Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 386, 2010 г.

Ю. В. Волков, А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА D_n. III

1. Введение

Пусть R – самоинъективная базисная алгебра над алгебраически замкнутым полем, имеющая конечный тип представления. Стабильный AR-колчан такой алгебры можно описать с помощью некоторого ассоциированного дерева, которое должно совпадать с одной из схем Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7 или E_8 (см. [1]). Если для алгебры R это ассоциированное дерево имеет тип A_n, то ввиду результатов [2] алгебра R стабильно эквивалентна либо некоторой полуцепной самоинъективной алгебре, либо так называемой "алгебре Мёбиуса". В работе [3] была вычислена алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для полуцепных самоинъективных алгебр, а для алгебры Мёбиуса в [4] была вычислена подалгебра $\mathrm{HH}^{*r}(R)$ алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая однородными элементами, степень которых делится на r, где r – некоторый параметр, связанный с определяющими соотношениями алгебры R. В этих двух работах существенно использовался тот факт, что сизигия подходящего порядка R-бимодуля R описывается как скрученный бимодуль. Более прямой подход к вычислению когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса R был предложен в [5], где была построена минимальная проективная резольвента для алгебры R, рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй. Затем в [6] эта резольвента была использована для вычисления аддитивной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, т.е. для алгебры Мёбиуса R были вычислены размерности групп $\mathrm{HH}^t(R)$.

Ключевые слова: самоинъективные алгебры конечного типа представлений, алгебра когомологий Хохшильда.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00635), а также при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ, ФЦП "Научные и научнопедагогические кадры инновационной России" (2010-1.1-111-128-033, госконтракт 14.740.11.0344) .

Если для алгебры R это ассоциированное дерево имеет тип D_n, то ввиду результатов [7] алгебра R стабильно эквивалентна алгебре одного из 5 видов. Их колчаны с соотношениями представлены в этой же работе. В работах [8] и [9] с помощью техники, использованной в [5], была построена минимальная проективная бимодульная резольвента для алгебр двух из этих видов, которая затем была использована для описания аддитивной структуры алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. В данной работе рассматривается ещё один из 5 видов алгебр древесного типа D_n. Для всех алгебр этого вида $n = 4$. В работе [10] для алгебр этого вида была построена минимальная бимодульная резольвента. В данной работе с помощью этой резольвенты вычисляются размерности групп $\mathrm{HH}^t(R)$ (см. теорему 2), а потом даётся описание алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ в терминах образующих с соотношениями (см. теорему 3).

2. Бимодульная резольвента

Пусть k – алгебраически замкнутое поле. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. В качестве множества вершин колчана $\mathcal{Q}$ возьмём

$$\mathcal{Q}_0 = \mathbb{Z}_n \sqcup \mathbb{Z}_{3n}.$$

Далее для числа $i \in \mathbb{Z}$ мы будем обозначать через i соответствующий ему элемент в $\mathbb{Z}_{3n}$, а через $\widehat{i}$ – соответствующий ему элемент в $\mathbb{Z}_n$. Множество стрелок $\mathcal{Q}_1$ колчана $\mathcal{Q}$ состоит из следующих элементов:

$$\alpha_i : \widehat{i} \to i,\ \beta_i : i \to \widehat{i+1},$$

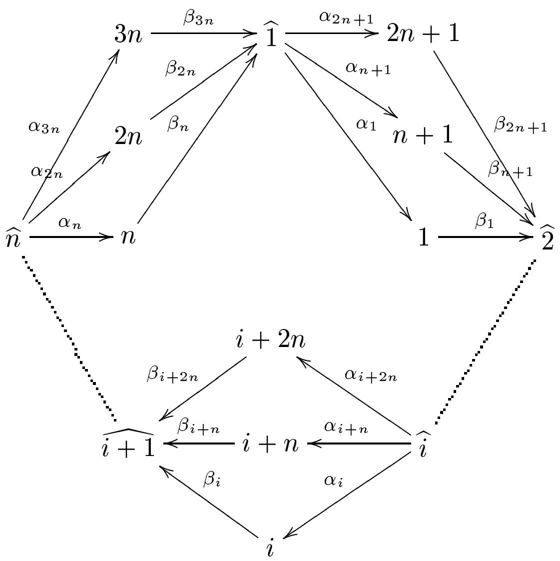
где $i \in \{1, \dots, 3n\}$. Рассмотрим идеал I алгебры путей $k\mathcal{Q}$ колчана $\mathcal{Q}$, порождённый следующими элементами:

$$\begin{gathered}\beta_i\alpha_i - \beta_{i+n}\alpha_{i+n} \text{ и } \beta_i\alpha_i - \beta_{i+2n}\alpha_{i+2n} \quad (1 \leqslant i \leqslant n),\\ \alpha_{i+n+1}\beta_i \text{ и } \alpha_{i+2n+1}\beta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant 3n).\end{gathered}$$

Из [7] следует, что алгебра

$$R := k\mathcal{Q}/I$$

имеет древесный тип D_4.



В этом параграфе мы напомним описание бимодульной резольвенты алгебры R, данное в работе [10].

Пусть $\Lambda = R \otimes_k R^{\mathrm{op}}$ – обёртывающая алгебра алгебры R. Через e_x обозначаем примитивный идемпотент алгебры R, ассоциированный с вершиной x колчана $\mathcal{Q}$. Тогда $\{e_x \otimes e_y\}_{x,y\in\mathcal{Q}_0}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов алгебры Λ, а $P_{[x][y]} = \Lambda e_x \otimes e_y$ – проективный Λ-модуль, соответствующий идемпотенту $e_x \otimes e_y$. Если w_1 – путь из вершины x_1 в вершину y_1, а w_2 – путь из вершины x_2 в вершину y_2, то умножение справа на $w_1 \otimes w_2$ индуцирует Λ-гомоморфизм между $P_{[y_1][x_2]}$ и $P_{[x_1][y_2]}$, который также обозначаем через $w_1 \otimes w_2$.

Введём k-линейное отображение $\sigma : R \to R$, удовлетворяющее условию $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ и такое, что

$$\sigma(e_i) = e_{i+3}, \quad \sigma(e_{\widehat{i}}) = e_{\widehat{i+3}}, \quad \sigma(\alpha_i) = -\alpha_{i+3}, \quad \sigma(\beta_i) = \beta_{i+3}.$$

В работе [10] отмечено, что σ – автоморфизм алгебры R конечного порядка. В той же работе этот порядок вычислен.

Будем обозначать через $\rho\Lambda$ категорию конечно порождённых проективных (левых) Λ-модулей. Введём следующий k-линейный функтор $\sigma : \rho\Lambda \to \rho\Lambda$. Пусть $V = \bigoplus\limits_{l\in L} P_{[x_{2,l}][x_{1,l}]}$. Тогда $\sigma(V) =$

$\bigoplus\limits_{l\in L} P_{[\sigma(x_{2,l})][x_{1,l}]}$ (здесь $\sigma(x)=y \Leftrightarrow \sigma(e_x)=e_y$). Пусть $V_1,\ V_2$ – модули из $\rho\Lambda$, $V_1=\bigoplus\limits_{l\in L} P_{[x_{2,l}][x_{1,l}]}$, $d: V_1\to V_2$ – гомоморфизм Λ-модулей, такой, что $d|_{P_{[x_{2,l}][x_{1,l}]}}=\sum\limits_{t\in T} u_{l,t}w_{l,t,1}\otimes w_{l,t,2}$, где $u_{l,t}\in k$, $w_{l,t,1},w_{l,t,2}\in R$. Тогда $\sigma(d)|_{P_{[\sigma(x_{2,l})][x_{1,l}]}}=\sum\limits_{t\in T} u_{l,t}\sigma(w_{l,t,1})\otimes w_{l,t,2}$.

Определим модуль Q_t $(0\leqslant t\leqslant 4)$ следующим образом:

$$Q_0=\bigoplus_{i=1}^{n} P_{[\widehat{i}\ ][\widehat{i}\ ]}\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i][i]},$$
$$Q_1=\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i][\widehat{i}\ ]}\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[\widehat{i+1}\ ][i]},$$
$$Q_2=\bigoplus_{i=1}^{n} P^2_{[\widehat{i+1}\ ][\widehat{i}\ ]}\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+n+1][i]}\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+2n+1][i]},$$
$$Q_3=\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+1][\widehat{i}\ ]}\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[\widehat{i+2}\ ][i]},$$
$$Q_4=\bigoplus_{i=1}^{n} P_{[\widehat{i+2}\ ][\widehat{i}\ ]}\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+2][i]}.$$

Кроме того, определим Q_t для $t=5l+m$, где $0\leqslant m\leqslant 4$, $l\geqslant 0$, по формуле $Q_t=\sigma^l(Q_m)$.

Для неразложимого проективного Λ-модуля P мы будем записывать элементы P^2 в виде столбцов $\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, где $x_1,x_2\in P$. Если $w_1,w_2\in \mathrm{Hom}_\Lambda(T,P)$, $w_1',w_2'\in \mathrm{Hom}_\Lambda(P,T')$, то для индуцированных ими отображений используем обозначения: $\begin{pmatrix} w_1\\ w_2\end{pmatrix}\in \mathrm{Hom}_\Lambda(T,P^2)$, а $(w_1',w_2')\in \mathrm{Hom}_\Lambda(P^2,T')$. Пусть $\mu: Q_0\to R$ – гомоморфизм, определённый на $w_1\otimes w_2\in P_{[x][x]}$ по формуле $\mu(w_1\otimes w_2)=w_1w_2$.

Определим Λ-гомоморфизмы $d_t: Q_{t+1}\to Q_t$ $(0\leqslant t\leqslant 4)$ на прямых слагаемых Q_{t+1} следующим образом:

$$d_0|_{P_{[i][\widehat{i}\ ]}}=\alpha_i\otimes e_{\widehat{i}}-e_i\otimes\alpha_i\quad (1\leqslant i\leqslant 3n),$$
$$d_0|_{P_{[\widehat{i+1}\ ][i]}}=\beta_i\otimes e_i-e_{\widehat{i+1}}\otimes\beta_i\quad (1\leqslant i\leqslant 3n);$$

$$d_1|_{P^2_{[\widehat{i+1}\,][\widehat{i}\,]}} = \big((\beta_i - \beta_{i+n})\otimes e_{\widehat{i}} + e_{\widehat{i+1}} \otimes (\alpha_i - \alpha_{i+n}),$$
$$(\beta_{i+n} - \beta_{i+2n})\otimes e_{\widehat{i}} + e_{\widehat{i+1}}\otimes(\alpha_{i+n} - \alpha_{i+2n})\big)\ (1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$d_1|_{P_{[i+qn+1][i]}} = \alpha_{i+qn+1}\otimes e_i + e_{i+qn+1}\otimes\beta_i\ (1\leqslant i\leqslant 3n, q\in\{1,2\});$$

$$d_2|_{P_{[i+1][\widehat{i}\,]}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{i+1}\otimes e_{\widehat{i}} \end{pmatrix} + e_{i+1}\otimes(\alpha_{i+2n} - \alpha_{i+n})\ (1\leqslant i\leqslant n),$$
$$d_2|_{P_{[i+1][\widehat{i}\,]}} = -\begin{pmatrix} \alpha_{i+1}\otimes e_{\widehat{i}} \\ \alpha_{i+1}\otimes e_{\widehat{i}} \end{pmatrix} + e_{i+1}\otimes(\alpha_{i+2n} - \alpha_{i+n})\ (n+1\leqslant i\leqslant 2n),$$
$$d_2|_{P_{[i+1][\widehat{i}\,]}} = \begin{pmatrix} \alpha_{i+1}\otimes e_{\widehat{i}} \\ 0 \end{pmatrix} + e_{i+1}\otimes(\alpha_{i+2n} - \alpha_{i+n})\ (2n+1\leqslant i\leqslant 3n),$$
$$d_2|_{P_{[\widehat{i+2}\,][i]}} = (\beta_{i+2n+1} - \beta_{i+n+1})\otimes e_i + \begin{pmatrix} 0 \\ e_{\widehat{i+2}}\otimes\beta_i \end{pmatrix}\ (0\leqslant i\leqslant n-1),$$
$$d_2|_{P_{[\widehat{i+2}\,][i]}} = (\beta_{i+2n+1} - \beta_{i+n+1})\otimes e_i - \begin{pmatrix} e_{\widehat{i+2}}\otimes\beta_i \\ e_{\widehat{i+2}}\otimes\beta_i \end{pmatrix}\ (n\leqslant i\leqslant 2n-1),$$
$$d_2|_{P_{[\widehat{i+2}\,][i]}} = (\beta_{i+2n+1} - \beta_{i+n+1})\otimes e_i + \begin{pmatrix} e_{\widehat{i+2}}\otimes\beta_i \\ 0 \end{pmatrix}\ (2n\leqslant i\leqslant 3n-1);$$
$$d_3|_{P_{[\widehat{i+2}\,][\widehat{i}\,]}} = (\beta_{i+1} + \beta_{i+n+1} + \beta_{i+2n+1})\otimes e_{\widehat{i}}$$
$$+ e_{\widehat{i+2}}\otimes(\alpha_i + \alpha_{i+n} + \alpha_{i+2n})\ (1\leqslant i\leqslant n),$$
$$d_3|_{P_{[i+2][i]}} = \alpha_{i+2}\otimes e_i - e_{i+2}\otimes\beta_i\ (1\leqslant i\leqslant 3n);$$
$$d_4|_{P_{[\widehat{i+3}\,][\widehat{i}\,]}} = \beta_{i+2}\alpha_{i+2}\otimes e_{\widehat{i}} - \sum_{q=0}^{2}\beta_{i+qn+2}\otimes\alpha_{i+qn}$$
$$- e_{\widehat{i+3}}\otimes\beta_i\alpha_i\ (1\leqslant i\leqslant n),$$
$$d_4|_{P_{[i+3][i]}} = \alpha_{i+3}\beta_{i+2}\otimes e_i + \alpha_{i+3}\otimes\beta_i - e_{i+3}\otimes\alpha_{i+1}\beta_i\ (1\leqslant i\leqslant 3n).$$

Кроме того, определим d_t для $t = 5l + m$, где $0 \leqslant m \leqslant 4$, $l \geqslant 0$, по формуле $d_t = \sigma^l(d_m)$.

В работе [10] была доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Минимальная Λ-проективная резольвента модуля R представляется последовательностью:*

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\mu} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \dots . \qquad (2.1)$$

Замечание 1. В работе [10] в описании дифференциала d_1 была опечатка, которая исправлена в настоящей статье.

3. Аддитивная структура алгебры когомологий Хохшильда

В этом параграфе сохраняются все обозначения, введённые в предыдущем. Кроме того, положим $\delta^t = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_t, R) : \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_t, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{t+1}, R)$, где Q_t – модули, а d_t – дифференциалы из резольвенты (2.1).

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{HH}^t(R)$ – t*-ая группа когомологий Хохшильда алгебры* R *с коэффициентами в* R*. Тогда:*

1) $\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = 1$, *если выполнено одно из условий:*

а) $t = 5l+1, l \vdots n$ *и выполнено одно из условий:* $l \vdots 2$ *или* $\mathrm{char}\ k = 2$;

б) $t \in \{5l+1, 5l+2\}$, $3l \vdots n$, $l \not\vdots n, l \vdots 2$, $\mathrm{char}\ k = 3$;

в) $t \in \{5l+2, 5l+3\}$, $3l+1 \vdots n$, $l \not\vdots 2$, $\mathrm{char}\ k = 3$;

г) $t = 5l+4$, $3l+2 \vdots n$ *и выполнено одно из условий:* $\mathrm{char}\ k = 2$ *или* $l \vdots 2$;

д) $t = 5l$, $l \vdots n, n > 1$ *и выполнено одно из условий:* $\mathrm{char}\ k = 2$ *или* $l \vdots 2$;

е) $t = 5l$, $3l-1 : n$, $n > 1$ *и выполнено одно из условий:* $\mathrm{char}\ k = 2$ *или* $l \neq 2$,

ж) $t = 5l$, $n = 1$, $\mathrm{char}\ k \neq 2$, $l > 0$.

2) $\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = 2$, *если выполнено условие:*

$t = 5l, n = 1$ *и выполнено одно из условий:* $\mathrm{char}\ k = 2$ *или* $l = 0$.

3) $\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = 0$ *во всех оставшихся случаях.*

Перед началом доказательства теоремы введём следующие определения. Пусть w – путь из вершины x_2 в вершину x_1. Через $w^* : P_{[x_1][x_2]} \to R$ будем обозначать Λ-гомоморфизм, переводящий $e_{x_1} \otimes e_{x_2} \in P_{[x_1][x_2]}$ в $w \in R$ (в дальнейшем звёздочка в подобных обозначениях будет часто опускаться).

Пусть
$$X = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant p} P_{[x_{1,i}][x_{2,i}]} \oplus \bigoplus_{1 \leqslant j \leqslant q} P^2_{[y_{1,j}][y_{2,j}]},$$
и пусть w_i – путь из вершины $x_{2,i}$ в вершину $x_{1,i}$, а $v_{j,1}, v_{j,2}$ – два пути из вершины $y_{2,j}$ в вершину $y_{1,j}$. Рассмотрим
$$\chi = \sum_{i=1}^{p} \varkappa_i w_i^* + \sum_{j=1}^{q} \varphi_j(v_{j,1}^*, v_{j,2}^*) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, R),$$

где $\varkappa_i \in k$, $\varphi_j \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant q)$. Тогда через $V(\chi) \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(X,R)$ будем обозначать подпространство, порождённое над k гомоморфизмом χ.

Лемма 1.

$$1)\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l},R)=\begin{cases} V(e_{\hat{1}})\oplus V(\beta_1\alpha_1)\oplus\bigoplus\limits_{i=1}^{3} V(e_i), & \text{если } n=1,\\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V(e_{\hat{i}})\oplus\bigoplus\limits_{i=1}^{3n} V(e_i), & \text{если } l\,\vdots\, n \text{ и } n>1,\\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V(e_{\hat{i}}), & \text{если } 3l\,\vdots\, n \text{ и } l \not\vdots\, n,\\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V(\beta_i\alpha_i), & \text{если } n>1 \text{ и } 3l-1\,\vdots\, n,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$2)\ \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+1},R)=\begin{cases} \bigoplus\limits_{i=1}^{3n} V(\beta_i)\oplus\bigoplus\limits_{i=1}^{3n} V(\alpha_i), & \text{если } 3l\,\vdots\, n,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

3а) *Если* $n=1$, *то*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+2},R)=V((\beta_1\alpha_1,0)^{\mathrm{T}})\oplus V((0,\beta_1\alpha_1)^{\mathrm{T}}) \oplus V((e_{\hat{1}},0)^{\mathrm{T}})\oplus V((0,e_{\hat{1}})^{\mathrm{T}})\oplus\bigoplus_{i=1}^{3} V(e_i);$$

3б) *если* $3l\,\vdots\, n$ *и* $l \not\vdots\, n$, *то*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+2},R)=\bigoplus_{i=1}^{n} V\big((\beta_i\alpha_i,0)^{\mathrm{T}}\big) \oplus\bigoplus_{i=1}^{n} V\big((0,\beta_i\alpha_i)^{\mathrm{T}}\big)\big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} V(\alpha_{i+1}\beta_i);$$

3в) *если* $n>1$ *и* $3l+1\,\vdots\, n$, *то*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+2},R)=\bigoplus_{i=1}^{n} V\big((e_{\hat{i}},0)^{\mathrm{T}}\big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{n} V\big((0,e_{\hat{i}})^{\mathrm{T}}\big)\oplus\bigoplus_{i=1}^{3n} V(e_i);$$

3г) *если* $n > 1$ *и* $l \vdots n$, *то*

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+2}, R) = \bigoplus_{i=1}^{n} V\big((\beta_i\alpha_i, 0)^{\mathrm{T}}\big) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} V\big((0, \beta_i\alpha_i)^{\mathrm{T}}\big);$$

3д) *во всех остальных случаях* $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+2}, R) = 0$.

4) $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+3}, R) = \begin{cases} \bigoplus\limits_{i=1}^{3n} V(\beta_i) \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{3n} V(\alpha_i), & \text{если } 3l+1 \vdots n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

5) $\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{5l+4}, R) = \begin{cases} V(e_{\widehat{1}}) \oplus V(\beta_1\alpha_1), & \text{если } n = 1, \\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V(\beta_i\alpha_i), & \text{если } n > 1 \text{ и } 3l+1 \vdots n, \\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V(e_{\widehat{i}}), & \text{если } n > 1 \text{ и } 3l+2 \vdots n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

Доказательство. Заметим следующий факт. Рассмотрим линейное подпространство пространства R, порождённое над k всеми путями, ведущими из вершины y в вершину x. Пусть $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ – его базис. Ясно, что $(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_p^*)$ – базис $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[x][y]}, R)$, то есть

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[x][y]}, R) = \bigoplus_{i=1}^{p} V(w_i). \tag{3.1}$$

Теперь легко проверяется, что

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_{[x][y]}, R) = \begin{cases} V(e_{\widehat{1}}) \oplus V(\beta_1\alpha_1), & \text{если } n = 1, x = y = \widehat{1}, \\ V(e_{\widehat{i}}), & \text{если } n > 1, x = y = \widehat{i}, i \in \mathbb{Z}, \\ V(\beta_i\alpha_i), & \text{если } n > 1, x = \widehat{i+1}, y = \widehat{i}, i \in \mathbb{Z}, \\ V(\alpha_i), & \text{если } x = i, y = \widehat{i}, i \in \mathbb{Z}, \\ V(\beta_i), & \text{если } x = \widehat{i+1}, y = i, i \in \mathbb{Z}, \\ V(e_i), & \text{если } x = y = i, i \in \mathbb{Z}, \\ V(\alpha_{i+1}\beta_i), & \text{если } x = i+1, y = i, i \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{во всех оставшихся случаях.} \end{cases}$$

Отсюда с помощью формул

$$
\begin{aligned}
Q_{5l} &= \sigma^l(Q_0) = \bigoplus_{i=1}^{n} P_{[\widehat{i+3l}\ ][\hat{i}\ ]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+3l][i]},\\
Q_{5l+1} &= \sigma^l(Q_1) = \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+3l][\hat{i}\ ]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[\widehat{i+3l+1}\ ][i]},\\
Q_{5l+2} &= \sigma^l(Q_2) = \bigoplus_{i=1}^{n} P^2_{[\widehat{i+3l+1}\ ][\hat{i}\ ]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+3l+n+1][i]}\\
&\quad \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+3l+2n+1][i]},\\
Q_{5l+3} &= \sigma^l(Q_3) = \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+3l+1][\hat{i}\ ]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[\widehat{i+3l+2}\ ][i]},\\
Q_{5l+4} &= \sigma^l(Q_4) = \bigoplus_{i=1}^{n} P_{[\widehat{i+3l+2}\ ][\hat{i}\ ]} \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} P_{[i+3l+2][i]}
\end{aligned}
$$

несложно выводятся все утверждения леммы.

Лемма 2.

$$
1)\ \operatorname{Ker}\delta^{5l} = \begin{cases}
V(\beta_1\alpha_1) \oplus V(e_{\hat{1}} + \sum\limits_{i=1}^{3} e_i), & \text{если } n = 1 \text{ и либо } l\,\vdots\,2,\\
 & \text{либо } \operatorname{char} k = 2,\\
\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V(\beta_i\alpha_i), & \text{если либо } n = 1, l \not\vdots\, 2\\
 & \text{и } \operatorname{char} k \neq 2,\\
 & \text{либо } n > 1 \text{ и } 3l-1\,\vdots\, n,\\
V(\sum\limits_{i=1}^{n} e_{\hat{i}} + \sum\limits_{i=1}^{3n} e_i), & \text{если } n > 1, l\,\vdots\, n \text{ и либо } l\,\vdots\,2,\\
 & \text{либо } \operatorname{char} k = 2,\\
0 & \text{в остальных случаях.}
\end{cases}
$$

2a) *Если* $l\,\vdots\,n$, *то*

$$
\operatorname{Ker}\delta^{5l+1} = \bigoplus_{i=1}^{3n} V(\alpha_i - \beta_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} V(\beta_i + \beta_{i+n} + \beta_{i+2n});
$$

2б) *если* $3l \,\vdots\, n$, $l \not\vdots\, n$, $l \,\vdots\, 2$ *и* $\operatorname{char} k = 3$, *то*

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\delta^{5l+1} = &\bigoplus_{i=1}^{n} V(\alpha_i+\alpha_{i+n}+\alpha_{i+2n}-\beta_{i-1}-\beta_{i+n-1}-\beta_{i+2n-1})\\ &\oplus V\Bigl(\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i-\alpha_{i+n}-\beta_{i-1}+\beta_{i+n-1})\Bigr);\end{aligned}$$

2в) *если* $3l \,\vdots\, n$, $l \not\vdots\, n$ *и либо* $l \not\vdots\, 2$, *либо* $\operatorname{char} k \neq 3$, *то*

$$\operatorname{Ker}\delta^{5l+1} = \bigoplus_{i=1}^{n} V\bigl(\alpha_i+\alpha_{i+n}+\alpha_{i+2n}+(-1)^{l+1}(\beta_{i-1}+\beta_{i+n-1}+\beta_{i+2n-1})\bigr);$$

2г) *во всех остальных случаях* $\operatorname{Ker}\delta^{5l+1} = 0$.

3а) *Если* $3l \,\vdots\, n$ *и* $l \not\vdots\, n$, *то*

$$\operatorname{Ker}\delta^{5l+2} = \bigoplus_{i=1}^{n} V\bigl((\beta_i\alpha_i,0)^{\mathrm T}\bigr) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} V\bigl((0,\beta_i\alpha_i)^{\mathrm T}\bigr) \oplus \bigoplus_{i=1}^{3n} V(\alpha_{i+1}\beta_i);$$

3б) *если* $n=1$, $l \not\vdots\, 2$ *и* $\operatorname{char} k = 3$, *то*

$$\operatorname{Ker}\delta^{5l+2} = V\bigl((\beta_1\alpha_1,0)^{\mathrm T}\bigr) \oplus V\bigl((0,\beta_1\alpha_1)^{\mathrm T}\bigr) \oplus V\Bigl(-(e_{\hat 1},e_{\hat 1})^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^{3} e_i\Bigr);$$

3в) *если выполнено одно из условий:*

(α) $n=1$ *и выполнено одно из условий:* $l \,\vdots\, 2$ *или* $\operatorname{char} k \neq 3$; *или*

(β) $n>1$ *и* $l \,\vdots\, n$,

то $$\operatorname{Ker}\delta^{5l+2} = \bigoplus_{i=1}^{n} V\bigl((\beta_i\alpha_i,0)^{\mathrm T}\bigr) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} V\bigl((0,\beta_i\alpha_i)^{\mathrm T}\bigr);$$

3г) *если* $n>1$, $3l+1-rn \,\vdots\, 3n$, $r \in \{1,2\}$, $l \not\vdots\, 2$ *и* $\operatorname{char} k = 3$, *то*

$$\operatorname{Ker}\delta^{5l+2} = V\Bigl((-1)^r\sum_{i=1}^{n}(e_{\hat i},e_{\hat i})^{\mathrm T}+\sum_{i=1}^{3n} e_i\Bigr);$$

3д) *во всех остальных случаях* $\operatorname{Ker}\delta^{5l+2}=0$.

$$4)\ \operatorname{Ker}\delta^{5l+3}=\begin{cases}\bigoplus\limits_{i=1}^{3n}V(\alpha_i-\beta_i)\oplus\bigoplus\limits_{i=1}^{2n}V(\beta_i-\beta_{i+n}), & \text{если } 3l+1\,\vdots\, n,\\ 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

$$5)\ \operatorname{Ker}\delta^{5l+4}=\begin{cases}V(\beta_1\alpha_1)\oplus V(e_{\widehat{1}}), & \text{если } n=1 \text{ и выполнено одно из условий: } \operatorname{char}k=2 \text{ или } l\,\vdots\,2,\\ \bigoplus\limits_{i=1}^{n}V(\beta_i\alpha_i), & \text{если либо } n=1, l\,\not\vdots\,2 \text{ и } \operatorname{char}k\neq 2, \text{ либо } n>1 \text{ и } 3l+1\,\vdots\,n,\\ V(\sum\limits_{i=1}^{n}e_{\widehat{i}}), & \text{если } n>1, 3l+2\,\vdots\,n \text{ и выполнено одно из условий: } \operatorname{char}k=2 \text{ или } l\,\vdots\,2,\\ 0 & \text{во всех остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. 1) Предположим сначала, что $n>1$. Если $3l\,\not\vdots\,n$ и $3l-1\,\not\vdots\,n$, то ввиду леммы 1 имеем $\operatorname{Ker}\delta^{5l}\subset\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{5l},R)=0$. Пусть $f\in\operatorname{Ker}\delta^{5l}$. Разберём случай $3l\,\vdots\,n$. Если при этом $l\,\not\vdots\,n$, то f можно записать в виде $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\widehat{i}}e^*_{\widehat{i}}$, где $\varkappa_{\widehat{i}}\in k$. Тогда $0=\delta^{5l}(f)(e_i\otimes e_{\widehat{i}})=(-1)^l\varkappa_{\widehat{i}}\alpha_i$, то есть $\varkappa_{\widehat{i}}=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Следовательно, в этом случае $\operatorname{Ker}\delta^{5l}=0$. Если же $l\,\vdots\,n$, то f можно записать в виде $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\widehat{i}}e^*_{\widehat{i}}+\sum\limits_{i=1}^{3n}\varphi_ie^*_i$, где $\varkappa_{\widehat{i}},\varphi_i\in k$. Тогда получаем, что $0=\delta^{5l}(f)(e_i\otimes e_{\widehat{i}})=((-1)^l\varkappa_{\widehat{i}}-\varphi_i)\alpha_i$, $0=\delta^{5l}(f)(e_{\widehat{i+1}}\otimes e_i)=(\varphi_i-\varkappa_{\widehat{i+1}})\beta_i$ $(1\leqslant i\leqslant 3n)$. Следовательно, $\varkappa_{\widehat{i+1}}=(-1)^l\varkappa_{\widehat{i}}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, то есть $\varkappa_{\widehat{i}}=\varkappa_{\widehat{i+n}}=(-1)^{nl}\varkappa_{\widehat{i}}$. Если $\operatorname{char}k\neq 2$ и $l\,\not\vdots\,2$ (а тогда и $n\,\not\vdots\,2$), то $\varkappa_{\widehat{i}}=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, то есть $\varphi_i=0$ $(1\leqslant i\leqslant 3n)$, следовательно, $f=0$ и $\operatorname{Ker}\delta^{5l}=0$. Если $\operatorname{char}k=2$ или $l\,\vdots\,2$, то существует такое $\varkappa\in k$, что $\varkappa_{\widehat{i}}=\varphi_i=\varkappa$ для $1\leqslant i\leqslant 3n$, то есть $f=\varkappa(\sum\limits_{i=1}^{n}e^*_{\widehat{i}}+\sum\limits_{i=1}^{3n}e^*_i)$. Если же $3l-1\,\vdots\,n$, то $f=\sum\limits_{i=1}^{n}\psi_{\widehat{i}}(\beta_i\alpha_i)^*$ для $\psi_{\widehat{i}}\in k$; при этом легко видеть, что $(\beta_i\alpha_i)^*\in\operatorname{Ker}\delta^{5l}$

для $1 \leqslant i \leqslant n$.

Теперь предположим, что $n = 1$. Тогда $f \in \operatorname{Ker} \delta^{5l}$ можно записать в виде $f = \varkappa_{\widehat{1}} e^*_{\widehat{1}} + \psi_{\widehat{1}}(\beta_1\alpha_1)^* + \sum\limits_{i=1}^{3} \varphi_i e^*_i$, где $\varkappa_{\widehat{1}}, \psi_{\widehat{1}}, \varphi_i \in k$. Как и раньше, легко понять, что $(\beta_1\alpha_1)^* \in \operatorname{Ker} \delta^{5l}$. Аналогично случаю $n > 1$ доказывается, что $\varkappa_{\widehat{1}} = \varphi_i = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant 3$, если $\operatorname{char} k \neq 2$ и $l \not\vdots 2$, и что $f - \psi_{\widehat{1}}(\beta_1\alpha_1)^* = \varkappa(e^*_{\widehat{1}} + \sum\limits_{i=1}^{3} e^*_i)$ для некоторого $\varkappa \in k$, если $\operatorname{char} k = 2$ или $l \vdots 2$. Из приведённых рассуждений следуют все равенства пункта 1).

2) Если $3l \not\vdots n$, то ввиду леммы 1 имеем $\operatorname{Ker} \delta^{5l+1} \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{5l+1}, R) = 0$. Предположим, что $3l \vdots n$. Пусть $f \in \operatorname{Ker} \delta^{5l+1}$. Тогда f можно записать в виде $f = \sum\limits_{i=1}^{3n} \varphi_i \alpha^*_i + \sum\limits_{i=1}^{3n} \zeta_i \beta^*_i$, где $\varphi_i, \zeta_i \in k$. Тогда $f \in \operatorname{Ker} \delta^{5l+1}$ равносильно тому, что выполнены равенства:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta^{5l+1}(f)\big((e_{\widehat{i+1}} \otimes e_{\widehat{i}}, 0)^{\mathrm{T}}\big)\\
&= (\varphi_{i+3l} - \varphi_{i+3l+n} + \zeta_i - \zeta_{i+n})\beta_i\alpha_i \, (1 \leqslant i \leqslant n),\\
0 &= \delta^{5l+1}(f)\big((0, e_{\widehat{i+1}} \otimes e_{\widehat{i}})^{\mathrm{T}}\big)\\
&= (\varphi_{i+3l} - \varphi_{i+3l+n} + \zeta_i - \zeta_{i+n})\beta_i\alpha_i \, (n+1 \leqslant i \leqslant 2n),\\
0 &= \delta^{5l+1}(f)(e_{i+3l+n+1} \otimes e_i)\\
&= ((-1)^l\zeta_i + \varphi_{i+3l+n+1})\alpha_{i+3l+n+1}\beta_i \, (1 \leqslant i \leqslant 3n),\\
0 &= \delta^{5l+1}(f)(e_{i+3l-n+1} \otimes e_i)\\
&= ((-1)^l\zeta_i + \varphi_{i+3l-n+1})\alpha_{i+3l-n+1}\beta_i \, (1 \leqslant i \leqslant 3n).
\end{aligned}$$

Если $l \vdots n$, то последние два равенства выполняются автоматически, а первые два равенства равносильны тому, что $\varphi_{i+n} + \zeta_{i+n} = \varphi_i + \zeta_i$ для $1 \leqslant i \leqslant 3n$. Значит, условие $f \in \operatorname{Ker} \delta^{5l+1}$ равносильно тому, что существуют такие $\Delta_{\widehat{i}} \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что $\zeta_i = \Delta_{\widehat{i}} - \varphi_i$ для $1 \leqslant i \leqslant 3n$. Тогда $f = \sum\limits_{i=1}^{3n} \varphi_i(\alpha^*_i - \beta^*_i) + \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_{\widehat{i}}(\beta^*_i + \beta^*_{i+n} + \beta^*_{i+2n})$.

Предположим теперь, что $l \not\vdots n$, то есть либо $3l - n \vdots 3n$, либо $3l + n \vdots 3n$. Тогда одно из последних двух равенств выполняется автоматически, а другое равносильно тому, что $\zeta_i = (-1)^{l+1}\varphi_{i+1}$, и первые два равенства сводятся к соотношениям $\varphi_{i+n+1} - \varphi_{i+1} = (-1)^l(\varphi_{i+3l+n} - \varphi_{i+3l})$ $(1 \leqslant i \leqslant 2n)$. Пусть $\xi_i = \varphi_{i+n} - \varphi_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3n)$. Тогда условие $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+1}$ равносильно тому, что $\xi_{i+1} = (-1)^l\xi_{i+3l}$ $(1 \leqslant i \leqslant 2n)$. Так как $\xi_i + \xi_{i+n} + \xi_{i+2n} = 0$, то предыдущее равенство выполняется для всех $1 \leqslant i \leqslant 3n$. Тогда $\xi_{i+1-3l} = (-1)^l\xi_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{3n}$. По индукции получаем, что $\xi_{i+t(1-3l)} = (-1)^{tl}\xi_i$ для $i \in \mathbb{Z}_{3n}$, $t \geqslant 0$. Отсюда при $t = 3n$ получаем равенство $\xi_i = (-1)^{nl}\xi_i$. Значит, если $(-1)^{nl} \neq 1$, то $\xi_i = 0$ для $i \in \mathbb{Z}_{3n}$. Пусть $(-1)^{nl} = 1$. Подставляя $t = n$, получаем $\xi_{i+n} = \xi_i$ для $i \in \mathbb{Z}_{3n}$. Тогда $0 = \xi_i + \xi_{i+n} + \xi_{i+2n} = 3\xi_i$, то есть, если $\operatorname{char} k \neq 3$, то $\xi_i = 0$ для $i \in \mathbb{Z}_{3n}$. Значит, если $\operatorname{char} k \neq 3$ или $l \not\vdots 2$ (а тогда и $n \not\vdots 2$), то $\varphi_{i+n} = \varphi_i$ для $1 \leqslant i \leqslant 3n$, то есть $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_i(\alpha_i^* + \alpha_{i+n}^* + \alpha_{i+2n}^* + (-1)^{l+1}(\beta_{i-1}^* + \beta_{i+n-1}^* + \beta_{i+2n-1}^*))$. Пусть теперь $l \vdots 2$ и $\operatorname{char} k = 3$. Тогда из предыдущих рассуждений получаем $\xi_i = \xi_0$ для $1 \leqslant i \leqslant 3n$. Тогда $f = \sum\limits_{i=2n+1}^{3n}\varphi_i(\alpha_i^* + \alpha_{i+n}^* + \alpha_{i+2n}^* - (\beta_{i-1}^* + \beta_{i+n-1}^* + \beta_{i+2n-1}^*)) + \xi_0\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i^* - \alpha_{i+n}^* - \beta_{i-1}^* + \beta_{i+n-1}^*)$. Доказательство пункта 2) завершено.

3) Предположим сначала, что $n > 1$. Если $3l \not\vdots n$ и $3l+1 \not\vdots n$, то ввиду леммы 1 имеем $\operatorname{Ker}\delta^{5l+2} \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{5l+2}, R) = 0$. Пусть $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+2}$. Разберём случай $3l \vdots n$. Тогда в случае $l \not\vdots n$, то есть когда либо $3l - n \vdots 3n$, либо $3l + n \vdots 3n$, имеем $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\hat{i},1}((\beta_i\alpha_i)^*, 0) + \sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\hat{i},2}(0, (\beta_i\alpha_i)^*) + \sum\limits_{i=1}^{3n}\varphi_i(\alpha_{i+1}\beta_i)^*$, а в случае $l \vdots n$ имеем $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\hat{i},1}((\beta_i\alpha_i)^*, 0) + \sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\hat{i},2}(0, (\beta_i\alpha_i)^*)$; здесь $\varkappa_{\hat{i},1}, \varkappa_{\hat{i},2}, \varphi_i \in k$. При этом ясно, что $((\beta_i\alpha_i)^*, 0), (0, (\beta_i\alpha_i)^*) \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+2}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $(\alpha_{i+1}\beta_i)^* \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+2}$ для $1 \leqslant i \leqslant 3n$. Если же $3l + 1 \vdots n$, то, так как в этом случае либо $3l + 1 - n \vdots 3n$, либо $3l + 1 + n \vdots 3n$, f можно записать в виде $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\hat{i},1}(e_{\hat{i}}^*, 0) + \sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{\hat{i},2}(0, e_{\hat{i}}^*) + \sum\limits_{i=1}^{3n}\varphi_i e_i^*$, где $\varkappa_{\hat{i},1}, \varkappa_{\hat{i},2}, \varphi_i \in k$. Пусть остаток от деления $3l+1$ на $3n$ равен rn. Тогда условие $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+2}$

равносильно тому, что для всех i

$$\delta^{5l+2}(f)(e_{i+3l+1}\otimes e_{\widehat{i}})=0=\delta^{5l+2}(f)(e_{\widehat{i+3l+2}}\otimes e_i),$$

а эти условия означают, что

$$\begin{array}{ll}
(-1)^l\varkappa_{\widehat{i},2}+(-1)^r\varphi_{i+3l+1}=0 & \text{при } 1\leqslant i\leqslant n,\\
(-1)^{l+1}(\varkappa_{\widehat{i},1}+\varkappa_{\widehat{i},2})+(-1)^r\varphi_{i+3l+1}=0 & \text{при } n+1\leqslant i\leqslant 2n,\\
(-1)^l\varkappa_{\widehat{i},1}+(-1)^r\varphi_{i+3l+1}=0 & \text{при } 2n+1\leqslant i\leqslant 3n,\\
(-1)^{r+1}\varphi_i+\varkappa_{\widehat{i+1},2}=0 & \text{при } 0\leqslant i\leqslant n-1,\\
(-1)^{r+1}\varphi_i-(\varkappa_{\widehat{i+1},1}+\varkappa_{\widehat{i+1},2})=0 & \text{при } n\leqslant i\leqslant 2n-1,\\
(-1)^{r+1}\varphi_i+\varkappa_{\widehat{i+1},1}=0 & \text{при } 2n\leqslant i\leqslant 3n-1.
\end{array}$$

Выразим $\varkappa_{\widehat{i+1},2}$, $\varkappa_{\widehat{i+1},1}+\varkappa_{\widehat{i+1},2}$ и $\varkappa_{\widehat{i+1},1}$ из первого, второго и третьего равенств соответственно и подставим полученные выражения в четвёртое, пятое и шестое равенства соответственно. Получим, что $\varphi_{i+3l+2}=(-1)^{l+1}\varphi_i$ для $1\leqslant i\leqslant 3n$. Кроме того, из последних трёх равенств следует, что $\varphi_i+\varphi_{i+n}+\varphi_{i+2n}=0$ для $i\in\mathbb{Z}_{3n}$. По индукции получаем, что $\varphi_{i+t(3l+2)}=(-1)^{t(l+1)}\varphi_i$ для $i\in\mathbb{Z}_{3n}$, $t\geqslant 0$. Подставив $t=3n$, получаем, что $\varphi_i=(-1)^{n(l+1)}\varphi_i$. Значит, если в поле k имеем $(-1)^{n(l+1)}\neq 1$, то $\varphi_i=0$ для $i\in\mathbb{Z}_{3n}$. Пусть $(-1)^{n(l+1)}=1$. Подставляя здесь $t=n$, получаем $\varphi_{i+2n}=\varphi_i$ для $i\in\mathbb{Z}_{3n}$. Тогда $0=\varphi_i+\varphi_{i+n}+\varphi_{i+2n}=3\varphi_i$, то есть, если $\operatorname{char}k\neq 3$, то $\varphi_i=0$ для $i\in\mathbb{Z}_{3n}$. Таким образом, если $\operatorname{char}k\neq 3$ или $l+1\not\,\vdots\,2$ (а тогда и $n\not\,\vdots\,2$), то $\varphi_i=0$ для $1\leqslant i\leqslant 3n$. А тогда из указанных ранее равенств следует, что $\varkappa_{\widehat{i},1}=\varkappa_{\widehat{i},2}=0$ для $1\leqslant i\leqslant n$, то есть $\operatorname{Ker}\delta^{5l+2}=0$. Пусть теперь $l\not\,\vdots\,2$ и $\operatorname{char}k=3$. Тогда из предыдущих рассуждений получаем $\varphi_i=\varphi_0$ для $1\leqslant i\leqslant 3n$, $\varkappa_{\widehat{i},1}=\varkappa_{\widehat{i},2}=(-1)^r\varphi_0$ для $1\leqslant i\leqslant n$. Тогда $f=\varphi_0\big((-1)^r\sum\limits_{i=1}^{n}(e^*_{\widehat{i}},e^*_{\widehat{i}})+\sum\limits_{i=1}^{3n}e^*_i\big)$.

Если же $n=1$, то рассуждая аналогично предыдущему получаем и для этого случая требуемые равенства.

4) Если $3l+1\not\,\vdots\, n$, то ввиду леммы 1 имеем $\operatorname{Ker}\delta^{5l+3}\subset\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{5l+3},R)=0$. Предположим, что $3l+1\,\vdots\, n$. Пусть $f\in\operatorname{Ker}\delta^{5l+3}$. Тогда $f=\sum\limits_{i=1}^{3n}\varphi_i\alpha^*_i+\sum\limits_{i=1}^{3n}\zeta_i\beta^*_i$ для $\varphi_i,\zeta_i\in k$. Легко видеть, что

$\delta^{5l+3}(f)|_{P_{[i+3l+2][i]}} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 3n)$, и потому условие $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+3}$ равносильно тому, что

$$\begin{aligned} 0 &= \delta^{5l+3}(f)(e_{\widehat{i+1}} \otimes e_{\widehat{i}}) \\ &= (\varphi_i + \varphi_{i+n} + \varphi_{i+2n} + \zeta_i + \zeta_{i+n} + \zeta_{i+2n})\beta_i\alpha_i \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Положим $\Delta_i = \varphi_i + \zeta_i$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ и $\Delta_i = \Delta_{i-n} + \varphi_i + \zeta_i$ при $n+1 \leqslant i \leqslant 2n$. Тогда из вышеприведённого равенства следует, что $f = \sum\limits_{i=1}^{3n} \varphi_i(\alpha_i^* - \beta_i^*) + \sum\limits_{i=1}^{2n} \Delta_i(\beta_i^* - \beta_{i+n}^*)$, и пункт 4) доказан.

5) Предположим сначала, что $n > 1$. Если $3l+1 \not\vdots\, n$ и $3l+2 \not\vdots\, n$, то ввиду леммы 1 имеем $\operatorname{Ker}\delta^{5l+4} \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{5l+4}, R) = 0$. Если $3l+1 \vdots\, n$, то коцикл f из $\operatorname{Ker}\delta^{5l+4}$ представляется в виде $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \psi_{\widehat{i}}(\beta_i\alpha_i)^*$ для $\psi_{\widehat{i}} \in k$. Легко видеть, что $(\beta_i\alpha_i)^* \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+4}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Далее, если $3l+2 \vdots\, n$, то $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \varkappa_{\widehat{i}} e_{\widehat{i}}^*$, где $\varkappa_{\widehat{i}} \in k$. Легко понять, что $\delta^{5l+4}(f)|_{P_{[i+3l+3][i]}} = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 3n)$, и потому условие $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+4}$ равносильно равенству

$$0 = \delta^{5l+4}(f)(e_{\widehat{i+1}} \otimes e_{\widehat{i}}) = ((-1)^l \varkappa_{\widehat{i}} - \varkappa_{\widehat{i+1}})\beta_i\alpha_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

По индукции получаем, что $\varkappa_{\widehat{i+t}} = (-1)^{tl}\varkappa_{\widehat{i}}$. Тогда $\varkappa_{\widehat{i}} = (-1)^{nl}\varkappa_{\widehat{i}}$. Следовательно, если $\operatorname{char} k \neq 2$ и $l \not\vdots\, 2$ (а тогда и $n \not\vdots\, 2$, так как $3l+2 \vdots\, n$), то $\varkappa_{\widehat{i}} = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, и, следовательно, $\operatorname{Ker}\delta^{5l+4} = 0$. Если же $\operatorname{char} k = 2$ или $l \vdots\, 2$, то $f = \varkappa \sum\limits_{i=1}^{n} e_{\widehat{i}}^*$ для некоторого $\varkappa \in k$.

Наконец, если $n = 1$, то коцикл f из $\operatorname{Ker}\delta^{5l+4}$ представляется в виде $f = \varkappa_{\widehat{1}} e_{\widehat{1}}^* + \psi_{\widehat{1}}(\beta_1\alpha_1)^*$, где $\varkappa_{\widehat{1}}, \psi_{\widehat{1}} \in k$. Как и раньше, легко понять, что $(\beta_1\alpha_1)^* \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+4}$. Аналогично случаю $n > 1$ доказывается, что $\varkappa_{\widehat{1}} = 0$, если $\operatorname{char} k \neq 2$ и $l \not\vdots\, 2$, и что $e_{\widehat{1}}^* \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+4}$, если $\operatorname{char} k = 2$ или $l \vdots\, 2$. Из приведённых рассуждений следуют все равенства пункта 5).

Доказательство теоремы 2. Все утверждения теоремы проверяются прямыми вычислениями с использованием лемм 1 и 2, формулы $\dim_k \mathrm{HH}^t(R) = \dim_k \operatorname{Ker}(\delta^t) + \dim_k \operatorname{Ker}(\delta^{t-1}) - \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{t-1}, R)$ для $t > 0$ и формулы $\dim_k \mathrm{HH}^0(R) = \operatorname{Ker}(\delta^0)$.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес.

Следствие 1. а) $\dim_k \mathrm{HH}^0(R) = \begin{cases} 1, & \textit{если } n > 1, \\ 2, & \textit{если } n = 1. \end{cases}$

б) $\dim_k \mathrm{HH}^1(R) = 1$, $\dim_k \mathrm{HH}^2(R) = 0$.

4. Вычисление трансляций

Любой t-коцикл $f \in \operatorname{Ker} \delta^t$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\phi_z : Q_{t+z} \to Q_z\}_{z \geqslant 0}$. Гомоморфизм ϕ_z назовем z-ой трансляцией коцикла f и будем обозначать через $T^z(f)$. Для коциклов $f \in \operatorname{Ker} \delta^t$ и $g \in \operatorname{Ker} \delta^z$ имеем

$$\mathrm{cl}\ g \cdot \mathrm{cl}\ f = \mathrm{cl}\,(\mu T^0(g) T^z(f)).$$

Поэтому для вычисления соотношений в алгебре когомологий Хохшильда требуются трансляции некоторых её элементов. Данная часть работы посвящена вычислению трансляций, которые нам понадобятся для вычисления соотношений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$.

Замечание 2. Далее для t-коцикла $f \in \operatorname{Ker} \delta^t$ мы будем часто обозначать его когомологический класс $\mathrm{cl}\ f \in \mathrm{HH}^t(R)$ также через f.

Выделим некоторые элементы алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$.

а) Пусть $n = 1$. Для 0-коцикла $(\beta_1 \alpha_1)^* \in \operatorname{Ker} \delta^0$ введём обозначение

$$\varepsilon_0 := (\beta_1 \alpha_1)^*. \tag{4.1}$$

б) Для произвольного n положим

$$\varepsilon_1 := \beta_n^* + \beta_{2n}^* + \beta_{3n}^* \in \operatorname{Ker} \delta^1.$$

в) Пусть $3l \vdots n$, $l \not\vdots n$, $l \vdots 2$ и $\mathrm{char}\ k = 3$. В качестве $(5l+2)$-коцикла

$$\varepsilon_{5l+2} \in \operatorname{Ker} \delta^{5l+2}$$

берём представителя какого угодно ненулевого элемента из $\mathrm{HH}^{5l+2}(R)$ (такой существует по теореме 2); кроме того, рассмотрим $(5l+1)$-коцикл

$$\varepsilon_{5l+1} := \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{i+n}^* - \alpha_i^* + \beta_{i-1}^* - \beta_{i+n-1}^*).$$

г) Пусть $3l+1-rn \vdots 3n$, $r \in \{1,2\}$, $l \not\vdots 2$ и $\operatorname{char} k = 3$. Тогда введём в рассмотрение $(5l+2)$-коцикл ε_{5l+2} и $(5l+3)$-коцикл ε_{5l+3}, описываемые следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{5l+2} &:= -\sum_{i=1}^{n}(e^*_{\widehat{i}}\,, e^*_{\widehat{i}}) + (-1)^{r+1}\sum_{i=1}^{3n} e^*_i,\\
\varepsilon_{5l+3} &:= \beta^*_{2n} - \beta^*_n.
\end{aligned}$$

д) Пусть $3l+2 \vdots n$ и выполнено одно из условий: $l \vdots 2$ или $\operatorname{char} k = 2$. В этом случае введём в рассмотрение следующий $(5l+4)$-коцикл

$$\varepsilon_{5l+4} := \sum_{i=1}^{n} e^*_{\widehat{i}}.$$

е) Определим число λ следующим образом:

$$\lambda = \begin{cases} 5n, & \text{если } n \vdots 2 \text{ или } \operatorname{char} k = 2,\\ 10n & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{4.2}$$

и рассмотрим λ-коцикл

$$\tau_\lambda := \sum_{i=1}^{n} e^*_{\widehat{i}} + \sum_{i=1}^{3n} e^*_i.$$

Замечание 3. Из леммы 2 следует, что все только что определённые элементы действительно являются коциклами соответствующих степеней.

Замечание 4. Ясно, что в качестве $T^z(\tau_\lambda)$ для всех $z \geqslant 0$ можно взять тождественное отображение $\mathrm{id} : Q_{z+\lambda} \to Q_z$. Следовательно, умножение на τ_λ задаёт изоморфизм между $\mathrm{HH}^t(R)$ и $\mathrm{HH}^{t+\lambda}(R)$ для $t \geqslant 1$, а также сюръективный гомоморфизм из $\mathrm{HH}^0(R)$ в $\mathrm{HH}^\lambda(R)$.

Предложение 1. 1) *Пусть* $3l \vdots n$, $l \not\vdots n$, $l \vdots 2$ *и* $\operatorname{char} k = 3$. *Пусть* $3l - rn \vdots 3n$, *где* $r \in \{1,2\}$. *Тогда можно определить* $T^0(\varepsilon_{5l+1})$ *и* $T^1(\varepsilon_{5l+1})$ *на прямых слагаемых* $\sigma^l(Q_1)$ *и* $\sigma^l(Q_2)$ *следующим образом:*

$$T^0(\varepsilon_{5l+1})|_{P_{[i][\widehat{i}]}} = \begin{cases} -\alpha_i \otimes e_{\widehat{i}}, & \text{если} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \alpha_i \otimes e_{\widehat{i}}, & \text{если} \quad n+1 \leqslant i \leqslant 2n, \\ 0, & \text{если} \quad 2n+1 \leqslant i \leqslant 3n, \end{cases}$$

$$T^0(\varepsilon_{5l+1})|_{P_{[\widehat{i+1}][i]}} = \begin{cases} e_{\widehat{i+1}} \otimes \beta_i, & \text{если} \quad 0 \leqslant i \leqslant n-1, \\ -e_{\widehat{i+1}} \otimes \beta_i, & \text{если} \quad n \leqslant i \leqslant 2n-1, \\ 0, & \text{если} \quad 2n \leqslant i \leqslant 3n-1; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T^1(\varepsilon_{5l+1})|_{P_{[i+1][i]}} &= 0 && \text{для } 1 \leqslant i \leqslant 3n, \\ T^1(\varepsilon_{5l+1})|_{P_{[i-rn+1][i]}} &= (-1)^r \alpha_{i-rn+1} \otimes e_i && \text{для } 1 \leqslant i \leqslant 3n, \\ T^1(\varepsilon_{5l+1})|_{P^2_{[\widehat{i+1}][\widehat{i}]}} &= \big(\beta_i \otimes e_{\widehat{i}} + e_{\widehat{i+1}} \otimes \alpha_i,\ \beta_i \otimes e_{\widehat{i}} + e_{\widehat{i+1}} \otimes \alpha_i\big) \\ & && \text{для } \ 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

2) *Пусть* $3l+1-rn \,\vdots\, 3n$, $r \in \{1,2\}$, $l \not\vdots\, 2$, $\operatorname{char} k = 3$. *Тогда можно определить* $T^z(\varepsilon_{5l+2})$ $(z \geqslant 0)$ *на прямых слагаемых* Q_z *следующим образом:*

$$\begin{aligned} T^0(\varepsilon_{5l+2})|_{P^2_{[\widehat{i}][\widehat{i}]}} &= -(e_{\widehat{i}} \otimes e_{\widehat{i}}, e_{\widehat{i}} \otimes e_{\widehat{i}}) && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ T^0(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[i][i]}} &= (-1)^{r+1} e_i \otimes e_i && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n, \\ T^0(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[i-rn][i]}} &= 0 && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n; \\ T^1(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[i][\widehat{i}]}} &= e_i \otimes e_{\widehat{i}} && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n, \\ T^1(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[\widehat{i+1}][i]}} &= e_{\widehat{i+1}} \otimes e_i && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n; \\ T^2(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[\widehat{i+1}][\widehat{i}]}} &= \begin{pmatrix} e_{\widehat{i+1}} \otimes e_{\widehat{i}} \\ -e_{\widehat{i+1}} \otimes e_{\widehat{i}} \end{pmatrix} && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ T^2(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[i+rn+1][i]}} &= -e_{i+rn+1} \otimes e_i && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n; \end{aligned}$$

$$T^3(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[\widehat{i+2}][\widehat{i}]}} = (\beta_{i+n+1} - \beta_{i+1}) \otimes e_{\widehat{i}} + e_{\widehat{i+2}} \otimes (\alpha_{i+(r+1)n} - \alpha_{i+rn})$$

для $1 \leqslant i \leqslant n$,

$T^3(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[i+rn+2][i]}} = (-1)^r(\alpha_{i+rn+2} \otimes e_i - e_{i+rn+2} \otimes \beta_i)$ для $1 \leqslant i \leqslant 3n$;

$$T^4(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{[i+2]\widehat{[i]}}} = \begin{cases} -\alpha_{i+2} \otimes e_{\widehat{i}} + (-1)^{r+1} e_{i+2} \otimes \alpha_i, & \text{если} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \alpha_{i+2} \otimes e_{\widehat{i}} + (-1)^{r+1} e_{i+2} \otimes \alpha_i, & \text{если} \quad n+1 \leqslant i \leqslant 2n, \\ (-1)^{r+1} e_{i+2} \otimes \alpha_i, & \text{если} \quad 2n+1 \leqslant i \leqslant 3n; \end{cases}$$

$$T^4(\varepsilon_{5l+2})|_{P_{\widehat{[i+3]}[i]}} = \begin{cases} (-1)^r \beta_{i+2} \otimes e_i + e_{\widehat{i+3}} \otimes \beta_i, & \text{если } rn \leqslant i \leqslant (r+1)n-1, \\ (-1)^r \beta_{i+2} \otimes e_i - e_{\widehat{i+3}} \otimes \beta_i, & \text{если } (r+1)n \leqslant i \leqslant (r+2)n-1, \\ (-1)^r \beta_{i+2} \otimes e_i, & \text{если } (r+2)n \leqslant i \leqslant (r+3)n-1. \end{cases}$$

Для $z > 4$ *гомоморфизм* $T^z(\varepsilon_{5l+2})$ *определяется по формуле*

$$T^{5i+m}(\varepsilon_{5l+2}) = (-1)^i \sigma^i(T^m(\varepsilon_{5l+2})), \quad \text{где } \ 0 \leqslant m \leqslant 4, \ i \in \mathbb{N}.$$

3) *Пусть* $3l+2-rn \,\vdots\, 3n$, $r \in \{1,2\}$ *и выполнено одно из условий:* $l \,\vdots\, 2$ *или* $\operatorname{char} k = 2$. *Тогда можно определить* $T^0(\varepsilon_{5l+4})$ *и* $T^1(\varepsilon_{5l+4})$ *на прямых слагаемых* $\sigma^l(Q_4)$ *и* $\sigma^{l+1}(Q_0)$ *следующим образом:*

$$\begin{aligned} &T^0(\varepsilon_{5l+4})|_{P_{\widehat{[i]}\widehat{[i]}}} = e_{\widehat{i}} \otimes e_{\widehat{i}} && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ &T^0(\varepsilon_{5l+4})|_{P_{[i+rn][i]}} = 0 && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n; \\ &T^1(\varepsilon_{5l+4})|P_{\widehat{[i+1]}\widehat{[i]}} = \beta_i \otimes e_{\widehat{i}} + e_{\widehat{i+1}} \otimes \alpha_i && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \\ &T^1(\varepsilon_{5l+4})|P_{[i+rn+1][i]} = e_{i+rn+1} \otimes \beta_i && \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство пунктов 1) и 3) состоит в проверке для соответствующего $\varepsilon_t \in \mathrm{HH}^t(R)$ равенств $\mu T^0(\varepsilon_t) = \varepsilon_t$ и $d_0 T^1(\varepsilon_t) = T_0(\varepsilon_t) d_t$. Для доказательства пункта 2) надо проверить равенство $\mu T^0(\varepsilon_{5l+2}) = \varepsilon_{5l+2}$ и равенства $d_z T^{z+1}(\varepsilon_{5l+2}) = T^z(\varepsilon_{5l+2}) d_{z+5l+2}$ для $z \geqslant 0$. Так как любое такое равенство на самом деле имеет вид $(-1)^s \sigma^s(d_t T^{t+1}(\varepsilon_{5l+2})) = (-1)^s \sigma^s(T^t(\varepsilon_{5l+2}) d_{t+5l+2})$, где $0 \leqslant t \leqslant 4$ и $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то достаточно его проверить при $s = 0$. Все указанные проверки состоят в прямых вычислениях с помощью формул для дифференциалов d_t, указанных перед теоремой 1, и потому они предоставляются читателю.

5. Образующие и соотношения

В этом параграфе мы найдём множество образующих для алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ и выведем соотношения, связывающие их.

Предложение 2. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле, $n \geqslant 1$ и λ – натуральное число, определённое по формуле (4.2).*

1) *Пусть $\lambda \vdots 3$. Тогда*
   а) *если $\operatorname{char} k \neq 3$, то ε_1 и τ_λ порождают $\mathrm{HH}^*(R)$ как k-алгебру;*
   б) *если $\operatorname{char} k = 3$, то ε_1, $\varepsilon_{\frac{\lambda+3}{3}}$, $\varepsilon_{\frac{\lambda+6}{3}}$, $\varepsilon_{\frac{2\lambda+3}{3}}$, $\varepsilon_{\frac{2\lambda+6}{3}}$ и τ_λ порождают $\mathrm{HH}^*(R)$ как k-алгебру.*

2) *Пусть $n > 1$ и $\lambda - r \vdots 3$, где $r \in \{1, 2\}$. Тогда*
   а) *если $\operatorname{char} k \neq 3$, то ε_1, $\varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}}$ и τ_λ порождают $\mathrm{HH}^*(R)$ как k-алгебру;*
   б) *если $\operatorname{char} k = 3$ и $r = 1$, то ε_1, $\varepsilon_{\frac{\lambda+2}{3}}$, $\varepsilon_{\frac{2\lambda+1}{3}}$ и τ_λ порождают $\mathrm{HH}^*(R)$ как k-алгебру,*
   в) *если $\operatorname{char} k = 3$ и $r = 2$, то ε_1, $\varepsilon_{\frac{2\lambda+2}{3}}$, $\varepsilon_{\frac{\lambda+1}{3}}$, $\varepsilon_{\frac{\lambda+4}{3}}$ и τ_λ порождают $\mathrm{HH}^*(R)$ как k-алгебру.*

3) *Если $n = 1$, то множество образующих для k-алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ получается с помощью присоединения элемента ε_0 (см. (4.1)) к соответствующему из множеств, указанных в пункте 2).*

Лемма 3. *Пусть $0 \leqslant t < \lambda$. Тогда*

1) *условие* 1а) *теоремы* 2 *равносильно тому, что $t = 1$, условие* 1д) *теоремы* 2 *равносильно тому, что $n > 1$ и $t = 0$, а условие* 2) *теоремы* 2 *равносильно тому, что $n = 1$ и $t = 0$;*

2) *если $\lambda \vdots 3$, то не выполняется ни одно из условий* 1в), 1г), 1е) *или* 1ж) *теоремы* 2;

3) *если $\lambda \vdots 3$ и $\operatorname{char} k \neq 3$, то условие* 1б) *теоремы* 2 *не выполняется*;

4) *если $\lambda \vdots 3$ и $\operatorname{char} k = 3$, то условие* 1б) *теоремы* 2 *равносильно включению $t \in \{\frac{\lambda+3}{3}, \frac{\lambda+6}{3}, \frac{2\lambda+3}{3}, \frac{2\lambda+6}{3}\}$;*

5) *если $\lambda \not\vdots 3$, то условие* 1б) *теоремы* 2 *не выполняется*;

6) *если $\lambda - r \vdots 3$, где $r \in \{1, 2\}$, то условие* 1г) *теоремы* 2 *равносильно тому, что $t = \frac{r\lambda+2}{3}$, условие* 1е) *теоремы* 2 *равносильно тому, что $n > 1$ и $t = \frac{r\lambda+5}{3}$, а условие* 1ж) *теоремы* 2 *равносильно тому, что $n = 1$ и $t = \frac{r\lambda+5}{3}$;*

7) *если $\lambda - r \vdots 3$, где $r \in \{1, 2\}$, и $\operatorname{char} k \neq 3$, то условие* 1в) *теоремы* 2 *не выполняется*;

8) *если* $\lambda - r\,\vdots\,3$, *где* $r \in \{1, 2\}$, *и* $\operatorname{char} k = 3$, *то условие* 1в) *теоремы* 2 *равносильно включению* $t \in \{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}, \frac{(3-r)\lambda+4}{3}\}$.

Доказательство. Все утверждения легко проверяются с помощью определения λ, и это предоставляется сделать читателю. □

Лемма 4. 1) $\varepsilon_1 \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.

2) *Если* $3l\,\vdots\,n$, $l \not\vdots\, n$, $l\,\vdots\,2$ *и* $\operatorname{char} k = 3$, *то* $\varepsilon_{5l+1} \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.

3) *Если* $3l + 2\,\vdots\,n$ *и выполнено одно из условий:* $l\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char} k = 2$, *то* $\varepsilon_1\varepsilon_{5l+4} \neq 0$ (а *тогда и* $\varepsilon_{5l+4} \neq 0$) в $\mathrm{HH}^*(R)$.

4) *Если* $3l + 1\,\vdots\,n$, $l \not\vdots\, 2$ *и* $\operatorname{char} k = 3$, *то* $\varepsilon_{5l+3} \cdot \varepsilon_{5l+2} = \varepsilon_1\varepsilon_{10l+4}$ (а *тогда из пункта* 3 *леммы следует, что* $\varepsilon_{5l+2} \neq 0$ *и* $\varepsilon_{5l+3} \neq 0$) в $\mathrm{HH}^*(R)$. *Если вдобавок* $3l' + 2\,\vdots\,n$ *и* $l'\,\vdots\,2$, *то* $\varepsilon_{5l'+4} \cdot \varepsilon_{5l+2} = -\varepsilon_1 \cdot \tau_\lambda^{\frac{5(l+l'+1)}{\lambda}}$, $\varepsilon_{5l'+4}^2 = -\varepsilon_{5(2l'+1)+3}$.

Доказательство. 1) По лемме 2 любой элемент $f \in \operatorname{Ker}\delta^1$ представляется единственным образом в виде

$$f = \sum_{i=1}^{3n} \varkappa_i(\alpha_i^* - \beta_i^*) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_{\widehat{i}}\,(\beta_i^* + \beta_{i+n}^* + \beta_{i+2n}^*), \tag{5.1}$$

где $\varkappa_i, \varphi_{\widehat{i}} \in k$. Рассмотрим подпространство U в $\operatorname{Ker}\delta^1$, состоящее из элементов f вида (5.1), для которых $\sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_{\widehat{i}} = 0$. Образ δ^0 порождён элементами $\delta^0(e_{\widehat{i}}^*) = (\alpha_i^* + \alpha_{i+n}^* + \alpha_{i+2n}^*) - (\beta_{i-1}^* + \beta_{i+n-1}^* + \beta_{i+2n-1}^*)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\delta^0(e_i^*) = \beta_i^* - \alpha_i^*$ $(1 \leqslant i \leqslant 3n)$. Легко видеть, что все они лежат в U, и, следовательно, $\operatorname{Im}\delta^0 \subset U$. Но ясно, что $\varepsilon_1 = \beta_n^* + \beta_{2n}^* + \beta_{3n}^* \notin U$, и потому $\varepsilon_1 \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.

2) По лемме 2 любой элемент $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+1}$ представляется единственным образом в виде

$$\begin{aligned} f = &\sum_{i=1}^{n} \varphi_{\widehat{i}}\,(\alpha_i^* + \alpha_{i+n}^* + \alpha_{i+2n}^* - \beta_{i-1}^* - \beta_{i+n-1}^* - \beta_{i+2n-1}^*) \\ &+ \varkappa \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^* - \alpha_{i+n}^* - \beta_{i-1}^* + \beta_{i+n-1}^*) \end{aligned}$$

для $\varphi_{\widehat{i}}, \varkappa \in k$. Образ δ^{5l} порождён элементами $\delta^{5l}(e_{\widehat{i}}^*) = \alpha_i^* + \alpha_{i+n}^* + \alpha_{i+2n}^* - (\beta_{i-1}^* + \beta_{i+n-1}^* + \beta_{i+2n-1}^*)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. При представлении всех этих элементов в вышеуказанном виде выполняется равенство $\varkappa = 0$. Так как для элемента $\varepsilon_{5l+1} = \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha^*_{i+n} - \alpha^*_i + \beta^*_{i-1} - \beta^*_{i+n-1})$ такое равенство не выполняется, то $\varepsilon_{5l+1} \notin \operatorname{Im}\,\delta^{5l}$.

3) Из предложения 1 следует, что $\varepsilon_1\varepsilon_{5l+4} \in \mathrm{HH}^{5l+5}(R)$ представляется гомоморфизмом $\varepsilon_1 T^1(\varepsilon_{5l+4}) = (\beta_n\alpha_n)^* \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+5}$. По лемме 2 любой элемент $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+5}$ представляется единственным образом в виде $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\hat{i}}(\beta_i\alpha_i)^*$ для $\varphi_{\hat{i}} \in k$, кроме случая $n = 1$, $\operatorname{char} k = 2$, в котором имеется единственное представление в виде $f = \varphi_{\hat{1}}(\beta_1\alpha_1)^* + \varkappa(e^*_{\hat{1}} + \sum\limits_{i=1}^{3} e^*_i)$, где $\varphi_{\hat{1}}, \varkappa \in k$. Образ δ^{5l+4} порождён элементами $\delta^{5l+4}(e_{\hat{i}}^*) = (\beta_i\alpha_i)^* - (\beta_{i-1}\alpha_{i-1})^*$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. При представлении всех этих элементов в вышеуказанном виде выполняется равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi_{\hat{i}} = 0$. Так как для элемента $(\beta_n\alpha_n)^*$ это равенство не выполняется, то $\varepsilon_1 T^1(\varepsilon_{5l+4}) \notin \operatorname{Im}\,\delta^{5l+4}$, что и требовалось доказать.

4) Заметим, что элемент ε_{10l+4} определён. Из предложения 1 и доказательства пункта 3) следует, что $\varepsilon_{5l+3} \cdot \varepsilon_{5l+2} \in \mathrm{HH}^{5l+5}(R)$ представляется гомоморфизмом $\varepsilon_{5l+3}T^{5l+3}(\varepsilon_{5l+2}) = (\beta_n\alpha_n)^* = \varepsilon_1 T^1(\varepsilon_{10l+4})$, то есть $\varepsilon_{5l+3} \cdot \varepsilon_{5l+2} = \varepsilon_1\varepsilon_{10l+4}$.

Заметим, что $\frac{5(l+l'+1)}{\lambda} \in \mathbb{Z}$. Пусть $3l + 1 - rn \,\vdots\, 3n$. Так как n и 3 взаимно просты, то легко получаем, что $3l' + 2 - 2rn \,\vdots\, 3n$. Далее, из предложения 1 следует, что $\varepsilon_{5l'+4} \cdot \varepsilon_{5l+2} \in \mathrm{HH}^{5(l'+l+1)+1}(R)$ представляется гомоморфизмом

$$\varepsilon_{5l'+4}T^{5l'+4}(\varepsilon_{5l+2}) = \sum_{i=2rn+1}^{(2r+1)n}(\alpha^*_{i+n} - \alpha^*_i) + \sum_{i=rn}^{(r+1)n-1}(\beta^*_i - \beta^*_{i+n}).$$

Образ гомоморфизма $\delta^{5(l'+l+1)}$ порождён следующими элементами

$$\delta^{5(l'+l+1)}(e^*_{\hat{i}}) = (\alpha^*_i + \alpha^*_{i+n} + \alpha^*_{i+2n}) - (\beta^*_{i-1} + \beta^*_{i+n-1} + \beta^*_{i+2n-1}) \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\delta^{5(l'+l+1)}(e^*_i) = \beta^*_i - \alpha^*_i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 3n.$$

Тогда в $\mathrm{HH}^{5(l'+l+1)+1}(R)$ выполнено $\alpha^*_{i+1} + \alpha^*_{i+n+1} + \alpha^*_{i+2n+1} = \beta^*_i + \beta^*_{i+n} + \beta^*_{i+2n} = \alpha^*_i + \alpha^*_{i+n} + \alpha^*_{i+2n}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, и тогда $\alpha^*_i +$

$\alpha^*_{i+n} + \alpha^*_{i+2n} = \varepsilon_1 \cdot \tau_\lambda^{\frac{5(l+l'+1)}{\lambda}}$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно, $\alpha^*_{i+2n} - \alpha^*_{i+n} = \alpha^*_{i+n} - \alpha^*_i + \varepsilon_1 \cdot \tau_\lambda^{\frac{5(l+l'+1)}{\lambda}}$ в $\mathrm{HH}^{5(l'+l+1)+1}(R)$. Отсюда для любого $j \in \mathbb{Z}$ получаем $\sum\limits_{i=j+1}^{j+n} (\alpha^*_{i+n} - \alpha^*_i) = \sum\limits_{i=j}^{j+n-1} (\alpha^*_{i+n} - \alpha^*_i) + \varepsilon_1 \cdot \tau_\lambda^{\frac{5(l+l'+1)}{\lambda}}$ в $\mathrm{HH}^{5(l'+l+1)+1}(R)$. Так как в $\mathrm{HH}^{5(l'+l+1)+1}(R)$ имеем $\alpha^*_i = \beta^*_i$ для $1 \leqslant i \leqslant 3n$, то

$$\varepsilon_{5l'+4} \cdot \varepsilon_{5l+2} = (rn+1)\varepsilon_1 \cdot \tau_\lambda^{\frac{5(l+l'+1)}{\lambda}} = -\varepsilon_1 \cdot \tau_\lambda^{\frac{5(l+l'+1)}{\lambda}}.$$

Наконец, $\varepsilon^2_{5l'+4} = \varkappa \varepsilon_{5(2l'+1)+3}$ для некоторого $\varkappa \in k$. Домножив это равенство на $\varepsilon_{5(2l'+1)+2}$ и воспользовавшись уже доказанными равенствами, получим $\varkappa = -1$.

Доказательство предложения 2. Из замечания 4 следует, что алгебра $\mathrm{HH}^*(R)$ порождена множеством $\bigoplus\limits_{t=0}^{\lambda-1} \mathrm{HH}^t(R) \cup \{\tau_\lambda\}$. Поэтому в каждом из рассматриваемых случаев достаточно доказать, что подалгебра $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая соответствующим множеством, содержит $\bigoplus\limits_{t=0}^{\lambda-1} \mathrm{HH}^t(R)$. Легко показать, используя теорему 2 и леммы 3 и 4, что следующие наборы элементов $\mathrm{HH}^*(R)$ составляют базис подпространства $\bigoplus\limits_{t=1}^{\lambda-1} \mathrm{HH}^t(R)$:

ε_1 в случае 1а ;

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_{\frac{\lambda+3}{3}},\ \varepsilon_{\frac{\lambda+6}{3}},\ \varepsilon_{\frac{2\lambda+3}{3}}$ и $\varepsilon_{\frac{2\lambda+6}{3}}$ в случае 1б;

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}}$ и $\varepsilon_1\varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}}$ в случае 2а;

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_{\frac{\lambda+2}{3}},\ \varepsilon_1\varepsilon_{\frac{\lambda+2}{3}},\ \varepsilon_{\frac{2\lambda+1}{3}}$ и $\varepsilon^2_{\frac{\lambda+2}{3}}$ в случае 2б;

$\varepsilon_1,\ \varepsilon_{\frac{2\lambda+2}{3}},\ \varepsilon_1\varepsilon_{\frac{2\lambda+2}{3}},\ \varepsilon_{\frac{\lambda+1}{3}}$ и $\varepsilon_{\frac{\lambda+4}{3}}$ в случае 2в.

Остаётся заметить, что $\mathrm{HH}^0(R) = {}_k\langle\, 1 \,\rangle$ в случае $n > 1$ и $\mathrm{HH}^0(R) = {}_k\langle\, 1, \varepsilon_0 \,\rangle$ в случае $n = 1$.

Предложение 3. 1) $\varepsilon_1^2 = 0$.

2) *Пусть* $\lambda \vdots 3$, $\mathrm{char}\ k = 3$. *Тогда произведение любых двух элементов из множества* $\{\varepsilon_1, \varepsilon_{\frac{\lambda+3}{3}}, \varepsilon_{\frac{\lambda+6}{3}}, \varepsilon_{\frac{2\lambda+3}{3}}, \varepsilon_{\frac{2\lambda+6}{3}}\}$ *равно* 0.

3) *Пусть* $\lambda - r \vdots 3$, *где* $r \in \{1, 2\}$, $\mathrm{char}\, k \neq 3$. *Тогда* $\varepsilon^2_{\frac{r\lambda+2}{3}} = 0$.

4) *Пусть* $\lambda - r \vdots 3$, *где* $r \in \{1, 2\}$, $\mathrm{char}\, k = 3$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\varepsilon^2_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} &= \varepsilon^2_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}}\\ &= \varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}} \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} = 0,\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}} \cdot \tau_\lambda^{2-r}, \quad \varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}} \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} = -\varepsilon_1 \tau_\lambda,$$

$$\varepsilon^2_{\frac{r\lambda+2}{3}} = -\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} \cdot \tau_\lambda^{r-1}.$$

5) *Пусть* $n = 1$. *Тогда* ε_0 *даёт* 0 *в произведении с любым элементом из множества* $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_4\} \cup \mathcal{M}$, *где*

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \{\varepsilon_7, \varepsilon_8\}, & \textit{если} \quad \mathrm{char}\, k = 3,\\ \varnothing, & \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

Кроме того, $\varepsilon_0 \tau_\lambda = \begin{cases} \varepsilon_1 \varepsilon_4, & \textit{если } \mathrm{char}\, k = 2,\\ 0 & \textit{в противном случае.}\end{cases}$

Доказательство. 1) Следует из того, что $\mathrm{HH}^2(R) = 0$ (см. следствие 1).

2) Произведение вида $\varepsilon_p \varepsilon_q$, где $p \leqslant q$, $p, q \in \{1, \frac{\lambda+3}{3}, \frac{\lambda+6}{3}, \frac{2\lambda+3}{3}, \frac{2\lambda+6}{3}\}$, равно 0, так как $\mathrm{HH}^{p+q}(R) = 0$, кроме следующих случаев:

$$\begin{aligned} &p = 1, \quad q = \frac{\lambda+3}{3};\\ &p = 1, \quad q = \frac{2\lambda+3}{3};\\ &p = q = \frac{\lambda+3}{3};\\ &p = q = \frac{2\lambda+3}{3}.\end{aligned}$$

Так как сейчас λ чётно, то из градуированной коммутативности алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ следует, что $\varepsilon_p^2 = -\varepsilon_p^2$ для $p \in \{\frac{\lambda+3}{3}, \frac{2\lambda+3}{3}\}$. Так как $\mathrm{char}\, k = 3$, то остаётся показать, что $\varepsilon_1 \varepsilon_{\frac{\lambda+3}{3}} = \varepsilon_1 \varepsilon_{\frac{2\lambda+3}{3}} = 0$. Докажем, что, если $3l \vdots n$, $l \not\vdots n$, $l \vdots 2$ и $\mathrm{char}\, k = 3$, то $\varepsilon_1 \varepsilon_{5l+1} = 0$. Из этого будут следовать оставшиеся равенства пункта 2).

Пусть $3l - rn \vdots 3n$, где $r \in \{1,2\}$. Из предложения 1 следует, что $\varepsilon_1\varepsilon_{5l+1} \in \mathrm{HH}^{5l+2}(R)$ представляется гомоморфизмом $\varepsilon_1 T^1(\varepsilon_{5l+1}) = ((\beta_n\alpha_n)^*, (\beta_n\alpha_n)^*) \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+2}$. По лемме 2 любой элемент $f \in \operatorname{Ker}\delta^{5l+2}$ представляется единственным образом в виде $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \varkappa_{\widehat{i},1}((\beta_i\alpha_i)^*, 0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \varkappa_{\widehat{i},2}(0, (\beta_i\alpha_i)^*) + \sum\limits_{i=1}^{3n} \varphi_i(\alpha_{i+1}\beta_i)^*$, где $\varkappa_{\widehat{i},1}, \varkappa_{\widehat{i},2}, \varphi_i \in k$. Образ гомоморфизма δ^{5l+1} порождён элементами

$$\delta^{5l+1}(\alpha_i^*) = \begin{cases} ((\beta_i\alpha_i)^*, 0) + (\alpha_i\beta_{i-1})^* & \text{для } rn+1 \leqslant i \leqslant (r+1)n, \\ (-(\beta_i\alpha_i)^*, (\beta_i\alpha_i)^*) + (\alpha_i\beta_{i-1})^* & \text{для } (r+1)n+1 \leqslant i \leqslant (r+2)n, \\ (0, -(\beta_i\alpha_i)^*) + (\alpha_i\beta_{i-1})^* & \text{для } (r+2)n+1 \leqslant i \leqslant (r+3)n, \end{cases}$$

и

$$\delta^{5l+1}(\beta_i^*) = \begin{cases} ((\beta_i\alpha_i)^*, 0) + (\alpha_{i+1}\beta_i)^* & \text{для } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ (-(\beta_i\alpha_i)^*, (\beta_i\alpha_i)^*) + (\alpha_{i+1}\beta_i)^* & \text{для } n+1 \leqslant i \leqslant 2n, \\ (0, -(\beta_i\alpha_i)^*) + (\alpha_{i+1}\beta_i)^* & \text{для } 2n+1 \leqslant i \leqslant 3n. \end{cases}$$

При представлении всех этих элементов в вышеуказанном виде выполняется равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}(\varkappa_{\widehat{i},2} - \varkappa_{\widehat{i},1}) + \sum\limits_{i=1}^{3n} \varphi_i = 0$. Значит

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\,\delta^{5l+1} \subset V = \{&\sum_{i=1}^{n} \varkappa_{\widehat{i},1}((\beta_i\alpha_i)^*, 0) + \sum_{i=1}^{n} \varkappa_{\widehat{i},2}(0, (\beta_i\alpha_i)^*) \\ &+ \sum_{i=1}^{3n} \varphi_i(\alpha_{i+1}\beta_i)^* \mid \sum_{i=1}^{n}(\varkappa_{\widehat{i},2} - \varkappa_{\widehat{i},1}) + \sum_{i=1}^{3n} \varphi_i = 0\}. \end{aligned}$$

Так как $\dim_k \operatorname{Im}\,\delta^{5l+1} = 5n - 1 = \dim_k V$, то $\operatorname{Im}\,\delta^{5l+1} = V$. Тогда легко проверить, что $\varepsilon_1 T^1(\varepsilon_{5l+1}) = ((\beta_n\alpha_n)^*, (\beta_n\alpha_n)^*) \in V = \operatorname{Im}\,\delta^{5l+1}$, то есть $\varepsilon_1\varepsilon_{5l+1} = 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.

3) Следует из того, что в этом случае $\mathrm{HH}^{\frac{2r\lambda+4}{3}}(R) = 0$ (см. теорему 2).

4) Равенство $\varepsilon^2_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} = 0$ следует из того, что сейчас $\frac{(3-r)\lambda+1}{3}$ нечётно (ср. доказательство пункта 2). Далее, $\varepsilon^2_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} = \varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}} \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} = 0$, поскольку по теореме 2 имеем $\mathrm{HH}^{\frac{(6-2r)\lambda+8}{3}}(R) = \mathrm{HH}^{\frac{(3-r)\lambda+7}{3}}(R) = \mathrm{HH}^{\lambda+2}(R) = 0$. Равенства $\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} \cdot$

$\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}} \cdot \tau_\lambda^{2-r}$, $\varepsilon_{\frac{r\lambda+2}{3}} \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} = -\varepsilon_1\tau_\lambda$, $\varepsilon^2_{\frac{r\lambda+2}{3}} = -\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} \cdot \tau_\lambda^{r-1}$ следуют из пункта 4) леммы 4.

Из предложения 1 следует, что $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} \in \mathrm{HH}^{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}}(R)$ представляется гомоморфизмом $\varepsilon_1 T^1(\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}}) = \beta_n^* + \beta_{2n}^* + \beta_{3n}^* \in \operatorname{Ker}\delta^{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}}$. Пользуясь тем же предложением, получаем, что $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon^2_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} \in \mathrm{HH}^{\frac{(6-2r)\lambda+5}{3}}(R)$ представляется гомоморфизмом $(\beta_n^* + \beta_{2n}^* + \beta_{3n}^*)T^{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}}(\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}}) = 0$. С другой стороны, $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} = \varkappa\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}}$ для некоторого $\varkappa \in k$. Так как $\varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+4}{3}} \cdot \varepsilon_{\frac{(3-r)\lambda+1}{3}} \neq 0$, то $\varkappa = 0$.

5) Ясно, что $\varepsilon_0^2 = 0$. Далее, имеем $\varepsilon_0 T^0(\tau_\lambda) = (\beta_1\alpha_1)^* \in \operatorname{Ker}\delta^\lambda$. Если $\operatorname{char} k = 2$, то $\lambda = 5$, определён элемент ε_4 и $\varepsilon_1\varepsilon_4 = (\beta_1\alpha_1)^*$ в $\mathrm{HH}^5(R)$ (смотри доказательство пункта 3 леммы 4). Если же $\operatorname{char} k \neq 2$, то $\lambda = 10$ и $\mathrm{HH}^{10}(R)$ порождено элементом τ_{10}. Тогда $\varepsilon_0\tau_{10} = \varkappa\tau_{10}$ для некоторого $\varkappa \in k$. Но так как $\tau_{10}(Q_{10}) \not\subset \operatorname{Rad} R$ и $\big(\varepsilon_0 T_0(\tau_{10})\big)(Q_{10}) \subset \operatorname{Rad} R$, то $\varkappa = 0$. Для тех ε_p из формулировки пункта 5), для которых $p \geqslant 1$, из уже доказанных равенств следует, что $\varepsilon_0\varepsilon_p\tau_\lambda = 0$. Тогда, используя замечание 4, получаем $\varepsilon_0\varepsilon_p = 0$. □

Следствие 2. $\mathrm{HH}^*(R)$ – *коммутативная алгебра.*

Доказательство. Используя предложения 2 и 3, легко получаем, что в случае $\operatorname{char} k \neq 2$ произведение любых двух образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ нечётной степени равно 0, и тогда из градуированной коммутативности алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ следует её коммутативность. □

6. Описание алгебры когомологий Хохшильда

В этом параграфе мы докажем теорему, описывающую алгебру $\mathrm{HH}^*(R)$ в терминах образующих с соотношениями. Далее, когда мы рассматриваем алгебру многочленов от нескольких переменных, то вводим на ней градуировку такую, что степень каждой переменной равна нижнему индексу в её обозначении.

Теорема 3. *Пусть k – алгебраически замкнутое поле, $n \geqslant 1$ и λ – натуральное число, определённое по формуле* (4.2).

1) *Пусть $\lambda \vdots 3$. Тогда*
   a) *если $\operatorname{char} k \neq 3$, то $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]/I$, где $\mathcal{X} = \{X_1\}$, I – идеал, порождённый элементом X_1^2;*

б) *если* $\operatorname{char} k = 3$, *то* $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]/I$, *где* $\mathcal{X} = \{X_1, X_{\frac{\lambda+3}{3}}, X_{\frac{\lambda+6}{3}}, X_{\frac{2\lambda+3}{3}}, X_{\frac{2\lambda+6}{3}}\}$, I – *идеал, порождённый элементами* AB *для всех* $A, B \in \mathcal{X}$.

2) *Пусть* $n > 1$ *и* $\lambda - r \vdots 3$, *где* $r \in \{1, 2\}$. *Тогда*

а) *если* $\operatorname{char} k \neq 3$, *то* $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]/I$, *где* $\mathcal{X} = \{X_1, X_{\frac{r\lambda+2}{3}}\}$, I – *идеал, порождённый элементами* X_1^2 *и* $X^2_{\frac{r\lambda+2}{3}}$;

б) *если* $\operatorname{char} k = 3$ *и* $r = 1$, *то* $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]/I$, *где* $\mathcal{X} = \{X_1, X_{\frac{\lambda+2}{3}}, X_{\frac{2\lambda+1}{3}}\}$, I – *идеал, порождённый множеством*

$$\Big\{X_1^2,\ X^2_{\frac{2\lambda+1}{3}},\ X_1 X_{\frac{2\lambda+1}{3}},\ X_1 X^2_{\frac{\lambda+2}{3}},\ X^3_{\frac{\lambda+2}{3}},\ X_{\frac{\lambda+2}{3}} X_{\frac{2\lambda+1}{3}} + X_1 T_\lambda\Big\};$$

в) *если* $\operatorname{char} k = 3$ *и* $r = 2$, *то* $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]/I$, *где* $\mathcal{X} = \{X_1, X_{\frac{2\lambda+2}{3}}, X_{\frac{\lambda+1}{3}}, X_{\frac{\lambda+4}{3}}\}$, I – *идеал, порождённый множеством*

$$\Big\{X^2_{\frac{2\lambda+2}{3}} + X_{\frac{\lambda+4}{3}} T_\lambda,\ X_{\frac{2\lambda+2}{3}} X_{\frac{\lambda+1}{3}} + X_1 T_\lambda,\ X_{\frac{\lambda+1}{3}} X_{\frac{\lambda+4}{3}} - X_1 X_{\frac{2\lambda+2}{3}}\Big\}$$
$$\cup \Big\{X_1^2,\ X^2_{\frac{\lambda+1}{3}},\ X^2_{\frac{\lambda+4}{3}},\ X_1 X_{\frac{\lambda+1}{3}},\ X_1 X_{\frac{\lambda+4}{3}},\ X_{\frac{2\lambda+2}{3}} X_{\frac{\lambda+4}{3}}\Big\}.$$

3) *Пусть* $n = 1$. *Тогда*

а) *если* $\operatorname{char} k \notin \{2, 3\}$, *то* $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_{10}\}]/I$, *где* $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_4\}$, I – *идеал, порождённый элементами* X_0^2, X_0X_1, X_0X_4, X_0T_{10}, X_1^2 *и* X_4^2;

б) *если* $\operatorname{char} k = 2$, *то* $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_5\}]/I$, *где* $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_4\}$, I – *идеал, порождённый элементами* X_0^2, X_0X_1, X_0X_4, $X_0T_5 - X_1X_4$, X_1^2 *и* X_4^2;

в) *если* $\operatorname{char} k = 3$, *то* $\mathrm{HH}^*(R) \cong k[\mathcal{X} \cup \{T_{10}\}]/I$, *где* $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, X_4, X_7\}$, I – *идеал, порождённый элементами* X_0A *для всех* $A \in \mathcal{X} \cup \{T_{10}\}$, *а также элементами* X_1^2, X_7^2, X_1X_7, $X_1X_4^2$, X_4^3 *и* $X_4X_7 + X_1T_{10}$.

Доказательство. В каждом из случаев, описанных выше, рассмотрим гомоморфизм градуированных k-алгебр $\pi : k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}] \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий каждую образующую $X_p \in \mathcal{X}$ в ε_p, а T_λ в τ_λ. Из предложения 2 следует, что π – эпиморфизм. Из предложения 3 следует, что $I \subset \operatorname{Ker} \pi$. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм градуированных k-алгебр $\bar{\pi} : k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]/I \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий класс элемента $X_p \in \mathcal{X}$ в ε_p, а класс элемента T_λ в τ_λ. Осталось доказать, что $\bar{\pi}$ – изоморфизм. Обозначим алгебру $k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]/I$

через A. Пусть $A = \bigoplus_{t\geqslant 0} A^t$ – прямое разложение алгебры A на однородные прямые слагаемые. Нам достаточно проверить, что при $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\dim_k A^t \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^t(R). \tag{6.1}$$

Рассмотрим множество $\tilde{\mathcal{X}} \subset k[\mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}]$, определённое следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{X}} = \{1, X_1\} \text{ в случае 1а);}$$
$$\tilde{\mathcal{X}} = \{1, X_1, X_{\frac{\lambda+3}{3}}, X_{\frac{\lambda+6}{3}}, X_{\frac{2\lambda+3}{3}}, X_{\frac{2\lambda+6}{3}}\} \text{ в случае 1б);}$$
$$\tilde{\mathcal{X}} = \{1, X_1, X_{\frac{r\lambda+2}{3}}, X_1X_{\frac{r\lambda+2}{3}}\} \text{ в случае 2а);}$$
$$\tilde{\mathcal{X}} = \{1, X_1, X_{\frac{\lambda+2}{3}}, X_1X_{\frac{\lambda+2}{3}}, X_{\frac{2\lambda+1}{3}}, X^2_{\frac{\lambda+2}{3}}\} \text{ в случае 2б);}$$
$$\tilde{\mathcal{X}} = \{1, X_1, X_{\frac{2\lambda+2}{3}}, X_1X_{\frac{2\lambda+2}{3}}, X_{\frac{\lambda+1}{3}}, X_{\frac{\lambda+4}{3}}\} \text{ в случае 2в);}$$
$$\tilde{\mathcal{X}} = \{1, X_0, X_1, X_4, X_1X_4\} \text{ в случаях 3а) и 3б);}$$
$$\tilde{\mathcal{X}} = \{1, X_0, X_1, X_4, X_1X_4, X_7, X_4^2\} \text{ в случае 3в).}$$

Несложно показать, что, если $\omega \in \mathcal{X} \cup \{T_\lambda\}$, $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{X}}$, то $\omega\tilde{\omega} = \varkappa\tilde{\omega}' T_\lambda^p + \varphi$, где $p \geqslant 0$, $\varkappa \in k$, $\varphi \in I$, а $\tilde{\omega}' \in \tilde{\mathcal{X}}$ или $\tilde{\omega}' = 0$. Легко видеть, что любой элемент вида $\omega_1 \ldots \omega_q$, где $\omega_1, \ldots, \omega_q \in \mathcal{X}$, по модулю идеала I равен $\varkappa\tilde{\omega}T_\lambda^p$, где $p \geqslant 0$, $\varkappa \in k$ и либо $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{X}}$, либо $\tilde{\omega} = 0$. Следовательно, классы элементов вида $\tilde{\omega}T_\lambda^p$, где $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{X}}$, $p \geqslant 0$, порождают A над k. Легко убедиться, что при $n > 1$ элементов такого вида степени t ($t \geqslant 0$) имеется ровно $\dim_k \mathrm{HH}^t(R)$, и неравенство (6.1) доказано.

Если же $n = 1$, то (6.1) получаем аналогично для всех t, за исключением $t \in \{m\lambda \mid m \in \mathbb{N}\}$. Наконец, для $t = m\lambda$, где $m \in \mathbb{N}$, количество элементов вида $\tilde{\omega}T_\lambda^p$, где $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{X}}$, $p \geqslant 0$, равно $\dim_k \mathrm{HH}^t(R)+1$. Но в случаях 3а) и 3в) выполнено соотношение $X_0T_{10} = 0$, а в случае 3б) – соотношение $X_0T_5 - X_1X_4 = 0$, и потому имеется не более $\dim_k \mathrm{HH}^t(R)$ линейно независимых по модулю I элементов вышеупомянутого вида, имеющих степень $m\lambda$, где $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, вновь для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство (6.1), и теорема доказана. $\square$

Литература

1. C. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv., **55** (1980), 199–224.
2. C. Riedtmann, *Representation-finite self-injective algebras of class A_n.* — Lect. Notes Math., **832** (1980), 449–520.
3. K. Erdmann, T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n.* — Forum Math., **11** (1999), 177–201.
4. K. Erdmann, T. Holm, and N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n,* II. — Algebras and Repr. Theory, **5** (2002), 457–482.
5. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **321** (2005), 36–66.
6. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **330** (2006), 173–200.
7. Ю. В. Волков, *Классы стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Вестн. С.-Пб. ун-та, Сер. 1, Мат., мех., астр., 2008, No. 1, 15–21.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **343** (2007), 121–182.
9. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **365** (2009), 63–121.
10. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.

Volkov Yu. V., Generalov A. I. Hochschild cohomology for self-injective algebras of tree class D_n. III.

We describe in terms of generators and relations the Hochschild cohomology algebra for a family of representation-finite self-injective algebras of tree class D_4. In the corresponding calculations, we use the minimal projective bimodule resolution which was constructed in the another authors' paper.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: wolf86_666@list.ru
general@pdmi.ras.ru

Поступило 20 декабря 2010 г.