2X^2 + \cdots$, где $b_i \in \mathfrak{o}$. Так как a лежит в нижнем поле, то $\underline{a}(X) = a \Rightarrow da = 0$. Тогда

$$(a,\, \beta)_F = \left[\mathrm{Tr}\ \mathrm{res}\left(-\ell_m(a)d\left(\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\right)\right)V\right]_F(\xi). \tag{9}$$

Поскольку $[\pi]_F(\xi) = 0$, то нас интересуют только сравнения по модулю π, при этом $V \equiv X^{-q} - c_2 \bmod \pi$.

Так как $d\left(\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\right) = \frac{q}{\pi}X^{q-1}\left(d\lambda(\underline{\beta})\right)^{\triangle}$ (лемма 1.1, п. 7), то

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}\left(-\ell_m(a)d\left(\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\right)\right)V\\
&\qquad\equiv -\,\mathrm{res}\,\frac{q}{\pi}\ell_m(a)X^{q-1}(d\lambda(\underline{\beta}))^{\triangle}\left(X^{-q} - c_2\right)\\
&\qquad\equiv -\,\mathrm{res}\,\frac{q}{\pi}\ell_m(a)\left(b_1^{\triangle} + 2b_2^{\triangle}X^q + \cdots\right)\left(X^{-1} - c_2X^{q-1}\right)\\
&\qquad\equiv -\frac{a^{q-1}-1}{\pi}b_1^{\triangle} \equiv -\frac{a^{q-1}-1}{\pi}b_1 \bmod \pi.
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались свойством Фробениуса и леммой 2.1. □

Теорема 2.3. *Пусть $k' = k(\xi)$, $[\pi^n]_F(\xi) = 0$, $[\pi^{n-1}]_F(\xi) \neq 0$. Тогда для $a \in \mathfrak{o}^*$*

$$(a,\, \beta)_{F,n} = 0\ \forall\beta \Leftrightarrow \frac{a^{q-1}-1}{\pi} \equiv 0 \bmod \pi^n.$$

Доказательство. Так как (по лемме 1.1, п. 7):

$$d\left(\frac{\triangle}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\right) = \frac{q}{\pi}X^{q-1}\left(d\lambda(\underline{\beta})\right)^{\triangle},$$

то, согласно (9), имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr\ res}\left(-\ell_m(a)d\left(\frac{\Delta}{\pi}\lambda(\underline{\beta})\right)\right)V \\
&\qquad = -\frac{q}{\pi}\ell_m(a)\,\mathrm{Tr\ res}\ X^{q-1}\left(d\lambda(\underline{\beta})\right)^{\Delta}V \\
&\qquad = -\frac{a^{q-1}-1}{\pi}\,t\,\mathrm{Tr\ res}\ (d\lambda(\beta))^{\Delta}X^{q-1}V.
\end{aligned} \tag{10}$$

Подставив $\beta = \lambda^{-1}(X)$ и воспользовавшись тем, что $\mathrm{res}\ X^{q-1}V \equiv 1 \bmod \pi$, а также леммой 2.1, получаем, что необходимым условием является

$$\frac{a^{q-1}-1}{\pi} \equiv 0 \bmod \pi^n.$$

Из (10) следует, что оно является и достаточным. $\square$

Литература

1. G. Eisenstein, *Über ein einfaches Mittel zur Auffindung der höheren Reciprocitätsgesetze und der mit ihnen zu verbindenden Ergänzungssätze.* — J. für die reine u. ang. Mathematik **39** (1850), 351–364.
2. С. В. Востоков, *Явная форма закона взаимности.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **42**, No. 6 (1978), 1288–1321.
3. С. В. Востоков, *Норменное спаривание в формальных модулях.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **43**, No. 4 (1979), 765–794.
4. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local Fields and Their Extensions.* Second Edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2002.
5. *Алгебраическая теория чисел.* Ред. Дж. Касселс, А. Фрёлих. Мир, М., 1969.
6. С. В. Востоков, М. А. Иванов, Г. К. Пак, *К одной работе Хассе о законе взаимности Эйзенштейна.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 122–129.

Vostokov S. V., Ivanov M. A. Eisenstein's reciprocity law for Lubin–Tate formal groups.

In the present paper, we study a generalized norm residue symbol on Lubin–Tate formal groups and research a triviality for this symbol, when the first argument locate in the definition field of formal group.

We use explicit formulas for the generalized norm residue symbol $(\ ,\ )_{F,n}$, herewith requirement, consisting of a bound to representing in the form uniformizing's degrees is removed.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Поступило 23 декабря 2010 г.