

Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев

ГРУППА ШЕВАЛЛЕ ТИПА E_7 В 56-МЕРНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Настоящая работа, являющаяся продолжением [138, 135, 18], посвящена детальному компьютерному изучению действия группы Шевалле $G(E_7, R)$ на минимальном модуле $V(\varpi_7)$. Как и работы [135, 18], настоящая статья носит технический характер и предназначена главным образом для ссылок в дальнейших более содержательных работах, посвященных

- K -теории исключительных групп,
- изучению надгрупп группы $G(E_7, R)$ в полной линейной группе $GL(56, R)$,
- описанию некоторых классов подгрупп в $G(E_7, R)$,
- геометрии корневых подгрупп,
- задачам порождения.

Мы отсылаем читателя к [18, 137] по поводу более подробного описания всего проекта, в рамках которого выполнена настоящая работа, и к [133, 138, 8, 20, 10] по поводу некоторых возможных приложений.

Ключевые слова: группы Шевалле, исключительные группы, микровесовые представления, структурные константы действия, инвариантные формы, корневые элементы.

Работа авторов выполнялась в рамках проектов РФФИ 09-01-00784, “Эффективное порождение в группах типа Ли” (ПОМИ РАН), РФФИ 09-01-00878 “Надгруппы редуктивных групп в алгебраических группах над кольцами” (СПбГУ), РФФИ 09-01-90304 “Структурная теория классических и алгебраических групп” (СПбГУ), РФФИ 10-01-90016 “Исследование структуры форм редуктивных групп и поведения малых унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп” (СПбГУ), и РФФИ 10-01-92651 “Высшие законы композиции, алгебраическая K -теория и исключительные группы” (СПбГУ). Первый автор, кроме того, частично пользовался поддержкой грантов РФФИ 09-01-00762 (Сибирский Федеральный Университет) и РФФИ 09-01-91333 (ПОМИ РАН). Второй автор также пользовался поддержкой гранта РФФИ 10-01-00551 (ПОМИ РАН) и Golda Meir Postdoctoral Fellowship

Заметим, что аналогичные вычисления в 27-мерном модуле $V(\varpi_1)$ для группы Шевалле $G(E_6, R)$ проводились в нашей совместной работе с Игорем Певзнером [18]. Эти вычисления были использованы, в частности, в [15, 136, 23, 22, 28, 29, 30, 12].

Нашими основными инструментами здесь служат

- реализация 56-мерного модуля как внутреннего модуля Шевалле в унипотентном радикале параболической подгруппы типа P_8 в группе Шевалле $G(E_8, R)$,
- обширные компьютерные вычисления, проведенные с использованием системы *Mathematica*.

Мы учитываем результаты, связанные с 56-мерной тернарной алгеброй Брауна—Фрейденталя \mathbb{F} , но предпочитаем прямо ими не пользоваться, а вычислять все непосредственно с использованием вложения $E_7 < E_8$. Дело в том, что в большинстве результатов, доказываемых в терминах алгебры \mathbb{F} , приходится накладывать условие $2 \in R^*$ или даже $6 \in R^*$, в то время как мы ставим своей целью получение соответствующих результатов для совершенно произвольных коммутативных колец.

Нашими основными целями здесь являются явный выбор и табуляция знаков структурных констант этого действия, согласованных с выбором положительного базиса Шевалле в работе [135], построение полилинейных инвариантов и уравнений на элементы матриц из группы Шевалле $G(E_7, R)$ в этом представлении, а также явная табуляция корневых элементов. Для удобства использования в дальнейших работах получающиеся таблицы воспроизводятся в *четыре* следующих нумерациях:

- естественная нумерация,
- нумерация, связанная с ограничением на A_6 ,
- нумерация, связанная с ограничением на D_6 .
- нумерация, связанная с ограничением на E_6 .

Так как уже получающийся *несимметричный* инвариант степени 4 имеет 19768 ненулевых мономов от 56 переменных, нет, конечно, никакой возможности воспроизвести здесь явное задание этой биквадратной формы в координатах. Однако, 126 вторых частных производных этой формы возникают как старшая орбита уравнений на векторы старшего веса в этом представлении, см. [9] и ссылки там. Для двух из используемых нами нумераций эти уравнения воспроизводятся в [16] и [103] в связи с рассматриваемыми там приложениями.

1. Корни E_7

Все наши обозначения, относящиеся к корням, весам, алгебрам Ли, алгебраическим группам и представлениям совершенно стандартны и следуют [2, 3, 4, 33, 35, 36, 37, 55, 56], см. также [133, 112], где можно найти много дальнейших ссылок. Мы не напоминаем определение групп Шевалле и основных подгрупп в них, которые можно найти, например, в [1, 2, 35, 39, 40, 41, 42, 43, 90, 105, 125, 126, 128, 132, 133, 134, 138]. Более того, мы не напоминаем даже основные используемые в дальнейшем обозначения, а отсылаем читателя к первым четырем параграфам статьи [18]. Там можно найти основные обозначения и ссылки на используемые в дальнейшем факты, относящиеся к

- структурным константам групп Шевалле [55, 71, 93, 72, 138, 135, 7],
- модулям Вейля и весовым диаграммам [105, 112, 133, 134, 107],
- внутренним модулям Шевалле [45, 113, 114, 115],
- гиперболической реализации систем корней E_l [27, 86, 135, 18],
- программированию на языке `Mathematica`.

Мы не воспроизводим из работ [18, 137] полную библиографию, относящуюся к исключительным группам. Мы приводим лишь

- работы, которые цитируются в тексте,
- работы, относящиеся непосредственно к группе типа E_7 и ее 56-мерному представлению,
- некоторые дальнейшие работы о вычислениях в исключительных группах, появившиеся в 2007–2010 годах, которые либо не вошли в библиографии [18, 137], либо для которых на тот момент не были известны их выходные данные.

В работе [135] приведен код, который порождает таблицы корней систем E_l в гиперболическом базисе и в базисе простых корней. Мы не будем воспроизводить этот код, который просто переводит определение из [18] на язык `Mathematica`, а ограничимся ответом, тем более, что в [135] положительные корни перечислены только в записи Дынкина, но не в гиперболической записи. В действительности, вычисления производились как раз в гиперболической форме, так что основным объектом является следующий список `positiveE7`:

$$\{\{0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0\}, \\ \{0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0\},$$

$\{0,0,0,0,0,0,-1,1\}, \{0,-1,0,1,0,0,0,0\}, \{1,1,1,0,1,0,0,0\},$
 $\{0,0,-1,0,1,0,0,0\}, \{0,0,0,-1,0,1,0,0\}, \{0,0,0,0,-1,0,1,0\},$
 $\{0,0,0,0,0,-1,0,1\}, \{0,-1,0,0,1,0,0,0\}, \{1,1,0,1,1,0,0,0\},$
 $\{1,1,1,0,0,1,0,0\}, \{0,0,-1,0,0,1,0,0\}, \{0,0,0,-1,0,0,1,0\},$
 $\{0,0,0,0,-1,0,0,1\}, \{1,0,1,1,1,0,0,0\}, \{0,-1,0,0,0,1,0,0\},$
 $\{1,1,0,1,0,1,0,0\}, \{1,1,1,0,0,0,1,0\}, \{0,0,-1,0,0,0,1,0\},$
 $\{0,0,0,-1,0,0,0,1\}, \{1,0,1,1,0,1,0,0\}, \{0,-1,0,0,0,0,1,0\},$
 $\{1,1,0,0,1,1,0,0\}, \{1,1,0,1,0,0,1,0\}, \{1,1,1,0,0,0,0,1\},$
 $\{0,0,-1,0,0,0,0,1\}, \{1,0,1,0,1,1,0,0\}, \{1,0,1,1,0,0,1,0\},$
 $\{0,-1,0,0,0,0,0,1\}, \{1,1,0,0,1,0,1,0\}, \{1,1,0,1,0,0,0,1\},$
 $\{1,0,0,1,1,1,0,0\}, \{1,0,1,0,1,0,1,0\}, \{1,0,1,1,0,0,0,1\},$
 $\{1,1,0,0,0,1,1,0\}, \{1,1,0,0,1,0,0,1\}, \{1,0,0,1,1,0,1,0\},$
 $\{1,0,1,0,0,1,1,0\}, \{1,0,1,0,1,0,0,1\}, \{1,1,0,0,0,1,0,1\},$
 $\{1,0,0,1,0,1,1,0\}, \{1,0,0,1,1,0,0,1\}, \{1,0,1,0,0,1,0,1\},$
 $\{1,1,0,0,0,0,1,1\}, \{1,0,0,0,1,1,1,0\}, \{1,0,0,1,0,1,0,1\},$
 $\{1,0,1,0,0,0,1,1\}, \{2,1,1,1,1,1,1,0\}, \{1,0,0,0,1,1,0,1\},$
 $\{1,0,0,1,0,0,1,1\}, \{2,1,1,1,1,1,0,1\}, \{1,0,0,0,1,0,1,1\},$
 $\{2,1,1,1,1,0,1,1\}, \{1,0,0,0,0,1,1,1\}, \{2,1,1,1,0,1,1,1\},$
 $\{2,1,1,0,1,1,1,1\}, \{2,1,0,1,1,1,1,1\}, \{2,0,1,1,1,1,1,1\}$

После того, как этот список однажды вычислен, уже не имеет значения, откуда он взялся. Начальный фрагмент этого списка длины семь

$\{\{0,-1,1,0,0,0,0,0\}, \{1,1,1,1,0,0,0,0\}, \{0,0,-1,1,0,0,0,0\},$
 $\{0,0,0,-1,1,0,0,0\}, \{0,0,0,0,-1,1,0,0\}, \{0,0,0,0,0,-1,1,0\},$
 $\{0,0,0,0,0,0,-1,1\}\}$

выбирался в качестве системы простых корней `rootbaseE7`, после чего для всех остальных корней решается система линейных уравнений, выражающая их через `rootbaseE7`, что дает строчную форму Дынкина. Мы не приводим аналогичные списки `positiveE8` и `rootbaseE8`, которые порождаются совершенно аналогично, но для удобства пользования последующими таблицами в таблицах 1 и 2 воспроизводятся списки положительных корней систем E_7 и E_8 относительно `height lexicographic order`.

2. ВЕСА E_7

Фундаментальные веса системы корней E_7 порождаются точно так же, как это делалось в §5 работы [18] для случая E_6 . По определению базис фундаментальных весов `weightbaseE7` двойственен к ба-

зису простых корней `rootbaseE7`. Как и в [18], единственный нюанс, который необходимо учитывать, состоит в том, что в гиперболической реализации корни E_7 живут в восьмимерном, а не в семимерном пространстве. Чтобы убрать лишнюю размерность при построении весов необходимо проверять еще ортогональность – в смысле *эвклидова* скалярного произведения! – получающихся векторов следующему вектору

```
testvectorE7={3,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1}
```

Таким образом фундаментальные веса $\varpi_1, \dots, \varpi_7$ являются решениями следующих систем линейных уравнений:

```
omegaE7[i_]:=LinearSolve[Append[rootbasebisE7,testvectorE7],
  Table[If[j==i,1,0],{j,1,8}]] /; 1<=i<=7
```

Список `rootbasebisE7` отличается от списка `rootbaseE7` ровно в одной позиции, а именно, его второй элемент имеет вид $\{-1, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}$. Это сделано для того, чтобы решение было ортогонально α_2 в смысле *гиперболического* скалярного произведения. Так как остальные α_i не содержат e_0 , для них безразлично, берется ли эвклидово или гиперболическое скалярное произведение, поэтому их менять не нужно. Теперь вычисление

```
weightbaseE7=Table[omegaE7[i],{i,7}]
```

возвращает координаты фундаментальных весов в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^{7,1}$:

```
{{2,0,1,1,1,1,1,1},{7/2,3/2,3/2,3/2,3/2,3/2,3/2,3/2},
 {4,1,1,2,2,2,2,2},{6,2,2,2,3,3,3,3},
 {9/2,3/2,3/2,3/2,3/2,5/2,5/2,5/2},{3,1,1,1,1,1,2,2}},
 {3/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,3/2}}
```

Доминантный (целый) вес – это в точности линейная комбинация фундаментальных весов с неотрицательными целыми коэффициентами или, что то же самое, вес, скалярные произведения которого со всеми простыми корнями – неотрицательные целые. Следующая функция является тестом доминантности:

```
dominantE7Q[u_]:=And@@Table[Block[
  {xxx=hip[u,rootbaseE7[[i]]}],
  xxx>=0&&IntegerQ[xxx]],{i,7}]
```

Через `hip` как и в [18] здесь обозначено гиперболическое скалярное произведение в $\mathbb{R}^{l,1}$.

Как и в [18] множество весов $\overline{\Lambda}(\omega)$ представления со старшим весом ω порождено при помощи следующего кода.

```
weightsE7[u_] := Block[{i, j, list = {u}, len = hip[u], we},
  For[j = 1, j <= Length[list], j++,
  For[i = 1, i <= 7, i++, we = list[[j]] - rootbaseE7[[i]];
  If[hip[we] <= len && ! MemberQ[list, we],
  list = Append[list, we]]];
Return[list]] /; dominantE7Q[u]
```

Как мы уже отмечали, этот текст крайне неэффективен, так что порождение при помощи него 56 весов представления $V(\omega_7)$ занимает чудовищные 0.05 секунды.

3. 56-МЕРНЫЙ МОДУЛЬ ДЛЯ E_7

Теперь вычисление

```
minimale7 = weightsE7[omegaE7[7]]
```

возвращает список из 56 весов минимального модуля. Эти веса приведены в таблице 3, вместе с их выражениями в форме Дынкина в базисе из простых корней и в базисе фундаментальных весов, соответственно. Эти выражения получены как решения систем линейных уравнений:

```
rootformE7[u_] := LinearSolve[Transpose[rootbaseE7], u]
weightformE7[u_] := LinearSolve[Transpose[weightbaseE7], u]
```

Обратите внимание, что в отличие от положительных корней веса модуля $V(\varpi_7)$ расположены в этой таблице не в порядке возрастания весов, а в порядке их *убывания*, начиная со старшего веса ϖ_7 , имеющего высоту $27/2$, до младшего веса $-\varpi_7$, имеющего высоту $-27/2$.

Однако, в действительности часто удобнее использовать для вычислений реализацию $V(\varpi_7)$ как внутреннего модуля Шевалле в группе $G(E_8, R)$. А именно, рассмотрим стандартную параболическую подгруппу $P_8 \leq G(E_8, R)$. Коммутант $G_8 = [L_8, L_8]$ ее подгруппы Леви является односвязной группой Шевалле типа E_7 , причем действие G_8 сопряжением на абелианизации $U_8/[U_8, U_8]$ унипотентного радикала U_8 превращает $U_8/[U_8, U_8]$ в $G(E_7, R)$ -модуль $V(\varpi_7)$. Как следует из теоремы 1 работы [134], система $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Sigma = \Sigma_8(1)$, отвечающая положительному базису Шевалле, является кристаллическим базисом модуля $V(\varpi_7)$. Поэтому мы можем прочесть константы действия, выбрав из таблицы структурных констант для алгебры Ли типа E_8

строки, отвечающие корням из E_7 , и столбцы, отвечающие корням из Σ .

Выберем среди положительных корней E_8 те, которые принадлежат E_7 , и те, которые принадлежат Σ :

```
positiveE7insideE8=Select[positiveE8,
Last[rootformE8[#]]==0&]
minimalE7insideE8=Select[positiveE8,Last[rootformE8[#]]==1&]
```

Впрочем, корни E_7 внутри E_8 в *той же порядке* получаются и просто дорисовыванием 0 к корням E_7 в обычном порядке:

```
positiveE7insideE8=Map[Append[#,0]&,positiveE7]
```

Веса модуля $V(\varpi_7)$ как корни E_8 перечислены в порядке возрастания высоты в таблице 4. Видно, что пользоваться этой таблицей гораздо удобнее, чем предыдущей, так как теперь ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ В РАЗЛОЖЕНИИ ВЕСОВ как по простым корням E_8 , так и по соответствующему гиперболическому базису ЯВЛЯЮТСЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЦЕЛЫМИ ЧИСЛАМИ.

Фактически мы проводили вычисления именно в такой реализации. В частности, теперь для построения таблицы констант действия остается лишь выбрать из построенной в [135] таблицы структурных констант для E_8 строки с номерами, соответствующими позициям элементов `positiveE7insideE8`, и столбцы с номерами, соответствующими позициям элементов `minimalE7insideE8`, в списке `positiveE8`. Результат воспроизведен в таблице 6. Так как $c_{\lambda+\alpha,-\alpha} = c_{\lambda,\alpha}$, то константы действия для отрицательных корней также читаются по этой таблице.

В действительности в практических вычислениях часто удобнее пользоваться не таблицей констант действия, а **матрицей знаков** представления $V(\varpi_7)$, строки и столбцы которой занумерованы весами этого представления, а в позиции (λ, μ) стоит коэффициент $c_{\lambda,\mu-\lambda}$, с которым корневой элемент $x_{\mu-\lambda}(1)$ прибавляет v^λ к v^μ , либо 0, если $\mu-\lambda$ не является корнем. Матрица знаков представления $V(\varpi_7)$ для нумерации весов как корней E_8 приведена в таблице 7.

То, что мы называем *естественной* нумерацией весов, отличается от списка `positiveE7insideE8` применением `Reverse`:

```
minimalE7natural = Reverse[minimalE7insideE8];
```

Дело в том, что в согласии с традицией мы нумеруем веса не начиная с младшего, как это принято в `Computer Science`, а начиная со старшего, как принято в алгебре.

4. ВЕСОВАЯ ДИАГРАММА $V(\varpi_7)$

Важным инструментом при изучении и использовании представлений исключительных групп являются *весовые диаграммы*. Подробное обсуждение весовых диаграмм и множество дальнейших ссылок можно найти в работах [133, 112, 134, 105, 126].

Напомним, что **весовая диаграмма** представления π это помеченный – или, в терминологии Кашизара, *окрашенный* – ориентированный граф,

- вершины которого отвечают весам представления π , обычно с кратностями,

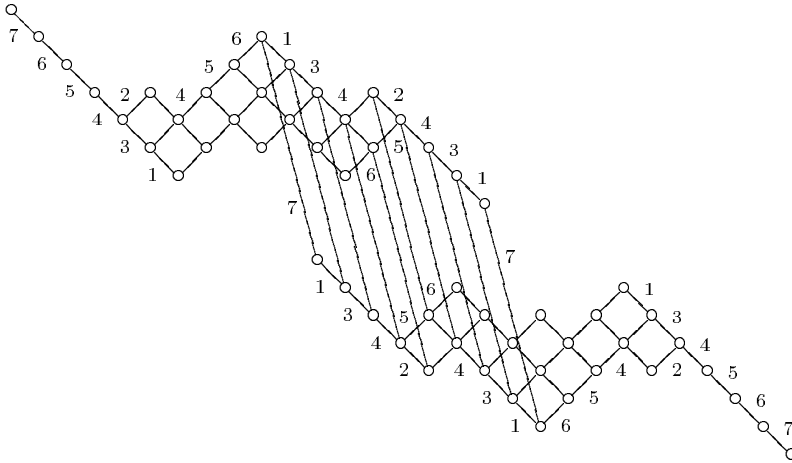
- две вершины λ и μ соединяются стрелкой с меткой $i = \text{цвета } i$, направленной от μ к λ , если $\lambda - \mu = \alpha_i$ является i -м простым корнем.

При этом стрелки обычно не ставятся, и положительными направлениями считаются направления справа налево и снизу вверх.

Разумеется, если веса λ и/или μ кратные, нужно еще уточнить, что именно подразумевается под этим равенством. В общем случае решение проблемы кратностей *совершенно нетривиально* и было получено только в знаменитых работах Люстига и Кашизара в контексте теории квантовых групп. Вскоре после этого Литтельманн предложил поразительно красивый элементарный, но весьма хитроумный подход к построению этих графов – *модель путей*. Однако, для микровесовых представлений кратности всех весов равны 1, так что никаких проблем не возникает.

Весовая диаграмма часто используется также как стенографическая запись соответствующего **весового графа**. Вершинами весового графа снова являются все веса представления π , но теперь ребра отвечают *всем* положительным корням, а не только простым корням, как в случае весовой диаграммы. Иными словами, веса λ и μ соединяются стрелкой с меткой $\alpha \in \Phi^+$, направленной из μ в λ , если $\lambda - \mu = \alpha$. Весовые графы часто удовлетворяют очень сильным свойствам регулярности и встречаются в громадном количестве работ по комбинаторике, конечным геометриям и упаковке сфер, см. [49] и содержащиеся там ссылки.

Весовой граф типа (E_7, ϖ_7) – или его дополнение! – называется обычно **графом Госсета**. Он впервые возник в теории алгебраических поверхностей. А именно, рассмотрим поверхность, получающуюся из комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}r^2$ раздутием l точек в общем положении [38]. Граф Госсета описывает конфигурацию 56



неособых кривых с самопересечением -1 , возникающих на этой поверхности при $l = 7$.

5. ОГРАНИЧЕНИЕ НА A_6 , D_6 И E_6

Случай E_7 несколько сложнее, чем E_6 в частности потому, что для него при редукции к меньшему рангу естественно возникают не две, а *три* различные подгруппы, типов E_6 , D_6 и A_6 .

Поэтому для многих вычислений необходимо хорошо понимать, как 56 -мерный E_6 -модуль устроен с точки зрения ограничения на подсистемы A_6 , D_6 и E_6 . Как ограничения $V(\varpi_7)$ подгруппы этих типов раскладываются на неприводимые компоненты, хорошо известно и легко посчитать. Как объяснено в [112], для этого достаточно просто зачеркнуть ребра с меткой 2 , 1 или 7 в весовой диаграмме.

Таким образом,

$$V(E_7, \varpi_7) \downarrow A_6 = V(A_6, \varpi_6) \oplus V(A_6, \varpi_2) \oplus V(A_6, \varpi_5) \oplus V(A_6, \varpi_1),$$

$$V(E_7, \varpi_7) \downarrow D_6 = V(D_6, \varpi_1) \oplus V(D_6, \varpi_5) \oplus V(D_6, \varpi_1),$$

$$V(E_7, \varpi_7) \downarrow E_6 = V(E_6, 0) \oplus V(E_6, \varpi_1) \oplus V(E_6, \varpi_6) \oplus V(E_6, 0).$$

Обратите внимание, что для первых двух случаев нумерация простых корней и весов в правой части – это обычная нумерация в A_6 и

D_6 соответственно, а вовсе не их нумерация как простых корней E_7 . Говоря по-простому, 56-мерный модуль $V(\varpi_7)$ раскладывается следующим образом.

- При ограничении на A_6 он раскладывается на четыре неприводимых слагаемых: 7-мерное ковекторное представление, 21-мерное представление, являющееся внешним квадратом векторного, 21-мерное представление, являющееся внешним квадратом ковекторного, и, наконец, 7-мерное векторное представление.

- При ограничении на D_6 он раскладывается на три слагаемых: два 12-мерных векторных представления и 32-мерное полуспинорное представление.

- При ограничении на E_6 он раскладывается на четыре неприводимых слагаемых: два тривиальных и два двойственных минимальных представления.

При рассмотрении $V(\varpi_1)$ как внутреннего модуля Шевалле в группе типа E_7 эти разложения сразу усматриваются следующим образом. A_6 , D_6 , E_6 -компоненты различаются по значению коэффициента при α_2 , α_1 , α_7 в разложении по базису простых корней соответственно. Для весов $V(\varpi_7)$ коэффициент при α_2 может принимать значения 0, 1, 2, 3; коэффициент при α_1 — значения 0, 1, 2; коэффициент при α_7 — значения 0, 1, 2, 3. Таким образом, для получения весов в порядке, согласованном с нужным ветвлением, достаточно выбрать из списка веса с соответствующими значениями нужных компонент `rootformE8`, снова соединить получившиеся списки, и, наконец, перевернуть результат с помощью `Reverse`, чтобы старший вес шел первым.

```
minimalE7branchA6=Reverse[Apply[Join,Table[
  Select[minimalE7insideE8,rootformE8[#][[2]]==i&],
    {i,0,3}]]]
minimalE7branchD6=Reverse[Apply[Join,Table[
  Select[minimalE7insideE8,rootformE8[#][[1]]==i&],
    {i,0,2}]]]
minimalE7branchE6=Reverse[Apply[Join,Table[
  Select[minimalE7insideE8,rootformE8[#][[7]]==i&],
    {i,0,3}]]]
```

Как видно из таблицы 3, множество весов $V(\varpi_7)$ симметрично. Это обстоятельство переводится на язык внутреннего модуля Шевалле следующим образом: у каждого веса λ есть *симметричный* ему

вес $\bar{\lambda}$ такой, что их сумма $\lambda + \bar{\lambda}$ равна максимальному корню E_8 . Поэтому мы будем нумеровать веса $V(\varpi_7)$ не числами от 1 до 56, а числами $1, 2, \dots, 28, -28, \dots, -2, -1$. Для удобства обозначений мы часто пишем \bar{n} вместо $-n$. Полученные нумерации весов приведены в таблице 8.

6. МАТРИЦА ЗНАКОВ

Теперь у нас все готово для того, чтобы явно вычислить таблицы знаков представления $V(\varpi_7)$ и корневые элементы. В работе [135] мы двумя способами вычисляли структурные константы алгебры Ли типа E_l , при помощи рекуррентного алгоритма, $\text{mu}[1, i, j]$, и при помощи коцикла Френкеля–Каца, $\text{kac}[1, i, j]$. Получающаяся таблица структурных констант E_7 воспроизведена как таблица 5. Как отмечалось в §3, таблица констант действия для модуля $V(\varpi_7)$ получается выбором нужной части из таблицы структурных констант для E_8 :

```
minimalE7insideE8sign=Table[
  nu[8,positiveE7insideE8[[i]],minimalE7insideE8[[j]]],
  {i,1,63},{j,1,56}]]
```

Определенная в [135] функция $\text{nu}[8, x, y]$ как раз и выражает структурные константы для E_8 . Ее отличие от функции mu состоит в том, что аргументами являются сами корни, а не их номера. Получающаяся таблица воспроизведена как таблица 6.

На самом деле, как и при работе над [18] мы не обращались к электронной версии [135], а заново пересчитали все нужные нам знаки. Это потребовало в десятки раз меньше времени, чем аналогичные вычисления в 1990-е годы. Можно предположить, что это связано с ростом функциональности и эффективности систем компьютерной алгебры, даже в еще большей степени, чем собственно с ростом производительности компьютеров.

Часто удобнее пользоваться таблицей знаков в другом виде, не как таблицей структурных констант действия, а как *матрицей знаков*:

```
signtable=Table[
  nu[8,minimalE7insideE8[[j]]-minimalE7insideE8[[i]],
  minimalE7insideE8[[i]]],
  {i,1,56},{j,1,56}]]
```

В отличие от матрицы структурных констант действия, строки которой занумерованы корнями, а столбцы – весами, в матрице знаков

как строки, так и столбцы занумерованы весами модуля $V(\varpi_7)$. В позиции (λ, μ) стоит коэффициент, с которым корневой элемент e_α , где $\alpha = \lambda - \mu$, прибавляет номер столбца к номеру строки. Матрица знаков воспроизведена в таблице 7, все дальнейшие таблицы вычислялись на ее основе.

Ниже мы воспроизводим результаты в четырех нумерациях весов, *естественной*, связанной с ограничением на A_6 , связанной с ограничением на D_6 и связанной с ограничением на E_6 . Как уже упоминалось, в таблице 8 показано соответствие этих нумераций.

Напоминаем, что мы нумеруем веса начиная со старшего. Это значит, что – кроме номеров строк и столбцов! – воспроизведенная в таблице 9 матрица знаков получается из матрицы в таблице 7 транспонированием относительно побочной диагонали. Таким образом, за исключением типографских изысков – всевозможных `\vrule`, `\tablerule`, etc. – таблица 9 представляет собой табличную форму следующей матрицы:

```
minimalE7naturalsigntable=Reverse[Transpose[Reverse[signtable]]]
```

Таблицы 11, 13 и 15 получаются из нее переупорядочиванием весов в соответствии с A_6 -нумерацией, D_6 -нумерацией и E_6 -нумерацией, соответственно. Это можно сделать многими способами, например, вычислив соответствующие перестановки. Однако, поскольку мы работаем со крошечными списками, вычисление с которыми занимает доли секунды, бороться за эффективность не имеет смысла. Следующая функция возвращает *номер* элемента y в списке x

```
search[x_,y_]:=Nest[First,Position[x,y],2]
```

– напомним, что внутренняя функция `Position` возвращает *список* позиций, оформленных в виде списка, поэтому нам нужно убрать *две* пары скобок. Теперь перейти от естественной нумерации к A_6 -нумерации можно, например, так:

```
minimalE7branchA6signtable=Table[minimalE7naturalsigntable
  [search[minimalE7natural,minimalE7branchA6[[i]]],
  search[minimalE7natural,minimalE7branchA6[[j]]]],
  {i,1,56},{j,1,56}]
```

Для D_6 -нумерации и E_6 -нумерации делается ровно то же самое, но веса, естественно, выбираются из списков `minimalE7branchD6` и `minimalE7branchE6` соответственно.

Мы разбили получающиеся матрицы на блоки в соответствии с A_6 -ветвлением, D_6 -ветвлением и E_6 -ветвлением, соответственно, чтобы

была лучше видна их структура.

Например, в таблице 11 в северо-западном и юго-восточном углах хорошо видны два естественных 7-мерных представления группы $SL(7, R)$, соответствующей подсистеме $\langle \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \rangle$, а в северо-восточном и юго-западном углах – склеивающее их действие группы $SL(2, R)$, отвечающей старшему корню δ .

С другой стороны, в таблице 15 хорошо видно, что при E_6 -нумерации для любого элемента из алгебры Ли L типа E_7 последние 28 элементов первого столбца равны 0 – именно этот факт лежит в основе проведенного в [13, 14] ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ИЗ КНИГИ для этого случая.

7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ КОРНЕВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Теперь у нас все готово, чтобы вычислить корневые элементы для всех четырех перечисленных нумераций корней. Элементы e_α задаются так:

```
rooteE7natural[h_] := Table[
  If[minimalE7natural[[i]] - minimalE7natural[[j]] ==
    positiveE7insideE8[h],
    minimalE7naturalsigntable[[h, j], 0],
    {i, 1, 56}, {j, 1, 56}]
```

Для естественной нумерации получающиеся элементы e_α приведены в таблице 10. Подчеркнем, что здесь $1 \leq h \leq 63$ есть номер *положительного* корня. Но мы знаем, что корневой элемент $e_{-\alpha}$, отвечающий отрицательному корню, равен ε_α^t . Таким образом, остальные 63 корневых элемента являются просто транспонированными к тем 63 элементам, приведенным в таблице.

Матрицы

`rooteE7branchA6[h_]`, `rooteE7branchD6[h_]`, `rooteE7branchE6[h_]` задаются совершенно аналогично. Получающиеся результаты приведены в таблицах 12, 14 и 16.

Теперь мы можем легко задать остальные корневые элементы как матрицы. Например, так как представление $V(\varpi_7)$ микровесовое, то в нем $e_\alpha^2 = 0$ и, значит, $x_\alpha(\xi) = e + \xi e_\alpha$. Поэтому корневые элементы задаются следующим образом.

```
rootxE7natural[h_, x_] := IdentityMatrix[56] +
  x * rooteE7naturalE8[h]
```

Естественно, при определении элементов

`rootxE7branchA6[h_,x_]`, `rootxE7branchD6[h_,x_]`,
`rootxE7branchE6[h_,x_]`
 вместо `rooteE7natural[h]` нужно пользоваться
`rooteE7branchA6[h_]`, `rooteE7branchD6[h_]`, `rooteE7branchE6[h_]`,
 соответственно.

Как обычно, мы полагаем $w_\alpha(\varepsilon) = x_\alpha(\varepsilon)x_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1})x_\alpha(\varepsilon)$, где $\varepsilon \in R^*$. Таким образом, мы можем теперь задать элемент $w_\alpha(\varepsilon)$ как матрицу:

```
rootwE7natural[h_,x_] := rootxE7natural[h,x].
Transpose[rootxE7natural[h,-Power[x,-1]]].
rootxE7natural[h,x]
```

Наконец, *полупростой* корневой элемент $h_\alpha(\varepsilon) = w_\alpha(\varepsilon)w_\alpha(1)^{-1}$, где $\varepsilon \in R^*$, можно выразить через $w_\alpha(\varepsilon)$,

```
roothE7natural[h_,x_] := rootwE7natural[h,x].
rootwE7natural[h,-1]
```

либо, при желании, непосредственно через элементы $x_\alpha(\xi)$.

Впрочем, в тех вычислениях, в которых участвует небольшое количество корневых элементов, мы предпочитаем хранить и использовать элементы e_α и $x_\alpha(\xi)$ как *разреженные* матрицы – иными словами, в формате `SparseArray` – и обращаться к матрицам 56×56 только на самом последнем этапе и только в тех случаях, когда это действительно нужно. Мы не приводим соответствующие коды. Зная таблицы корней, весов и знаков, каждый, кто знаком с основами программирования в `Mathematica`, легко напишет их сам.

8. ИНВАРИАНТНАЯ БИКВАДРАТНАЯ ФОРМА

Еще одним важнейшим инструментом при изучении группы Шевалле типа E_7 в 56-мерном представлении является инвариантная биквадратная форма Q и ее частичные поляризации. То, что группа типа E_7 в характеристике 0 сохраняет форму степени 4 от 56 переменных, впервые заметил Эли Картан¹. Впервые форма Q явно описана в статье Леонарда Диксона 1901 года [64], в контексте 28 бикасательных и, таким образом, группы Вейля $W(E_7)$. По всей видимости Диксон не заметил связи с самой группой типа E_7 . Иначе группы Шевалле могли бы быть открыты на 50 лет раньше.

¹As it stands, явная конструкция формы в работе Картана содержит неточность, но, вероятно, это просто опечатка.

Впоследствии форму Q изучали Ганс Фрейденталь, Жак Титс, Роберт Браун, Майкл Ашбахер, Брюс Куперстейн, Тони Спрингер, Скуп Гарибальди и другие, см., в частности, [73, 74, 75, 76, 129, 130, 51, 52, 44, 62, 122, 78, 79] и содержащиеся там ссылки. Обычно при этом предполагают, что $2 \in R^*$ — а иногда даже $6 \in R^*$.

Очень элегантная явная конструкция формы Q над полем K характеристики отличной от 2 дана Гансом Фрейденталем. А именно, он реализует 56-мерное пространство V как $A(8, K)^2$, где $A(8, K)$ — пространство антисимметрических 8×8 матриц. На этом пространстве V он рассматривает следующее симплектическое скалярное произведение

$$h((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{tr}(a_1 b_2^t) - \operatorname{tr}(a_2 b_1^t) \right).$$

Кроме того, он вводит на этом пространстве форму Q степени 4:

$$Q((a, b)) = \operatorname{pf}(a) + \operatorname{pf}(b) - \frac{1}{4} \operatorname{tr}((ab)^2) + \frac{1}{16} \operatorname{tr}(ab)^2.$$

Теперь для всех характеристик, отличных от 2, можно отождествить группу изометрий этой пары с односвязной группой Шевалле G типа E_7 над K , [44, 62].

При этом конструкция формы в самих статьях [44, 62] чуть иная. В действительности, Майкл Ашбахер в [44] строит форму Q в терминах A_6 . Сущность этой конструкции выражается разбиением $56 = 7 + 21 + 21 + 7$, при этом пространство V представляется как прямая сумма

$$V = U \oplus \wedge^2(U^*) \oplus \wedge^2(U) \oplus U^*,$$

для 7-мерного пространства U , а форма Q строится в терминах внешних произведений и двойственности.

В то же время конструкция Брюса Куперстейна [62] ближе по духу первоначальной конструкции Фрейдентала и сформулирована в терминах A_7 , где $56 = 28 + 28$. При этом группа изометрий одной только формы Q порождается G и диагональным элементом порядка 2, см. [62]. В характеристиках $p \geq 5$ никаких особых проблем не возникает, в то время как в характеристике 3 появляются дополнительные трудности, которые, однако, удается преодолеть.

Однако в характеристике 2 такой подход сталкивается с *непреодолимыми* трудностями. Не только не работает ни одна из предшествующих конструкций, но на V вообще нет нетривиальной G -

инвариантной симметрической четырёхлинейной формы, [44]. Это связано с тем, что в характеристике 2 четырёхлинейная форма

$$f(u, v, x, y) = h(u, v)h(x, y) + h(u, x)h(v, y) + h(u, y)h(v, x),$$

построенная по симплектической форме h , становится симметрической – ясно, что в характеристиках ≥ 3 это не так. Поскольку размерность пространства инвариантных симметрических четырёхлинейных форм равна 1, независимо от характеристики, эта новая форма f занимает место настоящего симметрического четырёхлинейного инварианта F . В действительности Ашбахер [44] строит четырёхлинейную G -инвариантную форму F в характеристике 2, симметрическую по отношению к *чётным* перестановкам.

Имеются другие конструкции формы Q , в частности, конструкция Роберта Брауна [50, 51, 52], которая работает в характеристиках $\neq 2, 3$. Пусть V – пространство с невырожденным скалярным произведением. Тогда задать трilinearную форму на V это, по существу, то же самое, что задать на V структуру алгебры. Точно так же, задать на V четырёхлинейную форму это, по существу, то же самое, что задать на V структуру *тернарной* алгебры. И действительно, существует замечательная тернарная алгебра \mathbb{F} размерности 56, строящаяся в терминах исключительной Йордановой алгебры \mathbb{J} , [52, 68] и содержащиеся там ссылки. Эта алгебра состоит из 2×2 матриц над \mathbb{J} со скалярными диагональными коэффициентами, $56 = 1 + 27 + 27 + 1$.

Естественно возникает вопрос, можно ли дать *элементарную* конструкцию биквадратичной формы Q , не зависящую от характеристики, для которой форма Q сразу строится как инвариант расширенной группы Вейля $\widetilde{W}(E_7)$. Такая конструкция кубической формы для E_6 обсуждается в работах авторов [133, 134, 15, 22, 23], и там все прекрасно работает независимо от характеристики. Аналогичная конструкция формы Q действительно возможна, хотя и значительно сложнее, но она все равно не работает в характеристике 2. Следуя [134, 16] объясним, совсем коротко, что при этом происходит.

Кубическая форма для E_6 строилась в терминах *квадратичной* формы для D_5 на 10-мерном пространстве. Убеждение, что E_7 находится в таком же отношении к E_6 , как сама E_6 к D_5 , подсказывает, что биквадратичную Q следует строить тем же манером, в терминах *кубической* формы для E_6 на 27-мерном пространстве.

Зафиксируем какой-то базисный вектор $v^\lambda \in V$. Тогда векторы v^μ , $d(\lambda, \mu) = 2$, порождают 27-мерный модуль U , несущий куби-

ческую форму, связанную с E_6 . Определим *тетрады* как четверки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ попарно ортогональных весов. Пусть Θ и Θ_0 суть множества упорядоченных и неупорядоченных тетрад, соответственно. Ясно, что $|\Theta| = 56 \cdot 27 \cdot 10$, в то время как $|\Theta_0| = |\Theta|/24 = 630$.

Теперь можно попытаться определить биквадратичную форму Q_{tent} посредством

$$Q_{\text{tent}}(x) = \sum \pm x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} x_{\lambda_3} x_{\lambda_4},$$

где сумма берется по всем $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \in \Theta_0$, а знаки определяются так, чтобы получающаяся форма была инвариантна относительно действия расширенной группы Вейля $\widetilde{W}(E_7)$.

Уже в этом месте нужно быть *чуть* аккуратнее, чем в случае E_6 , так как теперь, в добавление к двум возникающим там случаям, корневое отражение w_α может перемещать все 4 веса тетрады, два в положительном, два в отрицательном направлении, причем в этом случае знак не меняется.

Однако, выражение для знака в терминах расстояний $h(\lambda_i, \mu_i)$ по-прежнему работает. Это, по существу, то же самое, что определить четырехлинейную форму F_{tent} посредством

$$F_{\text{tent}}(v^{\lambda_1}, v^{\lambda_2}, v^{\lambda_3}, v^{\lambda_4}) = (-1)^{h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)}, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \Theta,$$

и $F_{\text{tent}}(v^{\lambda_1}, v^{\lambda_2}, v^{\lambda_3}, v^{\lambda_4}) = 0$ в противном случае. Здесь через $h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ обозначена сумма попарных расстояний между этими весами в весовой диаграмме; см. [134] по поводу точных определений.

По самому построению эта форма инвариантна относительно действия расширенной группы Вейля $\widetilde{W}(E_7)$ и хочется проверить, что она сохраняется под действием корневой подгруппы X_α для *какого-то* корня $\alpha \in \Phi$.

Действительно, для любой *тетрады* $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ и *любого* элементарного корневого унипотента $g = x_\alpha(\xi)$ имеет место равенство

$$F_{\text{tent}}(gv^{\lambda_1}, gv^{\lambda_2}, gv^{\lambda_3}, gv^{\lambda_4}) = F_{\text{tent}}(v^{\lambda_1}, v^{\lambda_2}, v^{\lambda_3}, v^{\lambda_4}).$$

Однако, к сожалению, существуют четверки весов – не являющиеся тетрадами – для которых правая часть равна 0, в то время как левая отлична от 0. Возьмем, например, четыре веса $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ такие, что $\lambda_1 + \alpha, \lambda_2 + \alpha, \lambda_3 + \alpha, \lambda_4 - \alpha$ являются весами и 8 перечисленных весов

образуют куб – иными словами, соответствующая весовая диаграмма является тензорным произведением трех копий (A_1, ϖ_1) , см. [112]. Тогда один из весов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ будет смежным с двумя другими, скажем, $d(\lambda_1, \lambda_2) = d(\lambda_1, \lambda_3) = 1$, так что

$$F_{\text{tent}}(v^{\lambda_1}, v^{\lambda_2}, v^{\lambda_3}, v^{\lambda_4}) = 0.$$

С другой стороны, раскладывая $F_{\text{tent}}(gv^{\lambda_1}, gv^{\lambda_2}, gv^{\lambda_3}, gv^{\lambda_4})$ по линейности, мы получим 8 слагаемых, из которых ровно одно, а именно, $F_{\text{tent}}(v^{\lambda_1+\alpha}, v^{\lambda_2}, v^{\lambda_3}, v^{\lambda_4})$, отвечает тетраде и равно ± 1 . Таким образом, форма F_{tent} не инвариантна под действием X_α .

Само по себе это не трагично, так как можно надеяться исправить положение, добавляя другую вейлевскую орбиту мономов. Однако, вот тут-то и начинаются *настоящие* проблемы. Дело в том, что в приведенном выше примере добавление еще одной орбиты даст *два* дополнительных ненулевых слагаемых и результат будет кратен 2. Это означает, что нельзя определить форму, полагая ее значение на тетрадах равным ± 1 , вместо этого нужно было полагать эти значения равными ± 2 . Ясно, что в характеристике 2 это не имеет никакого смысла.

Тем не менее, в характеристике $\neq 2$ эта конструкция *по существу* правильна, в том смысле, что она говорит, как устроена *релевантная* часть формы степени 4, которая отвечает за редукцию к E_6 . Зафиксируем вектор v^λ . Тогда $F(v^\lambda, *, *, *)$ состоит из двух частей, формы F_{tent} , определенной выше, и еще одной части, которая вносится для того, чтобы получившаяся форма была G -инвариантной, имеющей вид $F(v^\lambda, v^{\lambda^*}, *, *)$. Но вторая часть не добавляет ничего нового по сравнению с тем фактом, что наша группа сохраняет симплектическую форму.

9. ИНВАРИАНТНАЯ БИКВАДРАТНАЯ ФОРМА, CONTINUED

Возникающие в характеристике 2 трудности были полностью преодолены лишь совсем недавно, в работах Джекоба Лурье [102] и второго автора [24]. Основная идея состоит в том, чтобы полностью отказаться от требования симметричности формы. Вместо этого следует рассматривать все 4-мерное пространство инвариантов степени 4 на V . Эти инварианты отличаются лишь на слагаемые вида $h(u, v)h(x, y)$, где h – симплектическая форма на V . Поэтому внутри симплектической группы $\text{Sp}(56, R)$ группа E_7 может быть охарактеризована как стабилизатор любого из них. Мы отсылаем читателя

к [24, 16] по поводу более детального описания ситуации и доказательств.

Сейчас мы построим четырехлинейную *несимметричную* форму на модуле $V(\varpi_7)$ без ограничений на характеристику основного кольца R . В случае поля характеристики $\neq 2$ биквадратная форма, ассоциированная с ее *симметризацией*, совпадает с формой, построенной Картаном, с точностью до скалярного множителя.

Пусть \mathfrak{g} – алгебра Ли типа E_8 , а

$$\rho = \frac{2465432}{3}$$

– старший корень E_8 . Таким образом, α_8 -высота корня – т.е. коэффициент при простом корне α_8 в разложении корней из E_8 по базису простых корней – может принимать значения $-2, -1, 0, 1, 2$. Этот факт определяет \mathbb{Z} -градуировку длины 5 на \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2.$$

А именно, подпространство \mathfrak{g} , натянутое на e_α , попадает в \mathfrak{g}_i , если коэффициент α при α_8 равен i . Кроме того, \mathfrak{g}_0 содержит подалгебру Картана \mathfrak{h} . Заметим, что 56-мерное пространство \mathfrak{g}_1 обладает базисом из элементарных корневых элементов e_α , где α пробегает корни α_8 -высоты 1, то есть, веса представления $V(\varpi_7)$. Кроме того, пространства \mathfrak{g}_{-2} и \mathfrak{g}_2 одномерны и натянуты на $e_{-\rho}$ и e_ρ соответственно.

Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – четыре веса $V(\varpi_7)$. Рассмотрим элемент $[[[[e_{-\rho}, e_\alpha], e_\beta], e_\gamma], e_\delta]$. Корень $-\rho$ имеет α_8 -высоту -2 , а $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – α_8 -высоту 1. Значит, полученный элемент лежит в \mathfrak{g}_2 и пропорционален e_ρ . Определим $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ равенством

$$[[[[e_{-\rho}, e_\alpha], e_\beta], e_\gamma], e_\delta] = c(\alpha, \beta, \gamma, \delta)e_\rho.$$

Нетрудно видеть, что $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{Z}$. Набор коэффициентов $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ определяет четырехлинейную форму q на $V(\varpi_7)$: положим

$$q(u, v, w, z) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Lambda} c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) u^\alpha v^\beta w^\gamma z^\delta.$$

Легко понять, что эта форма инвариантна относительно действия E_7 на модуле $V(\varpi_7)$, то есть, $q(u, v, w, z) = q(gu, gv, gw, gz)$ для любых $u, v, w, z \in V(\varpi_7)$ и $g \in G(E_7, R)$.

Обозначим через F симметризацию q

$$F(u_1, u_2, u_3, u_4) = \sum_{\sigma \in S_4} q(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, u_{\sigma(3)}, u_{\sigma(4)}),$$

а через Q – ассоциированную биквадратную форму:

$$Q(u) = F(u, u, u, u).$$

Оказывается, что все коэффициенты формы Q делятся на 6, поэтому после формального деления Q на $4! = 24$ получается форма, коэффициенты которой содержат лишь 2 или 4 в знаменателе. Именно поэтому характеристика 3 не создает особенных трудностей при работе с этой формой.

Напомним, что

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} h_\alpha, & \text{если } \alpha + \beta = 0; \\ N_{\alpha\beta}e_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \in E_8; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad [h_\alpha, e_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle e_\beta = 2 \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} e_\beta;$$

Заметим, что если четверка весов $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ такова, что $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq 0$, то $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\rho$. Назовем четверки весов, для которых

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\rho, \quad \alpha + \beta \neq \rho,$$

регулярными. Для регулярной четверки при вычислении коммутатора из определения $c(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ не встречаются элементы вида h_α :

$$\begin{aligned} [[[[e_{-\rho}, e_\alpha], e_\beta], e_\gamma], e_\delta] &= [[[[N_{-\rho, \alpha}e_{-\rho+\alpha}, e_\beta], e_\gamma], e_\delta] \\ &= [[N_{-\rho, \alpha}N_{-\rho+\alpha, \beta}e_{-\rho+\alpha+\beta}, e_\gamma], e_\delta] \\ &= [N_{-\rho, \alpha}N_{-\rho+\alpha, \beta}N_{-\rho+\alpha+\beta, \gamma}e_{-\rho+\alpha+\beta+\gamma}, e_\delta] \\ &= N_{-\rho, \alpha}N_{-\rho+\alpha, \beta}N_{-\rho+\alpha+\beta, \gamma}N_{-\rho+\alpha+\beta+\gamma, \delta}e_\rho. \end{aligned}$$

Стало быть, в этом случае

$$c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = N_{-\rho, \alpha}N_{-\rho+\alpha, \beta}N_{-\rho+\alpha+\beta, \gamma}N_{-\rho+\alpha+\beta+\gamma, \delta}.$$

Назовем **нерегулярными** четверки весов, для которых

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\rho, \quad \alpha + \beta = \rho,$$

то есть четверки вида $(\alpha, \rho - \alpha, \gamma, \rho - \gamma)$. Проведем аналогичное вычисление для нерегулярных четверок:

$$\begin{aligned} [[[[e_{-\rho}, e_\alpha], e_{\rho-\alpha}], e_\gamma], e_{\rho-\gamma}] &= [[[N_{-\rho, \alpha} e_{-\rho+\alpha}, e_{\rho-\alpha}], e_\gamma], e_{\rho-\gamma}] \\ &= [[N_{-\rho, \alpha} h_{-\rho+\alpha}, e_\gamma], e_{\rho-\gamma}] \\ &= [N_{-\rho, \alpha} \langle -\rho + \alpha, \gamma \rangle e_\gamma, e_{\rho-\gamma}] \\ &= N_{-\rho, \alpha} \langle -\rho + \alpha, \gamma \rangle N_{\gamma, \rho-\gamma} e_\rho. \end{aligned}$$

Значит, для нерегулярных четверок имеем

$$c(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = N_{-\rho, \alpha} \langle -\rho + \alpha, \gamma \rangle N_{\gamma, \rho-\gamma} = N_{-\rho, \alpha} N_{-\rho, \gamma} \langle -\rho + \alpha, \gamma \rangle,$$

Приступим к вычислению коэффициентов формы q . Сгенерируем таблицу корней E_8 и тест на принадлежность ей:

```
negativeE8=Map[-#&, positiveE8]
rootsE8=Join[positiveE8, negativeE8]
isrootE8:=MemberQ[rootsE8, #]&;
```

Нам понадобится вычислять числа Картана $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\alpha, \beta) / (\beta, \beta)$:

```
cartanmatrixE8={{2,0,-1,0,0,0,0,0},{0,2,0,-1,0,0,0,0},
{-1,0,2,-1,0,0,0,0},{0,-1,-1,2,-1,0,0,0},{0,0,0,-1,2,-1,0,0},
{0,0,0,0,-1,2,-1,0},{0,0,0,0,0,-1,2,-1},{0,0,0,0,0,0,-1,2}}
cartannumberE8[u_,v_]:=rootformE8[u].cartanmatrixE8.
rootformE8[v]
```

Корень ρ находится в нашей таблице `rootsE8` под номером 120, а $-\rho$ – под номером 240:

```
rho=rootsE8[[120]]
minusrho=rootsE8[[240]]
```

Наконец, вычисление таблицы коэффициентов.

```
coefftable=SparseArray[{}], {56,56,56,56}]
```

Сначала обработаем регулярные четверки:

```
For[a=1, a<=56, a++,
  alpha=minimalE7natural[[a]];
  For[b=1, b<=56, b++,
    beta=minimalE7natural[[b]];
    If[Not[isrootE8[-rho+alpha+beta]], Continue[]];
    For[c=1, c<=56, c++,
      gamma=minimalE7natural[[c]];
```

```

delta=2*rho-alpha-beta-gamma;
If[Not[isrootE8[delta]],Continue[]];
d=search[minimalE7natural,delta];
coefftable[[a,b,c,d]]=nu[8,minusrho,alpha]
  *nu[8,minusrho+alpha,beta]
  *nu[8,minusrho+alpha+beta,gamma]
  *nu[8,minusrho+alpha+beta+gamma,delta]]]]

```

Потом – нерегулярные четверки:

```

For[a=1,a<=56,a++,
  alpha=minimalE7natural[[a]];
  For[c=1,c<=56,c++,
    gamma=minimalE7natural[[c]];
    coefftable[[a,57-a,c,57-c]]=nu[8,-rho,alpha]
      *nu[8,-rho,gamma]
      *cartannumberE8[-rho+alpha,gamma]]]]

```

В полученной форме 19768 ненулевых коэффициентов, из них 18144 соответствуют регулярным четверкам и 1624 – нерегулярным. Ясно, что мы не можем воспроизвести здесь явный вид этой формы в координатах, так как это заняло бы – для каждой из используемых нами нумераций! – около 130 страниц печатного текста.

Во многих приложениях возникают вторые частные производные формы Q , задающие старшую вейлевскую орбиту квадратичных уравнений на орбиту вектора старшего веса в 56-мерном представлении, см. [99]. Эти уравнения естественно возникают также в контексте теории стандартных мономов [120, 97, 48, 96, 100, 101]. Более подробную библиографию можно найти в наших работах [134, 11, 25].

В работах [60, 84] отмечается связь этих квадратичных уравнений с базисами Гребнера. Часть этих уравнений воспроизводится в работах [111, 142]. В связи с изучением многообразия Фрейденшталя, в работах [16] и [103] мы воспроизводим явный вид вторых частных производных формы Q для двух из рассматриваемых нами нумераций.

Таблица 1. Положительные корни E_7

1	$\begin{smallmatrix} 100000 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 000000 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 010000 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 001000 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 000100 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 000010 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 000001 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1)$	
2	$\begin{smallmatrix} 110000 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 001000 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 011000 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 001100 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 000110 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0)$	$\begin{smallmatrix} 000011 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1)$
3	$\begin{smallmatrix} 111000 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 011000 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 001100 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 011100 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 001110 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0)$	$\begin{smallmatrix} 000111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1)$
4	$\begin{smallmatrix} 111000 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 111100 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 011100 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 001110 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 011110 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0)$	$\begin{smallmatrix} 001111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1)$
5	$\begin{smallmatrix} 111100 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 111110 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 012100 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 011110 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 001111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 011111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1)$
6	$\begin{smallmatrix} 112100 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$	$\begin{smallmatrix} 111110 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 111111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 012110 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$
	$\begin{smallmatrix} 011111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$	

- | | | |
|-----------|---|---|
| 7 | $\frac{122100}{1} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$ | $\frac{112110}{1} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ |
| | $\frac{111111}{1} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$ | $\frac{012210}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$ |
| | $\frac{012111}{1} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ | |
| 8 | $\frac{122110}{1} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$ | $\frac{112210}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$ |
| | $\frac{112111}{1} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$ | $\frac{012211}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$ |
| 9 | $\frac{122210}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ | $\frac{122111}{1} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ |
| | $\frac{112211}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ | $\frac{012221}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ |
| 10 | $\frac{123210}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ | $\frac{122211}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{112221}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$ | |
| 11 | $\frac{123210}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$ | $\frac{123211}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{122221}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ | |
| 12 | $\frac{123211}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$ | $\frac{123221}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ |
| 13 | $\frac{123221}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$ | $\frac{123321}{1} = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ |
| 14 | $\frac{123321}{2} = (2, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ | |
| 15 | $\frac{124321}{2} = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$ | |
| 16 | $\frac{134321}{2} = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ | |
| 17 | $\frac{234321}{2} = (2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ | |

Таблица 2. Положительные корни E_8

1	$\begin{matrix} 1000000 \\ 0 \end{matrix} = (0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0000000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0100000 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0010000 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0001000 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0000100 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0000010 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0)$	$\begin{matrix} 0000001 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1)$
2	$\begin{matrix} 1100000 \\ 0 \end{matrix} = (0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0010000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0110000 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0011000 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0001100 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0000110 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 0)$
	$\begin{matrix} 0000011 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1)$	
3	$\begin{matrix} 1110000 \\ 0 \end{matrix} = (0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0110000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0011000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0111000 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0011100 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0001110 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0)$
	$\begin{matrix} 0000111 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1)$	
4	$\begin{matrix} 1110000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 1111000 \\ 0 \end{matrix} = (0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0111000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0011100 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0111100 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0011110 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1, 0)$
	$\begin{matrix} 0001111 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1)$	
5	$\begin{matrix} 1111000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 1111100 \\ 0 \end{matrix} = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0121000 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$	$\begin{matrix} 0111100 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$\begin{matrix} 0011110 \\ 1 \end{matrix} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$	$\begin{matrix} 0111110 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$
	$\begin{matrix} 0011111 \\ 0 \end{matrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1)$	

6	$\frac{1121000}{1} = (1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$	$\frac{1111100}{1} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0)$
	$\frac{1111110}{0} = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$	$\frac{0121100}{1} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$
	$\frac{0111110}{1} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$	$\frac{0011111}{1} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
	$\frac{0111111}{0} = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	
7	$\frac{1221000}{1} = (1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$	$\frac{1121100}{1} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$
	$\frac{1111110}{1} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$	$\frac{1111111}{0} = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
	$\frac{0122100}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$	$\frac{0121110}{1} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$
	$\frac{0111111}{1} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$	
8	$\frac{1221100}{1} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$	$\frac{1122100}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$
	$\frac{1121110}{1} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$	$\frac{1111111}{1} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$
	$\frac{0122110}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$	$\frac{0121111}{1} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$
9	$\frac{1222100}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$	$\frac{1221110}{1} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$
	$\frac{1122110}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$	$\frac{1121111}{1} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$
	$\frac{0122210}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$	$\frac{0122111}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$
10	$\frac{1232100}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$	$\frac{1222110}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$
	$\frac{1221111}{1} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$	$\frac{1122210}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$
	$\frac{1122111}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$	$\frac{0122211}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$
11	$\frac{1232100}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$	$\frac{1232110}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0)$
	$\frac{1222210}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$	$\frac{1222111}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$
	$\frac{1122211}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$	$\frac{0122221}{1} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$

- | | | |
|-----------|---|---|
| 12 | $\frac{1232110}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0)$ | $\frac{1232210}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$ |
| | $\frac{1232111}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ | $\frac{1222211}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{1122221}{1} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$ | |
| 13 | $\frac{1232210}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$ | $\frac{1232111}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$ |
| | $\frac{1233210}{1} = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ | $\frac{1232211}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{1222221}{1} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$ | |
| 14 | $\frac{1233210}{2} = (2, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0)$ | $\frac{1232211}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{1233211}{1} = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$ | $\frac{1232221}{1} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ |
| 15 | $\frac{1243210}{2} = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$ | $\frac{1233211}{2} = (2, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{1232221}{2} = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$ | $\frac{1233221}{1} = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$ |
| 16 | $\frac{1343210}{2} = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$ | $\frac{1243211}{2} = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{1233221}{2} = (2, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$ | $\frac{1233321}{1} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ |
| 17 | $\frac{2343210}{2} = (2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$ | $\frac{1343211}{2} = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$ |
| | $\frac{1243221}{2} = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$ | $\frac{1233321}{2} = (2, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$ |
| 18 | $\frac{2343211}{2} = (2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$ | $\frac{1343221}{2} = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$ |
| | $\frac{1243321}{2} = (2, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ | |
| 19 | $\frac{2343221}{2} = (2, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$ | $\frac{1343321}{2} = (2, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ |
| | $\frac{1244321}{2} = (2, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ | |

- 20** $\frac{2343321}{2} = (2, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ $\frac{1344321}{2} = (2, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$
- 21** $\frac{2344321}{2} = (2, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$ $\frac{1354321}{2} = (2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 22** $\frac{2354321}{2} = (2, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ $\frac{1354321}{3} = (3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 23** $\frac{2354321}{3} = (3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ $\frac{2454321}{2} = (2, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 24** $\frac{2454321}{3} = (3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 25** $\frac{2464321}{3} = (3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 26** $\frac{2465321}{3} = (3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$
- 27** $\frac{2465421}{3} = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$
- 28** $\frac{2465431}{3} = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)$
- 29** $\frac{2465432}{3} = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)$

Таблица 3. Веса $V(\varpi_7)$

$27/2$	$\frac{1}{2} \binom{246543}{3} = \frac{000001}{0} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
$25/2$	$\frac{1}{2} \binom{246541}{3} = \frac{00001\bar{1}}{0} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
$23/2$	$\frac{1}{2} \binom{246521}{3} = \frac{0001\bar{1}0}{0} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$21/2$	$\frac{1}{2} \binom{246321}{3} = \frac{001\bar{1}00}{0} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$19/2$	$\frac{1}{2} \binom{244321}{3} = \frac{01\bar{1}000}{1} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$17/2$	$\frac{1}{2} \binom{244321}{1} = \frac{0100\bar{0}0}{\bar{1}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{224321}{3} = \frac{1\bar{1}0000}{1} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$15/2$	$\frac{1}{2} \binom{224321}{1} = \frac{1\bar{1}1000}{\bar{1}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{024321}{3} = \frac{\bar{1}00000}{1} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$13/2$	$\frac{1}{2} \binom{024321}{1} = \frac{\bar{1}01000}{\bar{1}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{222321}{1} = \frac{10\bar{1}100}{0} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$11/2$	$\frac{1}{2} \binom{022321}{1} = \frac{\bar{1}1\bar{1}100}{0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{222121}{1} = \frac{100\bar{1}10}{0} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$9/2$	$\frac{1}{2} \binom{002321}{1} = \frac{0\bar{1}0100}{0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{022121}{1} = \frac{\bar{1}10\bar{1}10}{0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{222101}{1} = \frac{1000\bar{1}1}{0} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
$7/2$	$\frac{1}{2} \binom{002121}{1} = \frac{0\bar{1}\bar{1}\bar{1}10}{0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{022101}{1} = \frac{\bar{1}100\bar{1}1}{0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{22210\bar{1}}{1} = \frac{10000\bar{1}}{0} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$
$5/2$	$\frac{1}{2} \binom{000121}{1} = \frac{00\bar{1}010}{1} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{002101}{1} = \frac{0\bar{1}10\bar{1}1}{0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
	$\frac{1}{2} \binom{02210\bar{1}}{1} = \frac{\bar{1}1000\bar{1}}{0} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}
\mathbf{3/2} \quad \frac{1}{2} \binom{000121}{\bar{1}} &= \frac{000010}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{000101}{\bar{1}} &= \frac{00\bar{1}1\bar{1}1}{\bar{1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{00210\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{0\bar{1}100\bar{1}}{\bar{1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{1/2} \quad \frac{1}{2} \binom{000101}{\bar{1}} &= \frac{0001\bar{1}\bar{1}}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{000\bar{1}01}{\bar{1}} &= \frac{000\bar{1}01}{\bar{1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{00010\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{00\bar{1}10\bar{1}}{\bar{1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{-1/2} \quad \frac{1}{2} \binom{000\bar{1}01}{\bar{1}} &= \frac{001\bar{1}01}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{00010\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{00010\bar{1}}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{000\bar{1}0\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{000\bar{1}1\bar{1}}{\bar{1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{-3/2} \quad \frac{1}{2} \binom{002\bar{1}01}{\bar{1}} &= \frac{01\bar{1}001}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{000\bar{1}0\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{001\bar{1}1\bar{1}}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{000\bar{1}21}{\bar{1}} &= \frac{0000\bar{1}0}{\bar{1}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{-5/2} \quad \frac{1}{2} \binom{022\bar{1}01}{\bar{1}} &= \frac{1\bar{1}0001}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{002\bar{1}0\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{01\bar{1}01\bar{1}}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{000121}{\bar{1}} &= \frac{0010\bar{1}0}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{-7/2} \quad \frac{1}{2} \binom{222101}{\bar{1}} &= \frac{\bar{1}00001}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{02210\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{1\bar{1}001\bar{1}}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{002121}{\bar{1}} &= \frac{01\bar{1}1\bar{1}0}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\mathbf{-9/2} \quad \frac{1}{2} \binom{22210\bar{1}}{\bar{1}} &= \frac{\bar{1}0001\bar{1}}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{022121}{\bar{1}} &= \frac{1\bar{1}01\bar{1}0}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
\frac{1}{2} \binom{002321}{\bar{1}} &= \frac{010\bar{1}00}{\bar{1}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Таблица 4. Веса $V(\varpi_7)$ как корни E_8

1	$\begin{smallmatrix} 0000001 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1)$	
2	$\begin{smallmatrix} 0000011 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 1)$	
3	$\begin{smallmatrix} 0000111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1)$	
4	$\begin{smallmatrix} 0001111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 1)$	
5	$\begin{smallmatrix} 0011111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1)$	
6	$\begin{smallmatrix} 0011111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 0111111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$
7	$\begin{smallmatrix} 1111111 \\ 0 \end{smallmatrix} = (0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 0111111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$
8	$\begin{smallmatrix} 1111111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 0121111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$
9	$\begin{smallmatrix} 1121111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 0122111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$
10	$\begin{smallmatrix} 1221111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 1122111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$
	$\begin{smallmatrix} 0122211 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$	
11	$\begin{smallmatrix} 1222111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 1122211 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)$
	$\begin{smallmatrix} 0122221 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$	
12	$\begin{smallmatrix} 1232111 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 1222211 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$
	$\begin{smallmatrix} 1122221 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$	
13	$\begin{smallmatrix} 1232111 \\ 2 \end{smallmatrix} = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 1232211 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$
	$\begin{smallmatrix} 1222221 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$	
14	$\begin{smallmatrix} 1232211 \\ 2 \end{smallmatrix} = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 1233211 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$
	$\begin{smallmatrix} 1232221 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$	
15	$\begin{smallmatrix} 1233211 \\ 2 \end{smallmatrix} = (2, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 1232221 \\ 2 \end{smallmatrix} = (2, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1)$
	$\begin{smallmatrix} 1233221 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1)$	
16	$\begin{smallmatrix} 1243211 \\ 2 \end{smallmatrix} = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1)$	$\begin{smallmatrix} 1233221 \\ 2 \end{smallmatrix} = (2, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$
	$\begin{smallmatrix} 1233321 \\ 1 \end{smallmatrix} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$	

- 17** $\begin{matrix} 1343211 \\ 2 \\ 1233321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$ $\begin{matrix} 1243221 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$
 $\begin{matrix} 1233321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1)$
- 18** $\begin{matrix} 2343211 \\ 2 \\ 1243321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$ $\begin{matrix} 1343221 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$
 $\begin{matrix} 1243321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$
- 19** $\begin{matrix} 2343221 \\ 2 \\ 1244321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$ $\begin{matrix} 1343321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$
 $\begin{matrix} 1244321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$
- 20** $\begin{matrix} 2343321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)$ $\begin{matrix} 1344321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$
- 21** $\begin{matrix} 2344321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$ $\begin{matrix} 1354321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 22** $\begin{matrix} 2354321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$ $\begin{matrix} 1354321 \\ 3 \end{matrix} = (3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 23** $\begin{matrix} 2354321 \\ 3 \end{matrix} = (3, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ $\begin{matrix} 2454321 \\ 2 \end{matrix} = (2, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 24** $\begin{matrix} 2454321 \\ 3 \end{matrix} = (3, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$
- 25** $\begin{matrix} 2464321 \\ 3 \end{matrix} = (3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1)$
- 26** $\begin{matrix} 2465321 \\ 3 \end{matrix} = (3, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1)$
- 27** $\begin{matrix} 2465421 \\ 3 \end{matrix} = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1)$
- 28** $\begin{matrix} 2465431 \\ 3 \end{matrix} = (3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1)$

Таблица 5. Структурные константы $G(E_7, R)$

	1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0	1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1	1 1 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1	0 1 0 1 1 1 1 2 1 1 1 0 1 0
1000000	0 0 + 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 0 +	0 + 0 0 0	0 + 0 + 0	0 0 + + 0	+ 0
0100000	0 0 0 + 0	0 0 0 0 +	+ 0 0 + 0	0 + + 0 0	+ 0 0 + +	0 + 0 0 0	+ 0
0010000	- 0 0 + 0	0 0 0 + 0	+ 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 + 0 +	0 0 0 0 +	0 +
0001000	0 - - 0 +	0 0 - 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 0
0000100	0 0 0 - 0	+ 0 0 - -	0 0 + - -	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0
0000010	0 0 0 0 -	0 + 0 0 0	- 0 0 0 0	- - 0 0 0	- - 0 0 0	- 0 - 0 0	0 -
0000001	0 0 0 0 0	- 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 - 0 0	0 0 - - 0	0 - 0 - 0	0 0
1010000	0 0 0 + 0	0 0 0 + 0	+ 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 + 0 +	0 0 - 0 +	0 0
0101000	0 0 - 0 +	0 0 - 0 0	0 + 0 0 0	0 - 0 + 0	- 0 0 - 0	0 - 0 0 0	- 0
0011000	- - 0 0 +	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	- 0 0 + 0	0 0 - 0 0	+ 0 0 0 -	0 0
0001100	0 - - 0 0	+ 0 - 0 0	0 0 + 0 -	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 0 - 0	0 0
0000110	0 0 0 - 0	0 + 0 - -	0 0 0 - -	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 - 0 0	0 -
0000011	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	- 0 0 0 0	- - 0 0 0	- - 0 0 0	- 0 - 0 0	0 -
1011000	0 - 0 0 +	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	- 0 0 + 0	0 - - 0 0	0 0 0 - -	0 0
0111000	- 0 0 0 +	0 0 0 0 0	+ + 0 0 0	0 0 + + 0	- 0 0 0 +	0 - 0 0 0	0 0
0101100	0 0 - 0 0	+ 0 - 0 +	0 0 + + 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 0	+ 0
0011100	- - 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 + 0 0	0 0 0 0 -	0 0 + 0 0	0 0 0 0 +	0 0
0001110	0 - - 0 0	0 + - 0 0	0 0 0 0 -	0 0 0 0 -	0 + 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 0
0000111	0 0 0 - 0	0 0 0 - -	0 0 0 - -	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 - 0 0	0 -
1111000	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	+ + 0 0 0	0 + + + 0	0 0 0 + +	0 0 0 0 0	+ 0
1011100	0 - 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 + 0 +	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0 + +	0 0
0111100	- 0 0 - 0	+ 0 0 0 0	0 0 + + 0	0 0 - 0 0	0 0 0 0 -	0 + 0 0 0	0 0
0101110	0 0 - 0 0	0 + - 0 +	0 0 0 + 0	0 - 0 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	- 0
0011110	- - 0 0 0	0 + 0 + 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 -	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 -	0 +
0001111	0 - - 0 0	0 0 - 0 0	0 0 0 0 -	0 0 0 0 -	0 + 0 0 0	+ 0 0 - 0	0 0
1111100	0 0 0 - 0	+ 0 0 0 -	0 0 + 0 0	0 0 - 0 0	0 0 0 - -	0 0 0 0 0	- 0
1011110	0 - 0 0 0	0 + 0 + 0	0 0 0 0 +	- 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 - 0 -	0 0
0112100	- 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 + + 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	0 0
0111110	- 0 0 - 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 +
0101111	0 0 - 0 0	0 0 - 0 +	0 0 0 + 0	0 - 0 0 0	- 0 0 + 0	0 + 0 0 0	0 0
0011111	- - 0 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 -	0 0 + 0 0	+ 0 0 0 0	0 +
1112100	0 0 - 0 0	+ 0 0 0 0	0 + + 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 - 0	0 0 0 - 0	- 0

	1 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 0	1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 1 2 2 2 1 1 2 1 1 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0	1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1	1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 1 2 2 3 2 2 2 2 2 2 2 1 2 1 1 2 1 1 0 1 1	1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 3 2 3 3 2 2 2 2 2 1 1 2 1 2 0 1 1 1 1	1 1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 2 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	2 2 3 4 3 2 1
1000000	0 0 + + 0	0 0 + + 0	0 0 + 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 +	0
0100000	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0 + 0 0 +	0 + 0 0 0	0
0010000	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	+ + 0 0 0	+ 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0
0001000	+ 0 0 + 0	0 + 0 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 + 0	0 0 + 0 0	0 0 + 0 0	0
0000100	0 0 + 0 0	+ 0 0 + +	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 +	+ 0 0 0 0	0
0000010	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	0 + 0 + 0	0 0 0 0 0	0
0000001	- 0 - 0 0	- 0 - 0 -	- 0 0 - 0	0 0 - 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
1010000	0 0 - 0 0	0 0 - - 0	0 0 - 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0
0101000	0 - 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 + 0	0 0 + 0 0	0 - 0 0 0	0
0011000	+ 0 0 0 0	0 + 0 0 0	- 0 0 0 0	- 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0
0001100	- 0 0 - 0	0 - 0 0 +	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 - 0 0	+ 0 0 0 0	0
0000110	0 0 0 0 -	0 0 0 - 0	0 - 0 0 -	0 0 0 0 0	0 + 0 + 0	0 0 0 0 0	0
0000011	0 0 0 0 -	0 0 - 0 0	- 0 0 - 0	0 0 - 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
1011000	0 0 0 - 0	0 0 + 0 0	0 0 + 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0
0111000	0 - 1 0 0 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 0	- 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0
0101100	0 + 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 - 0 -	0 0 0 0 0	0
0011100	- 0 0 0 0	- - 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0
0001110	0 0 0 + -	0 + 0 0 0	0 0 0 0 -	0 0 0 - 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0
0000111	0 0 + 0 -	+ 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 - 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
1111000	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0 0 + 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0
1011100	0 0 + + 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0
0111100	0 + 0 0 0	- 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0
0101110	0 - 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 0 0 -	0 0 0 - 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 0	0
0011110	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0
0001111	- 0 0 0 -	0 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
1111100	0 0 + 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0
1011110	0 0 0 - 0	0 0 0 - 0	0 0 - 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0
0112100	+ + 0 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0
0111110	0 - 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 0	0
0101111	0 0 0 0 -	0 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
0011111	- 0 0 0 0	- 0 0 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0
1112100	0 0 0 - 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0

Таблица 6. Структурные константы $V(\varpi_7)$

	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1	0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 1 1 2 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 1 2 1 1 1 1 1	1 1 1 2 1 1 2 2 2 3 3 3 2 3 2 2 2 2 1 1 2 1 1 1
1000000	0 0 0 0 0	0 + 0 + 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 0
0100000	0 0 0 0 +	0 + + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 + +
0010000	0 0 0 0 +	+ 0 0 0 0	0 + 0 0 +	0 0 + 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0
0001000	0 0 0 + 0	0 0 0 + +	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 0 +	0 0 0
0000100	0 0 + 0 0	0 0 0 0 0	+ + 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	+ 0 +
0000010	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 0 +	0 0 + 0 0	0 0 0
0000001	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	+ + 0
1010000	0 0 0 0 +	+ 0 0 0 0	- 0 - 0 0	- 0 0 - 0	0 0 0 0 0	0 0 0
0101000	0 0 0 + 0	0 - - 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 0 +	0 - 0
0011000	0 0 0 + 0	- 0 0 0 +	0 0 0 0 -	0 0 - 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0
0001100	0 0 + 0 0	0 0 0 - -	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 -	+ 0 0
0000110	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	- - 0 - 0	0 0 0 0 +	0 0 + 0 0	0 0 -
0000011	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 - 0 -	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	0 + 0
1011000	0 0 0 + 0	- 0 0 - 0	0 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 0
0111000	0 0 0 + +	0 0 - 0 0	0 0 0 0 -	0 0 - 0 0	0 - 0 0 0	0 - 0
0101100	0 0 + 0 0	0 + + 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	- 0 0 - -	0 0 -
0011100	0 0 + 0 0	+ 0 0 0 -	0 - 0 0 0	0 0 + 0 0	0 + 0 0 0	+ 0 0
0001110	0 + 0 0 0	0 0 0 + +	0 0 0 - 0	0 - 0 0 0	0 0 + 0 +	0 0 0
0000111	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ + 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 - - 0	- 0 0
1111000	0 0 0 + +	0 + 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 - 0
1011100	0 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	+ 0 0 0 0	- 0 0 - 0	0 0 0 0 0	+ 0 0
0111100	0 0 + 0 -	0 0 + 0 0	0 - 0 0 0	0 0 + 0 0	0 + 0 - 0	0 0 -
0101110	0 + 0 0 0	0 - - 0 0	0 0 0 - 0	0 - 0 0 -	0 0 0 0 +	0 0 +
0011110	0 + 0 0 0	- 0 0 0 +	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 - + 0 0	0 0 0
0001111	+ 0 0 0 0	0 0 0 - -	0 0 0 + 0	0 + 0 0 0	+ 0 - 0 0	- 0 0
1111100	0 0 + 0 -	0 - 0 0 0	+ 0 0 0 0	- 0 0 - 0	0 0 0 - 0	0 0 -
1011110	0 + 0 0 0	- 0 0 - 0	- 0 - 0 0	0 0 0 + 0	0 0 + 0 0	0 0 0
0112100	0 0 + + 0	0 0 + 0 +	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	+ + 0 0 +	0 0 0
0111110	0 + 0 0 +	0 0 - 0 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 -	0 - 0 0 0	0 0 +
0101111	+ 0 0 0 0	0 + + 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	+ 0 0 + 0	0 + 0
0011111	+ 0 0 0 0	+ 0 0 0 -	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	0 0 - 0 0	- 0 0
1112100	0 0 + + 0	0 - 0 - 0	0 0 0 0 0	- 0 0 - 0	+ 0 0 0 +	0 0 0

	1 1 1 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 4 3 3 2 3 3 3 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 1 1 1 1	1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 2 2 3 3 4 4 3 4 3 3 3 3 3 3 2 2 3 2 2 1 2 2 1 1 1 1 1 1	1 1 2 1 1 2 2 2 2 2 3 2 3 3 2 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 2 3 2 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	2 1 2 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 5 5 3 4 4 4 4 3 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	1 2 2 2 2 3 3 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 4 4 4 4 4 3 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 6 6 6 6 5 5 5 3 4 4 2 2 3 1 1 1
1000000	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 + 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 0 0
0100000	0 0 + 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + +	0 0 + 0 0	0 0 0
0010000	0 0 0 + 0	0 0 + 0 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 +	0 + 0 0 0	0 0 0
0001000	+ 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 + + 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0
0000100	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0
0000010	0 0 + 0 +	0 0 + 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 0
0000001	+ 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0
1010000	0 0 0 + 0	0 0 + 0 0	0 + 0 0 +	0 0 0 - 0	- 0 0 0 0	0 0 0
0101000	0 0 - 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + + 0 0	0 0 - 0 0	0 0 0
0011000	+ 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 + 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0
0001100	0 + 0 0 0	0 0 0 - 0	0 0 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 - 0	0 0 0
0000110	0 - 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 -	0 0 0
0000011	+ 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	- 0 0
1011000	+ 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 0 0 0 -	0 - 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0
0111000	0 0 - 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 -	0 0 + 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0
0101100	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0
0011100	0 + 0 0 0	0 0 0 - 0	0 - 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0
0001110	0 - 0 0 -	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0
0000111	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0
1111000	0 0 - 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 -	0 - 0 - 0	0 0 0 0 0	0 0 0
1011100	0 + 0 0 0	0 0 0 - 0	0 - 0 - 0	0 0 0 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0
0111100	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 - 0 0 0	+ 0 0 0 -	0 0 0 0 0	0 0 0
0101110	0 0 + 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 - 0 0	0 0 0
0011110	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0
0001111	- 0 0 0 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 - 0	0 0 0
1111100	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 - 0 - 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 0
1011110	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	- 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0
0112100	0 0 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0
0111110	0 0 + 0 0	0 0 - 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0
0101111	0 0 0 0 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0
0011111	- 0 0 - 0	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0
1112100	0 0 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 0 - 0	0 - 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0

	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1	0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 1 1 2 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 1 2 1 1 1 1 1	1 1 1 2 1 1 2 2 2 3 3 3 2 3 2 2 2 2 1 1 2 1 1 1
1111110	0 + 0 0 +	0 + 0 0 0	- 0 - 0 0	0 0 0 + -	0 0 0 0 0	0 0 +
1011111	+ 0 0 0 0	+ 0 0 + 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 - 0 0	- 0 0
0112110	0 + 0 - 0	0 0 - 0 -	0 0 0 0 +	0 + 0 0 0	0 - 0 0 -	0 0 0
0111111	+ 0 0 0 -	0 0 + 0 0	0 - 0 0 -	0 0 - 0 +	0 0 0 + 0	0 + 0
1122100	0 0 + + +	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	- 0 - - 0	0 - 0 0 0	0 0 0
1112110	0 + 0 - 0	0 + 0 + 0	0 0 - 0 0	0 + 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 0
1111111	+ 0 0 0 -	0 - 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 + 0
0112210	0 + + 0 0	0 0 - 0 -	0 - 0 - 0	0 0 0 0 0	0 - 0 0 -	0 0 -
0112111	+ 0 0 + 0	0 0 + 0 +	0 0 0 0 -	0 - - 0 0	- 0 0 0 0	0 + 0
1122110	0 + 0 - -	- 0 0 0 0	0 0 - 0 -	0 0 0 + 0	0 + 0 0 0	0 0 0
1112210	0 + + 0 0	0 + 0 + 0	+ 0 0 - 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 -
1112111	+ 0 0 + 0	0 - 0 - 0	0 0 + 0 0	+ - 0 0 0	- 0 0 0 0	0 + 0
0112211	+ 0 - 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 + 0	0 0 - 0 0	- 0 0 - 0	- 0 0
1122210	0 + + 0 -	- 0 0 0 0	+ + 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 0	0 0 -
1122111	+ 0 0 + +	+ 0 0 0 0	0 0 + 0 +	+ 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0
1112211	+ 0 - 0 0	0 - 0 - 0	- 0 0 + 0	+ 0 0 0 0	- 0 0 - 0	- 0 0
0112221	+ + 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 + +	0 + 0 0 +	0 0 + 0 0	0 0 0
1123210	0 + + + 0	- 0 0 - -	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 0
1122211	+ 0 - 0 +	+ 0 0 0 0	- - 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0 - 0	- 0 0
1112221	+ + 0 0 0	0 - 0 - 0	- 0 - + 0	0 + 0 0 +	0 0 + 0 0	0 0 0
1223210	0 + + + +	0 + + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 +
1123211	+ 0 - - 0	+ 0 0 + +	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 0 0	- 0 0
1122221	+ + 0 0 +	+ 0 0 0 0	- - - 0 -	0 0 0 0 +	0 0 + 0 0	0 0 0
1223211	+ 0 - - -	0 - - 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	0 + 0
1123221	+ + 0 - 0	+ 0 0 + +	0 0 - 0 -	0 - 0 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0
1223221	+ + 0 - -	0 - - 0 0	0 0 - 0 -	0 - 0 0 -	0 0 0 0 0	0 + 0
1123321	+ + + 0 0	+ 0 0 + +	+ + 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 0
1223321	+ + + 0 -	0 - - 0 0	+ + 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 0 - 0	0 0 -
1224321	+ + + + 0	0 - - - -	0 0 0 + 0	0 + 0 0 0	+ 0 0 0 +	0 0 0
1234321	+ + + + +	+ 0 - 0 -	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	0 - 0 0 0	0 0 0
2234321	+ + + + +	+ + 0 + 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 0

Таблица 7. Матрица знаков $V(\varpi_7)$

	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1	0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 1 1 2 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 1 1 1 2 1	1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 1 2	1 1 1 2 1 1 2 2 2 3 3 3 2 3 2 2 2 2 1 1 2 1 1 1
00000001	0 + + + +	+ + + + +	+ + + + +	+ + + 0 +	+ 0 + + 0	+ + 0
00000011	+ 0 + + +	+ + + + +	+ + + + +	0 + 0 + +	0 + + 0 +	0 0 +
00000111	+ + 0 + +	+ + + + +	+ + 0 + 0	+ 0 + - 0	+ - 0 + -	+ 0 -
00001111	+ + + 0 +	+ + + + +	0 0 + 0 +	- + - + 0	- + 0 0 +	0 + 0
00011111	+ + + + 0	+ + + 0 0	+ + - 0 -	+ 0 + - +	0 - 0 - 0	0 - +
01011111	+ + + + +	0 0 0 + +	- - + 0 +	- 0 - + 0	0 + + 0 0	- 0 0
00111111	+ + + + +	0 0 + + 0	- 0 + + 0	- - 0 + -	+ 0 0 + -	0 + -
10111111	+ + + + +	0 + 0 0 +	0 - 0 - +	0 + - 0 +	- + 0 - +	0 - +
01111111	+ + + + 0	+ + 0 0 +	+ 0 - - 0	+ + 0 - 0	- 0 - 0 +	+ 0 0
11111111	+ + + + 0	+ 0 + 0 +	0 + 0 + -	0 - + 0 0	+ - + 0 -	- 0 0
01121111	+ + + 0 +	- - 0 + 0	0 + + - 0	- 0 0 + +	0 0 + - 0	- 0 +
11121111	+ + + 0 +	- 0 - 0 +	+ 0 0 + +	0 0 - 0 -	0 + - + 0	+ 0 -
01122111	+ + 0 + -	+ + 0 - 0	+ 0 0 0 +	+ - 0 - +	0 0 + 0 0	0 - 0
11221111	+ + + 0 0	0 + - - +	- + 0 0 0	0 + 0 0 +	- 0 + - +	- 0 +
11122111	+ + 0 + -	+ 0 + 0 -	0 + + 0 0	0 + + 0 -	0 - - 0 0	0 + 0
01122211	+ 0 + - +	- - 0 + 0	- 0 + 0 0	0 0 + + 0	- 0 0 + 0	+ - 0
11222111	+ + 0 + 0	0 - + + -	0 0 - + +	0 0 0 0 +	+ 0 + 0 -	0 - 0
11122211	+ 0 + - +	- 0 - 0 +	0 - 0 0 +	+ 0 0 0 0	+ + 0 - 0	- + 0
01122221	0 + - + -	+ + 0 - 0	+ 0 - 0 0	+ 0 0 0 0	0 + 0 0 -	0 0 +
11232111	+ + 0 0 +	0 - + 0 0	+ - + + -	0 + 0 0 0	0 0 + + 0	0 + -
11222211	+ 0 + - 0	0 + - - +	0 0 0 - 0	- + + 0 0	0 0 0 + +	+ - 0
11122221	0 + - + -	+ 0 + 0 -	0 + 0 0 -	0 0 + + 0	0 0 0 0 +	0 0 -
12232111	+ + 0 0 0	+ 0 0 - +	+ - + + -	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	+ 0 0
11232211	+ 0 + 0 -	0 + - 0 0	- + 0 - 0	+ 0 - 0 +	+ 0 0 0 0	+ + +
11222221	0 + - + 0	0 - + + -	0 0 0 + 0	0 - 0 - 0	+ + 0 0 0	0 0 +
12232211	+ 0 + 0 0	- 0 0 + -	- + 0 - 0	+ 0 - 0 0	+ 0 + + 0	0 0 0
11233211	+ 0 0 + -	0 + - 0 0	0 0 - 0 +	- - + 0 +	- 0 0 + 0	0 0 0
11232221	0 + - 0 +	0 - + 0 0	+ - 0 + 0	0 0 0 + -	0 - 0 + +	0 0 0

	1 1 1 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 4 3 3 2 3 3 3 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 1 1 1 1	1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 2 2 3 3 4 4 3 4 3 3 3 3 3 3 2 2 3 2 2 1 2 2 1 1 1 1 1 1	1 1 2 1 1 2 2 2 2 2 3 2 3 3 2 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 2 3 2 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	2 1 2 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 5 5 3 4 4 4 4 3 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	1 2 2 2 2 3 3 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 4 4 4 4 4 3 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 6 6 6 6 6 5 5 5 5 3 4 4 4 2 2 3 3 1 1 1 1
00000001	+ 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0
00000011	0 + + 0 +	0 0 + 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0
00000111	0 - 0 0 0	+ 0 0 + 0	0 + 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0
00001111	+ 0 - 0 -	- 0 0 - 0	0 0 0 0 +	0 + + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0
00011111	0 0 + + 0	+ 0 - 0 0	0 - 0 0 -	0 0 0 + +	0 0 0 0 0	0 0 0
01011111	- + 0 - +	0 0 + + 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	+ + 0 0 0	0 0 0
00111111	0 0 - 0 0	- + 0 0 0	- 0 0 - 0	0 - 0 - 0	0 0 + 0 0	0 0 0
10111111	0 0 + 0 0	+ 0 0 0 +	0 0 - 0 0	- 0 - 0 -	0 0 - 0 0	0 0 0
01111111	+ - 0 0 -	0 - 0 - 0	+ 0 0 + 0	0 + 0 0 0	- 0 0 + 0	0 0 0
11111111	- + 0 0 +	0 0 0 + -	0 0 + 0 0	+ 0 + 0 0	0 - 0 - 0	0 0 0
01121111	0 + 0 + 0	0 + - 0 0	- - 0 - 0	0 0 0 + 0	+ 0 0 0 +	0 0 0
11121111	0 - 0 - 0	0 0 + 0 +	0 + - 0 0	- 0 0 0 +	0 + 0 0 -	0 0 0
01122111	- 0 + - +	0 - + 0 0	+ 0 0 0 -	0 - 0 - 0	- 0 0 0 0	+ 0 0
11221111	0 + 0 0 0	0 - 0 0 -	+ 0 + + 0	+ 0 0 0 0	0 0 + + +	0 0 0
11122111	+ 0 - + -	0 0 - 0 -	0 0 + 0 +	0 0 - 0 -	0 - 0 0 0	- 0 0
01122211	- 0 0 - 0	+ - 0 + 0	0 + 0 + +	0 + 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 + 0
11222111	- 0 + 0 +	0 + 0 0 +	- 0 - 0 0	0 + + 0 0	0 0 - - 0	+ 0 0
11122211	+ 0 0 + 0	- 0 0 - -	0 - 0 0 -	+ 0 + 0 +	0 + 0 0 0	0 - 0
01122221	0 + - 0 -	+ 0 - + 0	- + 0 + +	0 + 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 0 +
11232111	0 0 - - 0	0 - + 0 -	+ 0 + 0 0	0 0 0 + +	0 0 + 0 -	- 0 0
11222211	- 0 0 0 0	+ + 0 + +	0 0 0 - 0	- - - 0 0	0 0 + + 0	0 + 0
11122221	0 - + 0 +	- 0 + - 0	0 - - 0 -	+ 0 + 0 +	0 + 0 0 0	0 0 -
12232111	+ - 0 + -	0 + - 0 +	- 0 - 0 0	0 0 0 0 0	+ + 0 + +	+ 0 0
11232211	0 0 0 - 0	- - 0 0 -	0 + 0 + 0	+ 0 0 - -	0 0 - 0 +	0 - 0
11222221	0 + - 0 -	+ 0 0 + 0	+ 0 + - 0	- - - 0 0	0 0 + + 0	0 0 +
12232211	+ + 0 + 0	0 + 0 - +	0 - 0 - 0	- 0 0 0 0	- - 0 - -	0 + 0
11233211	+ 0 + - 0	+ - 0 0 -	0 0 0 0 +	0 + + + +	0 0 + 0 0	+ + 0
11232221	0 + + 0 0	- 0 - 0 0	- + - + 0	+ 0 0 - -	0 0 - 0 +	0 0 -

	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1	0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 1 1 2 1 2 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 2 2 2 2 3 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1 1 2 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 3 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 1 2 1 1 1 1 1	1 1 1 2 1 1 2 2 2 3 3 3 2 3 2 2 2 2 1 1 2 1 1 1
12233211	+ 0 0 + 0	- 0 0 + -	0 0 - 0 +	- - + 0 0	- 0 + 0 0	+ + 0
1223221	0 + - 0 0	+ 0 0 - +	+ - 0 + 0	0 0 0 + 0	0 - - 0 +	+ 0 +
1123321	0 + 0 - +	0 - + 0 0	0 0 + 0 -	0 + 0 - -	0 + 0 0 -	0 + +
12243211	+ 0 0 0 +	- 0 0 0 0	+ - - 0 +	- 0 + 0 -	0 0 + - 0	+ - 0
12233221	0 + 0 - 0	+ 0 0 - +	0 0 + 0 -	0 + 0 - 0	0 + - 0 -	0 0 0
11233321	0 0 + - +	0 - + 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 - + 0	+ - 0 - +	0 + -
12343211	+ 0 0 0 0	0 + 0 - 0	+ 0 - - 0	- + 0 0 -	+ 0 + - 0	+ - 0
12243221	0 + 0 0 -	+ 0 0 0 0	- + + 0 -	0 0 0 - +	0 + - 0 0	0 0 -
12233321	0 0 + - 0	+ 0 0 - +	0 0 0 0 0	+ 0 - + 0	+ - 0 0 +	- 0 0
22343211	+ 0 0 0 0	0 0 + 0 -	0 + 0 - -	0 + - 0 -	+ 0 + - 0	+ - 0
12343221	0 + 0 0 0	0 - 0 + 0	- 0 + + 0	0 - 0 - +	0 0 - 0 +	0 0 -
12243321	0 0 + 0 -	+ 0 0 0 0	- + 0 0 0	+ 0 - + 0	0 - 0 + 0	- 0 +
22343221	0 + 0 0 0	0 0 - 0 +	0 - 0 + +	0 - 0 0 +	0 - - 0 +	0 0 -
12343321	0 0 + 0 0	0 - 0 + 0	- 0 0 + 0	+ 0 0 + 0	- 0 0 + -	- 0 +
12244321	0 0 0 + -	+ 0 0 0 0	0 0 - 0 +	+ 0 - + 0	0 - 0 0 0	0 + 0
22343321	0 0 + 0 0	0 0 - 0 +	0 - 0 + 0	0 0 + 0 0	- + 0 + -	- 0 +
12344321	0 0 0 + 0	0 - 0 + 0	0 0 - 0 0	+ + 0 + 0	- 0 0 0 -	0 + 0
22344321	0 0 0 + 0	0 0 - 0 +	0 0 0 0 -	0 + + 0 0	- + 0 0 -	0 + 0
12354321	0 0 0 0 +	0 - 0 0 0	+ 0 - 0 0	+ 0 0 + +	0 0 0 - 0	0 + -
22354321	0 0 0 0 +	0 0 - 0 0	0 + 0 0 -	0 0 + 0 +	0 + 0 - 0	0 + -
13354321	0 0 0 0 0	+ 0 0 - 0	+ 0 - 0 0	+ 0 0 + 0	0 0 + 0 0	- 0 0
23354321	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 -	0 + 0 0 -	0 0 + 0 0	0 + + 0 0	- 0 0
22454321	0 0 0 0 0	0 + - 0 0	0 0 0 + 0	0 - 0 0 +	+ 0 0 - +	0 + -
23454321	0 0 0 0 0	0 0 0 + -	0 0 0 + 0	0 - 0 0 0	+ 0 + 0 +	- 0 0
23464321	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ - 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 + + 0	- 0 +
23465321	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 -	0 + 0 0 -	0 0 + 0 0	0 + 0
23465421	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 - 0 0	+ 0 0 - 0	+ + 0
23465431	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 - 0 0 +	0 0 -

	1 1 1 1 1 2 2 1 2 2 2 2 2 2 2 3 3 3 4 3 3 2 3 3 3 2 2 2 2 2 1 2 2 1 2 1 1 1 1 1	1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 2 3 2 2 3 3 4 4 3 4 3 3 3 3 3 3 2 2 3 2 2 1 2 2 1 1 1 1 1 1	1 1 2 1 1 2 2 2 2 2 3 2 3 3 2 4 4 4 4 4 3 3 3 3 4 2 3 2 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	2 1 2 1 2 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 5 5 3 4 4 4 4 3 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	1 2 2 2 2 3 3 2 3 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 4 4 4 4 4 3 3 3 3 3 2 2 2 2 2 1 1 1 1 1	2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 6 3 4 4 2 2 3 1 1 1
12233211	0 0 0 + +	0 + 0 + +	0 0 0 0 -	0 - - 0 0	+ + 0 + 0	- - 0
12232221	0 0 0 0 +	0 0 + - 0	+ - + - 0	- 0 0 0 0	- - 0 - -	0 0 +
11233221	0 0 0 0 +	+ 0 - 0 0	- 0 - 0 +	0 + + + +	0 0 + 0 0	+ 0 +
12243211	+ 0 0 0 0	0 + + 0 +	0 + 0 0 +	0 0 0 - -	- - 0 0 +	+ + 0
12233221	+ + + 0 0	0 0 + + 0	+ 0 + 0 -	0 - - 0 0	+ + 0 + 0	- 0 -
11233321	0 0 + 0 0	0 0 0 + 0	0 - 0 - +	- + + + +	0 0 + 0 0	0 + -
12343211	+ 0 0 + 0	0 0 0 0 +	+ 0 0 + 0	0 + 0 + 0	+ 0 - - -	- - 0
12243221	0 + - + +	0 0 0 0 0	+ + + 0 +	0 0 0 - -	- - 0 0 +	+ 0 +
12233321	+ - 0 0 +	+ 0 0 0 0	0 + 0 + -	+ - - 0 0	+ + 0 + 0	0 - +
22343211	+ 0 0 + 0	0 + 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 + 0 +	0 + + + +	+ + 0
12343221	0 + - 0 +	0 + + 0 0	0 0 + + 0	0 + 0 + 0	+ 0 - - -	- 0 -
12243321	0 - 0 + 0	- 0 + + 0	0 0 0 + +	+ 0 0 - -	- - 0 0 +	0 + -
22343221	0 + - 0 +	0 0 + 0 +	+ 0 0 0 0	+ 0 + 0 +	0 + + + +	+ 0 +
12343321	0 - 0 0 0	- + 0 + 0	+ + 0 0 0	+ + 0 + 0	+ 0 - - -	0 - +
12244321	- 0 + + -	+ 0 + - 0	0 + 0 0 0	0 + + - -	- - 0 0 0	+ - +
22343321	0 - 0 0 0	- 0 0 + +	0 + + + 0	0 0 + 0 +	0 + + + +	0 + -
12344321	- 0 + 0 -	+ + 0 - 0	+ 0 0 + +	0 0 + + 0	+ 0 - - 0	- + -
22344321	- 0 + 0 -	+ 0 0 - +	0 0 + 0 +	+ + 0 0 +	0 + + + 0	+ - +
12354321	0 0 + - 0	+ + - 0 0	+ - 0 + -	0 + 0 0 +	+ 0 - 0 -	+ - +
22354321	0 0 + - 0	+ 0 - 0 +	0 - + 0 -	+ 0 + + 0	0 + + 0 +	- + -
13354321	+ - 0 - +	0 + - + 0	+ - 0 + -	0 + 0 + 0	0 + 0 - +	- + -
23354321	+ - 0 - +	0 0 - + +	0 - + 0 -	+ 0 + 0 +	+ 0 0 + -	+ - +
22454321	0 0 + 0 0	+ - 0 0 +	- 0 + - 0	+ - + - +	0 0 0 + -	+ - +
23454321	+ - 0 0 +	0 - 0 + +	- 0 + - 0	+ - + 0 0	- + + 0 +	- + -
23464321	0 - 0 + 0	0 - + 0 +	- + + - 0	+ 0 0 - +	+ - - + 0	+ - +
23465321	- 0 + + -	0 - + 0 +	- 0 + 0 +	0 - + + -	- + + - +	0 + -
23465421	- 0 0 + 0	+ - 0 - +	0 + 0 - -	+ + - - +	+ - - + -	+ 0 +
23465431	0 + + 0 -	- 0 + + 0	- - + + +	- - + + -	- + + - +	- + 0

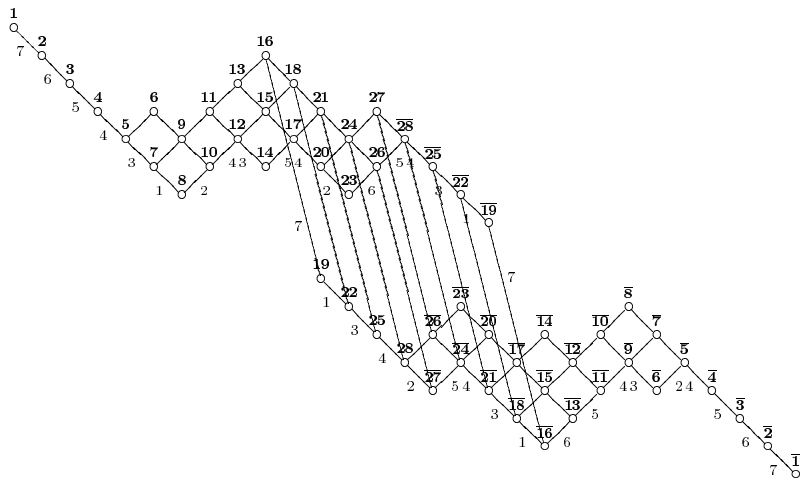
Таблица 8. Нумерации весов: естественная, A_6 , D_6 и E_6

	естественная	A_6 -ветвление	D_6 -ветвление	E_6 -ветвление
1	2465431 3	2465431 3	2465431 3	2465431 3
2	2465421 3	2465421 3	2465421 3	2465421 3
3	2465321 3	2465321 3	2465321 3	2465321 3
4	2464321 3	2464321 3	2464321 3	2464321 3
5	2454321 3	2454321 3	2454321 3	2454321 3
6	2454321 2	2354321 3	2454321 2	2454321 2
7	2354321 3	1354321 3	2354321 3	2354321 3
8	1354321 3	2454321 2	2354321 2	1354321 3
9	2354321 2	2354321 2	2344321 2	2354321 2
10	1354321 2	1354321 2	2343321 2	1354321 2
11	2344321 2	2344321 2	2343221 2	2344321 2
12	1344321 2	1344321 2	2343211 2	1344321 2
13	2343321 2	2343321 2	1354321 3	2343321 2
14	1244321 2	1244321 2	1354321 2	1244321 2
15	1343321 2	1343321 2	1344321 2	1343321 2

16	2343221 2	2343221 2	1244321 2	2343221 2
17	1243321 2	1243321 2	1343321 2	1243321 2
18	1343221 2	1343221 2	1243321 2	1343221 2
19	2343211 2	2343211 2	1343221 2	1233321 2
20	1233321 2	1233321 2	1233321 2	1243221 2
21	1243221 2	1243221 2	1243221 2	1233321 1
22	1343211 2	1343211 2	1343211 2	1233221 2
23	1233321 1	1233221 2	1233321 1	1233221 1
24	1233221 2	1243211 2	1233221 2	1232221 2
25	1243211 2	1232221 2	1243211 2	1232221 1
26	1233221 1	1233211 2	1233221 1	1222221 1
27	1232221 2	1232211 2	1232221 2	1122221 1
28	1233211 2	1232111 2	1233211 2	0122221 1
-28	1232221 1	1233321 1	1232221 1	2343211 2
-27	1233211 1	1233221 1	1233211 1	1343211 2
-26	1232211 2	1232221 1	1232211 2	1243211 2
-25	1222221 1	1233211 1	1222221 1	1233211 2
-24	1232211 1	1222221 1	1232211 1	1233211 1
-23	1232111 2	1232211 1	1232111 2	1232211 2
-22	1122221 1	1122221 1	1122221 1	1232211 1
-21	1222211 1	1222211 1	1222211 1	1232111 2

-20	1232111 1	1232111 1	1232111 1	1222211 1
-19	0122221 1	0122221 1	1122211 1	1232111 1
-18	1122211 1	1122211 1	1222111 1	1122211 1
-17	1222111 1	1222111 1	1122111 1	1222111 1
-16	0122211 1	0122211 1	1221111 1	0122211 1
-15	1122111 1	1122111 1	1121111 1	1122111 1
-14	1221111 1	1221111 1	1111111 1	1221111 1
-13	0122111 1	0122111 1	1111111 0	0122111 1
-12	1121111 1	1121111 1	0122221 1	1121111 1
-11	0121111 1	0121111 1	0122211 1	0121111 1
-10	1111111 1	1111111 1	0122111 1	1111111 1
-9	0111111 1	0111111 1	0121111 1	0111111 1
-8	1111111 0	0011111 1	0111111 1	1111111 0
-7	0111111 0	1111111 0	0111111 0	0111111 0
-6	0011111 1	0111111 0	0011111 1	0011111 1
-5	0011111 0	0011111 0	0011111 0	0011111 0
-4	0001111 0	0001111 0	0001111 0	0001111 0
-3	0000111 0	0000111 0	0000111 0	0000111 0
-2	0000011 0	0000011 0	0000011 0	0000011 0
-1	0000001 0	0000001 0	0000001 0	0000001 0

Таблица 9. Матрица знаков $V(\varpi_7)$: естественная нумерация



	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
1	0 + - + -	+ + - - +	+ - - + +	+ - - 0 +	+ 0 - - 0	+ + 0
2	+ 0 + - +	- - + + -	- + + - -	0 + 0 + -	0 - + 0 +	0 0 -
3	- + 0 + -	+ + - - +	+ - 0 + 0	+ 0 - + 0	+ - 0 - +	+ 0 -
4	+ - + 0 +	- - + + -	0 0 + 0 -	+ + - + 0	+ - 0 0 +	0 - 0
5	- + - + 0	+ + - 0 0	+ - + 0 -	+ 0 - + +	0 - 0 + 0	0 - +
6	+ - + - +	0 0 0 + -	+ - + 0 -	+ 0 - + 0	0 - + 0 0	+ 0 0
7	+ - + - +	0 0 + + 0	+ 0 + - 0	+ - 0 + +	- 0 0 + -	0 - +
8	- + - + -	0 + 0 0 +	0 + 0 - +	0 - + 0 +	- + 0 + -	0 - +
9	- + - + 0	+ + 0 0 +	+ 0 + - 0	+ - 0 + 0	- 0 + 0 -	+ 0 0
10	+ - + - 0	- 0 + + 0	0 + 0 - +	0 - + 0 0	- + + 0 -	+ 0 0
11	+ - + 0 +	+ + 0 0 0	0 + + + 0	+ 0 0 + -	0 0 + - 0	+ 0 -
12	- + - 0 -	- 0 + 0 +	+ 0 0 + +	0 0 + 0 -	0 + + - 0	+ 0 -
13	- + 0 + +	+ + 0 0 0	+ 0 0 0 +	+ + 0 + +	0 0 - 0 0	0 - 0
14	+ - + 0 0	0 - - - -	+ + 0 0 0	0 + 0 0 -	+ 0 + - +	+ 0 -
15	+ - 0 - -	- 0 + 0 +	0 + + 0 0	0 + + 0 +	0 + - 0 0	0 - 0
16	+ 0 + + +	+ + 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 + + 0	+ 0 0 + 0	- + 0
17	- + 0 + 0	0 - - - -	0 0 + + +	0 0 0 0 +	+ 0 - 0 +	0 - 0
18	- 0 - - -	- 0 + 0 +	0 + 0 0 +	+ 0 0 0 0	+ + 0 + 0	- + 0
19	0 + + + +	+ + 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 0 0	0 + 0 0 +	0 0 +
20	+ - 0 0 +	0 + + 0 0	- - + - +	0 + 0 0 0	0 0 + + 0	0 - +
21	+ 0 + + 0	0 - - - -	0 0 0 + 0	+ + + 0 0	0 0 0 + +	- + 0
22	0 - - - -	- 0 + 0 +	0 + 0 0 +	0 0 + + 0	0 0 0 0 +	0 0 +
23	- + 0 0 0	+ 0 0 + +	+ + - + -	0 - 0 0 +	0 0 0 0 0	+ 0 0
24	- 0 - 0 +	0 + + 0 0	- - 0 - 0	+ 0 + 0 +	+ 0 0 0 0	+ + +
25	0 + + + 0	0 - - - -	0 0 0 + 0	0 + 0 + 0	+ + 0 0 0	0 0 +
26	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + +	+ + 0 + 0	- 0 - 0 0	- 0 + + 0	0 0 0
27	+ 0 0 - -	0 - - 0 0	0 0 - 0 -	+ - + 0 -	+ 0 0 + 0	0 0 0
28	0 - - 0 +	0 + + 0 0	- - 0 - 0	0 0 0 + +	0 + 0 + +	0 0 0

	$\bar{2}$ 8	$\bar{2}$ 7	$\bar{2}$ 6	$\bar{2}$ 5	$\bar{2}$ 4	$\bar{2}$ 3	$\bar{2}$ 2	$\bar{2}$ 1	$\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ 9	$\bar{1}$ 8	$\bar{1}$ 7	$\bar{1}$ 6	$\bar{1}$ 5	$\bar{1}$ 4	$\bar{1}$ 3	$\bar{1}$ 2	$\bar{1}$ 1	$\bar{1}$ 0	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	
1	-	0	0	+	0	0	-	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	+	+	0	-	0	0	+	0	0	-	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	+	0	0	0	+	0	0	-	0	0	+	0	-	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	+	0	-	0	+	+	0	0	-	0	0	0	0	+	0	-	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-	+	0	+	0	+	0	0	0	-	0	0	0	-	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	-	+	0	+	-	0	0	+	+	0	0	-	0	0	+	0	0	0	0	0	-	+	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	-	0	0	+	+	0	0	0	+	0	0	-	0	+	0	-	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	-	0	0	+	0	0	0	+	0	0	+	0	0	-	0	+	0	-	0	0	+	0	0	0	0	0	0
9	-	+	0	0	-	0	+	0	+	0	0	-	0	+	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0
10	-	+	0	0	-	0	0	0	+	+	0	0	+	0	0	-	+	0	0	0	0	-	0	+	0	0	0	0	0
11	0	+	0	-	0	0	+	-	0	0	+	+	0	-	0	0	0	+	0	0	0	-	0	0	0	+	0	0	0
12	0	+	0	-	0	0	0	-	0	+	0	+	+	0	0	-	0	0	0	+	0	-	0	0	0	+	0	0	0
13	+	0	-	-	+	0	+	-	0	0	+	+	0	0	0	+	0	-	0	+	0	-	0	0	0	0	+	0	0
14	0	+	0	0	0	0	-	0	0	+	-	0	+	+	0	-	0	0	0	0	0	0	+	-	+	0	0	0	0
15	+	0	-	-	+	0	0	-	0	+	0	0	+	0	0	-	0	+	0	0	0	0	-	0	0	0	+	0	0
16	-	0	0	+	0	-	-	0	+	0	0	-	0	+	+	0	-	0	+	0	-	0	0	0	0	0	+	0	0
17	+	0	-	0	+	0	-	0	0	+	-	0	+	0	0	0	-	0	0	0	0	0	+	-	0	+	0	0	0
18	-	0	0	+	0	-	0	0	+	-	0	-	0	0	+	+	0	-	0	+	0	-	0	0	0	0	0	+	0
19	0	-	+	0	-	+	0	+	-	0	-	+	0	-	0	+	0	-	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	+
20	0	0	-	+	0	0	-	+	0	+	-	0	+	0	0	0	+	-	0	0	0	0	+	0	-	+	0	0	0
21	-	0	0	0	0	-	+	0	+	-	0	0	0	-	0	+	+	-	0	0	0	0	+	-	0	0	0	0	+
22	0	-	+	0	-	+	0	+	-	0	0	+	-	0	-	0	+	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+
23	-	+	0	+	-	0	-	+	0	+	-	0	+	0	0	0	0	0	0	0	+	-	0	+	-	+	0	0	0
24	0	0	0	-	0	-	+	0	0	-	0	+	0	-	0	+	0	0	+	-	0	0	+	0	-	0	+	0	0
25	0	-	+	0	-	+	0	0	-	0	+	0	-	+	0	0	-	+	0	0	0	0	-	+	0	0	0	0	+
26	+	+	0	-	0	0	+	0	-	-	0	+	0	-	0	0	0	0	0	+	+	-	0	+	-	0	+	0	0
27	+	0	+	+	0	-	-	0	0	+	0	0	0	0	+	0	-	+	+	-	0	0	+	0	0	-	+	0	0
28	0	+	+	0	0	+	0	-	0	0	+	+	-	-	+	0	-	0	0	-	+	0	0	-	0	+	0	0	+

	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
$\frac{28}{27}$	- 0 0 + 0	- 0 0 - -	0 0 + 0 +	- + - 0 0	- 0 - 0 0	+ + 0
$\frac{27}{26}$	0 + + 0 0	+ 0 0 + +	+ + 0 + 0	0 0 0 - 0	0 - + 0 -	+ 0 +
$\frac{26}{25}$	0 + 0 - -	0 - - 0 0	0 0 - 0 -	0 - 0 + -	0 + 0 0 +	0 + +
$\frac{25}{24}$	+ 0 0 0 +	+ 0 0 0 0	- - - 0 -	+ 0 + 0 +	0 0 + - 0	- + 0
$\frac{24}{23}$	0 - 0 + 0	- 0 0 - -	0 0 + 0 +	0 + 0 - 0	0 - - 0 -	0 0 0
$\frac{23}{22}$	0 0 + + +	0 + + 0 0	0 0 0 0 0	- 0 - + 0	- + 0 - +	0 - +
$\frac{22}{21}$	- 0 0 0 0	0 + 0 + 0	+ 0 + - 0	- - 0 0 -	+ 0 - + 0	+ - 0
$\frac{21}{20}$	0 + 0 0 +	+ 0 0 0 0	- - - 0 -	0 0 0 + +	0 + + 0 0	0 0 -
$\frac{20}{19}$	0 0 - - 0	+ 0 0 + +	0 0 0 0 0	+ 0 + - 0	+ - 0 0 -	- 0 0
$\frac{19}{18}$	+ 0 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 + +	0 + - 0 +	- 0 + - 0	- + 0
$\frac{18}{17}$	0 - 0 0 0	0 + 0 + 0	+ 0 + - 0	0 - 0 - -	0 0 - 0 +	0 0 +
$\frac{17}{16}$	0 0 + 0 -	- 0 0 0 0	+ + 0 0 0	- 0 - + 0	0 + 0 + 0	+ 0 -
$\frac{16}{15}$	0 + 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 + +	0 + 0 0 +	0 - + 0 -	0 0 -
$\frac{15}{14}$	0 0 - 0 0	0 - 0 - 0	- 0 0 + 0	+ 0 0 - 0	- 0 0 - +	- 0 +
$\frac{14}{13}$	0 0 0 + +	+ 0 0 0 0	0 0 + 0 +	+ 0 + - 0	0 - 0 0 0	0 + 0
$\frac{13}{12}$	0 0 + 0 0	0 0 - 0 -	0 - 0 - 0	0 0 + 0 0	+ - 0 + -	+ 0 -
$\frac{12}{11}$	0 0 0 - 0	0 + 0 + 0	0 0 - 0 0	- + 0 + 0	+ 0 0 0 -	0 - 0
$\frac{11}{10}$	0 0 0 + 0	0 0 + 0 +	0 0 0 0 -	0 - - 0 0	- + 0 0 +	0 + 0
$\frac{10}{9}$	0 0 0 0 -	0 - 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 - +	0 0 0 + 0	0 + -
$\frac{9}{8}$	0 0 0 0 +	0 0 - 0 0	0 + 0 0 +	0 0 + 0 -	0 - 0 - 0	0 - +
$\frac{8}{7}$	0 0 0 0 0	- 0 0 - 0	- 0 - 0 0	- 0 0 + 0	0 0 + 0 0	+ 0 0
$\frac{7}{6}$	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 -	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	0 + - 0 0	- 0 0
$\frac{6}{5}$	0 0 0 0 0	0 + + 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	+ 0 0 + -	0 + -
$\frac{5}{4}$	0 0 0 0 0	0 0 0 + +	0 0 0 - 0	0 - 0 0 0	- 0 + 0 +	+ 0 0
$\frac{4}{3}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ + 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 - - 0	- 0 +
$\frac{3}{2}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 0 +	0 0 + 0 0	0 - 0
$\frac{2}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	+ + 0
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 +

Таблица 10. Корневые элементы: естественная нумерация

$$\begin{aligned}
e_{100000} &= e_{7,8} + e_{9,10} + e_{11,12} + e_{13,15} + e_{16,18} + e_{19,22} \\
&\quad + e_{22,19} + e_{18,16} + e_{15,13} + e_{12,11} + e_{10,9} + e_{8,7} \\
e_{000000} &= e_{5,6} + e_{7,9} + e_{8,10} + e_{20,23} + e_{24,26} + e_{28,27} \\
&\quad + e_{27,28} + e_{26,24} + e_{23,20} + e_{10,8} + e_{9,7} + e_{6,5} \\
e_{010000} &= e_{5,7} + e_{6,9} + e_{12,14} + e_{15,17} + e_{18,21} + e_{22,25} \\
&\quad + e_{25,22} + e_{21,18} + e_{17,15} + e_{14,12} + e_{9,6} + e_{7,5} \\
e_{001000} &= e_{4,5} + e_{9,11} + e_{10,12} + e_{17,20} + e_{21,24} + e_{25,28} \\
&\quad + e_{28,25} + e_{24,21} + e_{20,17} + e_{12,10} + e_{11,9} + e_{5,4} \\
e_{000100} &= e_{3,4} + e_{11,13} + e_{12,15} + e_{14,17} + e_{24,27} + e_{28,26} \\
&\quad + e_{26,28} + e_{27,24} + e_{17,14} + e_{15,12} + e_{13,11} + e_{4,3} \\
e_{000010} &= e_{2,3} + e_{13,16} + e_{15,18} + e_{17,21} + e_{20,24} + e_{26,23} \\
&\quad + e_{23,26} + e_{24,20} + e_{21,17} + e_{18,15} + e_{16,13} + e_{3,2} \\
e_{000001} &= e_{1,2} + e_{16,19} + e_{18,22} + e_{21,25} + e_{24,28} + e_{27,26} \\
&\quad + e_{26,27} + e_{28,24} + e_{25,21} + e_{22,18} + e_{19,16} + e_{2,1} \\
e_{110000} &= -e_{5,8} - e_{6,10} + e_{11,14} + e_{13,17} + e_{16,21} + e_{19,25} \\
&\quad - e_{25,19} - e_{21,16} - e_{17,13} - e_{14,11} + e_{10,6} + e_{8,5} \\
e_{001000} &= -e_{4,6} + e_{7,11} + e_{8,12} - e_{17,23} - e_{21,26} - e_{25,27} \\
&\quad + e_{27,25} + e_{26,21} + e_{23,17} - e_{12,8} - e_{11,7} + e_{6,4} \\
e_{011000} &= -e_{4,7} + e_{6,11} - e_{10,14} + e_{15,20} + e_{18,24} + e_{22,28} \\
&\quad - e_{28,22} - e_{24,18} - e_{20,15} + e_{14,10} - e_{11,6} + e_{7,4} \\
e_{001100} &= -e_{3,5} + e_{9,13} + e_{10,15} - e_{14,20} + e_{21,27} + e_{25,26} \\
&\quad - e_{26,25} - e_{27,21} + e_{20,14} - e_{15,10} - e_{13,9} + e_{5,3} \\
e_{000110} &= -e_{2,4} + e_{11,16} + e_{12,18} + e_{14,21} - e_{20,27} + e_{28,23} \\
&\quad - e_{23,28} + e_{27,20} - e_{21,14} - e_{18,12} - e_{16,11} + e_{4,2} \\
e_{000011} &= -e_{1,3} + e_{13,19} + e_{15,22} + e_{17,25} + e_{20,28} - e_{27,23} \\
&\quad + e_{23,27} - e_{28,20} - e_{25,17} - e_{22,15} - e_{19,13} + e_{3,1}
\end{aligned}$$

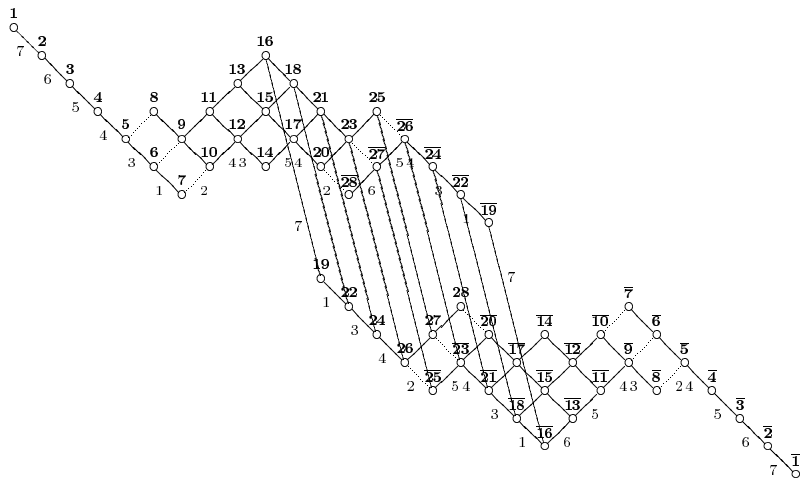
$$\begin{aligned}
e_{111000} &= e_{4,8} - e_{6,12} - e_{9,14} + e_{13,20} + e_{16,24} + e_{19,28} \\
&\quad + e_{28,19} + e_{24,16} + e_{20,13} - e_{14,9} - e_{12,6} + e_{8,4} \\
e_{011000} &= e_{4,9} + e_{5,11} - e_{8,14} - e_{15,23} - e_{18,26} - e_{22,27} \\
&\quad - e_{27,22} - e_{26,18} - e_{23,15} - e_{14,8} + e_{11,5} + e_{9,4} \\
e_{001100} &= e_{3,6} + e_{7,13} + e_{8,15} + e_{14,23} - e_{21,28} - e_{25,24} \\
&\quad - e_{24,25} - e_{28,21} + e_{23,14} + e_{15,8} + e_{13,7} + e_{6,3} \\
e_{011100} &= e_{3,7} + e_{6,13} - e_{10,17} - e_{12,20} + e_{18,27} + e_{22,26} \\
&\quad + e_{26,22} + e_{27,18} - e_{20,12} - e_{17,10} + e_{13,6} + e_{7,3} \\
e_{001110} &= e_{2,5} + e_{9,16} + e_{10,18} - e_{14,24} - e_{17,27} + e_{25,23} \\
&\quad + e_{23,25} - e_{27,17} - e_{24,14} + e_{18,10} + e_{16,9} + e_{5,2} \\
e_{000111} &= e_{1,4} + e_{11,19} + e_{12,22} + e_{14,25} - e_{20,26} - e_{24,23} \\
&\quad - e_{23,24} - e_{26,20} + e_{25,14} + e_{22,12} + e_{19,11} + e_{4,1} \\
e_{111000} &= -e_{4,10} - e_{5,12} - e_{7,14} - e_{13,23} - e_{16,26} - e_{19,27} \\
&\quad + e_{27,19} + e_{26,16} + e_{23,13} + e_{14,7} + e_{12,5} + e_{10,4} \\
e_{111100} &= -e_{3,8} - e_{6,15} - e_{9,17} - e_{11,20} + e_{16,27} + e_{19,26} \\
&\quad - e_{26,19} - e_{27,16} + e_{20,11} + e_{17,9} + e_{15,6} + e_{8,3} \\
e_{011100} &= -e_{3,9} + e_{5,13} - e_{8,17} + e_{12,23} - e_{18,28} - e_{22,24} \\
&\quad + e_{24,22} + e_{28,18} - e_{23,12} + e_{17,8} - e_{13,5} + e_{9,3} \\
e_{001110} &= -e_{2,6} + e_{7,16} + e_{8,18} + e_{14,26} + e_{17,28} - e_{25,20} \\
&\quad + e_{20,25} - e_{28,17} - e_{26,14} - e_{18,8} - e_{16,7} + e_{6,2} \\
e_{011110} &= -e_{2,7} + e_{6,16} - e_{10,21} - e_{12,24} - e_{15,27} + e_{22,23} \\
&\quad - e_{23,22} + e_{27,15} + e_{24,12} + e_{21,10} - e_{16,6} + e_{7,2} \\
e_{001111} &= -e_{1,5} + e_{9,19} + e_{10,22} - e_{14,28} - e_{17,26} - e_{21,23} \\
&\quad + e_{23,21} + e_{26,17} + e_{28,14} - e_{22,10} - e_{19,9} + e_{5,1} \\
e_{111100} &= e_{3,10} - e_{5,15} - e_{7,17} + e_{11,23} - e_{16,28} - e_{19,24} \\
&\quad - e_{24,19} - e_{28,16} + e_{23,11} - e_{17,7} - e_{15,5} + e_{10,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{111110} &= e_{2,8} - e_{6,18} - e_{9,21} - e_{11,24} - e_{13,27} + e_{19,23} \\
&\quad + e_{23,19} - e_{27,13} - e_{24,11} - e_{21,9} - e_{18,6} + e_{8,2} \\
e_{012100} &= e_{3,11} + e_{4,13} + e_{8,20} + e_{10,23} + e_{18,25} + e_{22,21} \\
&\quad + e_{21,22} + e_{25,18} + e_{23,10} + e_{20,8} + e_{13,4} + e_{11,3} \\
e_{011110} &= e_{2,9} + e_{5,16} - e_{8,21} + e_{12,26} + e_{15,28} - e_{22,20} \\
&\quad - e_{20,22} + e_{28,15} + e_{26,12} - e_{21,8} + e_{16,5} + e_{9,2} \\
e_{001111} &= e_{1,6} + e_{7,19} + e_{8,22} + e_{14,27} + e_{17,24} + e_{21,20} \\
&\quad + e_{20,21} + e_{24,17} + e_{27,14} + e_{22,8} + e_{19,7} + e_{6,1} \\
e_{011111} &= e_{1,7} + e_{6,19} - e_{10,25} - e_{12,28} - e_{15,26} - e_{18,23} \\
&\quad - e_{23,18} - e_{26,15} - e_{28,12} - e_{25,10} + e_{19,6} + e_{7,1} \\
e_{112100} &= -e_{3,12} - e_{4,15} + e_{7,20} + e_{9,23} + e_{16,25} + e_{19,21} \\
&\quad - e_{21,19} - e_{25,16} - e_{23,9} - e_{20,7} + e_{15,4} + e_{12,3} \\
e_{111110} &= -e_{2,10} - e_{5,18} - e_{7,21} + e_{11,26} + e_{13,28} - e_{19,20} \\
&\quad + e_{20,19} - e_{28,13} - e_{26,11} + e_{21,7} + e_{18,5} + e_{10,2} \\
e_{111111} &= -e_{1,8} - e_{6,22} - e_{9,25} - e_{11,28} - e_{13,26} - e_{16,23} \\
&\quad + e_{23,16} + e_{26,13} + e_{28,11} + e_{25,9} + e_{22,6} + e_{8,1} \\
e_{012110} &= -e_{2,11} + e_{4,16} + e_{8,24} + e_{10,26} - e_{15,25} + e_{22,17} \\
&\quad - e_{17,22} + e_{25,15} - e_{26,10} - e_{24,8} - e_{16,4} + e_{11,2} \\
e_{011111} &= -e_{1,9} + e_{5,19} - e_{8,25} + e_{12,27} + e_{15,24} + e_{18,20} \\
&\quad - e_{20,18} - e_{24,15} - e_{27,12} + e_{25,8} - e_{19,5} + e_{9,1} \\
e_{122100} &= e_{3,14} + e_{4,17} + e_{5,20} + e_{6,23} - e_{16,22} - e_{19,18} \\
&\quad - e_{18,19} - e_{22,16} + e_{23,6} + e_{20,5} + e_{17,4} + e_{14,3} \\
e_{112110} &= e_{2,12} - e_{4,18} + e_{7,24} + e_{9,26} - e_{13,25} + e_{19,17} \\
&\quad + e_{17,19} - e_{25,13} + e_{26,9} + e_{24,7} - e_{18,4} + e_{12,2} \\
e_{111111} &= e_{1,10} - e_{5,22} - e_{7,25} + e_{11,27} + e_{13,24} + e_{16,20} \\
&\quad + e_{20,16} + e_{24,13} + e_{27,11} - e_{25,7} - e_{22,5} + e_{10,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{012210} &= e_{2,13} + e_{3,16} - e_{8,27} - e_{10,28} - e_{12,25} - e_{22,14} \\
&\quad - e_{14,22} - e_{25,12} - e_{28,10} - e_{27,8} + e_{16,3} + e_{13,2} \\
e_{012111} &= e_{1,11} + e_{4,19} + e_{8,28} + e_{10,27} - e_{15,21} - e_{18,17} \\
&\quad - e_{17,18} - e_{21,15} + e_{27,10} + e_{28,8} + e_{19,4} + e_{11,1} \\
e_{122110} &= -e_{2,14} + e_{4,21} + e_{5,24} + e_{6,26} + e_{13,22} - e_{19,15} \\
&\quad + e_{15,19} - e_{22,13} - e_{26,6} - e_{24,5} - e_{21,4} + e_{14,2} \\
e_{112210} &= -e_{2,15} - e_{3,18} - e_{7,27} - e_{9,28} - e_{11,25} - e_{19,14} \\
&\quad + e_{14,19} + e_{25,11} + e_{28,9} + e_{27,7} + e_{18,3} + e_{15,2} \\
e_{112111} &= -e_{1,12} - e_{4,22} + e_{7,28} + e_{9,27} - e_{13,21} - e_{16,17} \\
&\quad + e_{17,16} + e_{21,13} - e_{27,9} - e_{28,7} + e_{22,4} + e_{12,1} \\
e_{012211} &= -e_{1,13} + e_{3,19} - e_{8,26} - e_{10,24} - e_{12,21} + e_{18,14} \\
&\quad - e_{14,18} + e_{21,12} + e_{24,10} + e_{26,8} - e_{19,3} + e_{13,1} \\
e_{122210} &= e_{2,17} + e_{3,21} - e_{5,27} - e_{6,28} + e_{11,22} + e_{19,12} \\
&\quad + e_{12,19} + e_{22,11} - e_{28,6} - e_{27,5} + e_{21,3} + e_{17,2} \\
e_{122111} &= e_{1,14} + e_{4,25} + e_{5,28} + e_{6,27} + e_{13,18} + e_{16,15} \\
&\quad + e_{15,16} + e_{18,13} + e_{27,6} + e_{28,5} + e_{25,4} + e_{14,1} \\
e_{112211} &= e_{1,15} - e_{3,22} - e_{7,26} - e_{9,24} - e_{11,21} + e_{16,14} \\
&\quad + e_{14,16} - e_{21,11} - e_{24,9} - e_{26,7} - e_{22,3} + e_{15,1} \\
e_{012221} &= e_{1,16} + e_{2,19} + e_{8,23} + e_{10,20} + e_{12,17} + e_{15,14} \\
&\quad + e_{14,15} + e_{17,12} + e_{20,10} + e_{23,8} + e_{19,2} + e_{16,1} \\
e_{123210} &= -e_{2,20} - e_{3,24} - e_{4,27} + e_{6,25} + e_{9,22} - e_{19,10} \\
&\quad + e_{10,19} - e_{22,9} - e_{25,6} + e_{27,4} + e_{24,3} + e_{20,2} \\
e_{122211} &= -e_{1,17} + e_{3,25} - e_{5,26} - e_{6,24} + e_{11,18} - e_{16,12} \\
&\quad + e_{12,16} - e_{18,11} + e_{24,6} + e_{26,5} - e_{25,3} + e_{17,1} \\
e_{112221} &= -e_{1,18} - e_{2,22} + e_{7,23} + e_{9,20} + e_{11,17} + e_{13,14} \\
&\quad - e_{14,13} - e_{17,11} - e_{20,9} - e_{23,7} + e_{22,2} + e_{18,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{123210} &= e_{2,23} + e_{3,26} + e_{4,28} + e_{5,25} + e_{7,22} + e_{19,8} \\
&\quad + e_{8,19} + e_{22,7} + e_{25,5} + e_{28,4} + e_{26,3} + e_{23,2} \\
e_{123211} &= e_{1,20} - e_{3,28} - e_{4,26} + e_{6,21} + e_{9,18} + e_{16,10} \\
&\quad + e_{10,16} + e_{18,9} + e_{21,6} - e_{26,4} - e_{28,3} + e_{20,1} \\
e_{122221} &= e_{1,21} + e_{2,25} + e_{5,23} + e_{6,20} - e_{11,15} - e_{13,12} \\
&\quad - e_{12,13} - e_{15,11} + e_{20,6} + e_{23,5} + e_{25,2} + e_{21,1} \\
e_{123211} &= -e_{1,23} + e_{3,27} + e_{4,24} + e_{5,21} + e_{7,18} - e_{16,8} \\
&\quad + e_{8,16} - e_{18,7} - e_{21,5} - e_{24,4} - e_{27,3} + e_{23,1} \\
e_{123221} &= -e_{1,24} - e_{2,28} + e_{4,23} - e_{6,17} - e_{9,15} + e_{13,10} \\
&\quad - e_{10,13} + e_{15,9} + e_{17,6} - e_{23,4} + e_{28,2} + e_{24,1} \\
e_{123321} &= e_{1,26} + e_{2,27} - e_{4,20} - e_{5,17} - e_{7,15} - e_{13,8} \\
&\quad - e_{8,13} - e_{15,7} - e_{17,5} - e_{20,4} + e_{27,2} + e_{26,1} \\
e_{123321} &= e_{1,27} + e_{2,26} + e_{3,23} + e_{6,14} + e_{9,12} + e_{11,10} \\
&\quad + e_{10,11} + e_{12,9} + e_{14,6} + e_{23,3} + e_{26,2} + e_{27,1} \\
e_{123321} &= -e_{1,28} - e_{2,24} - e_{3,20} + e_{5,14} + e_{7,12} - e_{11,8} \\
&\quad + e_{8,11} - e_{12,7} - e_{14,5} + e_{20,3} + e_{24,2} + e_{28,1} \\
e_{124321} &= e_{1,25} + e_{2,21} + e_{3,17} + e_{4,14} - e_{7,10} - e_{9,8} \\
&\quad - e_{8,9} - e_{10,7} + e_{14,4} + e_{17,3} + e_{21,2} + e_{25,1} \\
e_{134321} &= -e_{1,22} - e_{2,18} - e_{3,15} - e_{4,12} - e_{5,10} - e_{6,8} \\
&\quad + e_{8,6} + e_{10,5} + e_{12,4} + e_{15,3} + e_{18,2} + e_{22,1} \\
e_{234321} &= e_{1,19} + e_{2,16} + e_{3,13} + e_{4,11} + e_{5,9} + e_{7,6} \\
&\quad + e_{6,7} + e_{9,5} + e_{11,4} + e_{13,3} + e_{16,2} + e_{19,1}
\end{aligned}$$

Таблица 11. Матрица знаков $V(\varpi_7)$: A_6 -нумерация



	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
1	0 + - + -	+ - + - +	+ - - + +	+ - - 0 +	+ 0 - 0 +	0 0 0
2	+ 0 + - +	- + - + -	- + + - -	0 + 0 + -	0 - 0 + 0	- + 0
3	- + 0 + -	+ - + - +	+ - 0 + 0	+ 0 - + 0	+ - - + 0	- 0 +
4	+ - + 0 +	- + - + -	0 0 + 0 -	+ + - + 0	+ - 0 + -	0 - +
5	- + - + 0	+ - + 0 0	+ - + 0 -	+ 0 - + +	0 - + 0 -	+ - +
6	+ - + - +	0 + 0 + 0	+ 0 + - 0	+ - 0 + +	- 0 + - -	+ - +
7	- + - + -	+ 0 0 0 +	0 + 0 - +	0 - + 0 +	- + + - -	+ - +
8	+ - + - +	0 0 0 + -	+ - + 0 -	+ 0 - + 0	0 - 0 0 0	0 0 0
9	- + - + 0	+ 0 + 0 +	+ 0 + - 0	+ - 0 + 0	- 0 0 - 0	0 0 0
10	+ - + - 0	0 + - + 0	0 + 0 - +	0 - + 0 0	- + 0 - 0	0 0 0
11	+ - + 0 +	+ 0 + + 0	0 + + + 0	+ 0 0 + -	0 0 - 0 0	- 0 0
12	- + - 0 -	0 + - 0 +	+ 0 0 + +	0 0 + 0 -	0 + - 0 0	- 0 0
13	- + 0 + +	+ 0 + + 0	+ 0 0 0 +	+ + 0 + +	0 0 0 0 -	0 - 0
14	+ - + 0 0	- - 0 - -	+ + 0 0 0	0 + 0 0 -	+ 0 - + 0	- 0 0
15	+ - 0 - -	0 + - 0 +	0 + + 0 0	0 + + 0 +	0 + 0 0 -	0 - 0
16	+ 0 + + +	+ 0 + + 0	+ 0 + 0 0	0 0 + + 0	+ 0 + 0 +	0 0 -
17	- + 0 + 0	- - 0 - -	0 0 + + +	0 0 0 0 +	+ 0 0 + -	0 - 0
18	- 0 - - -	0 + - 0 +	0 + 0 0 +	+ 0 0 0 0	+ + + 0 +	0 0 -
19	0 + + + +	+ 0 + + 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 0 0	0 + 0 + 0	+ + +
20	+ - 0 0 +	+ + 0 0 0	- - + - +	0 + 0 0 0	0 0 + 0 -	+ - 0
21	+ 0 + + 0	- - 0 - -	0 0 0 + 0	+ + + 0 0	0 0 + + +	0 0 -
22	0 - - - -	0 + - 0 +	0 + 0 0 +	0 0 + + 0	0 0 0 + 0	+ + +
23	- 0 - 0 +	+ + 0 0 0	- - 0 - 0	+ 0 + 0 +	+ 0 0 0 +	+ 0 -
24	0 + + + 0	- - 0 - -	0 0 0 + 0	0 + 0 + 0	+ + 0 0 0	+ + +
25	+ 0 0 - -	- - 0 0 0	0 0 - 0 -	+ - + 0 -	+ 0 + 0 0	0 + -
26	0 - - 0 +	+ + 0 0 0	- - 0 - 0	0 0 0 + +	0 + + + 0	0 + +
27	0 + 0 - -	- - 0 0 0	0 0 - 0 -	0 - 0 + -	0 + 0 + +	+ 0 +
28	0 0 + + +	+ + 0 0 0	0 0 0 0 0	- 0 - + 0	- + - + -	+ + 0

	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
$\frac{28}{27}$	- + 0 0 0	0 0 + + +	+ + - + -	0 - 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0
$\frac{27}{26}$	+ 0 + 0 0	0 0 + + +	+ + 0 + 0	- 0 - 0 0	- 0 + 0 0	0 0 0
$\frac{26}{25}$	- 0 0 + 0	0 0 - - -	0 0 + 0 +	- + - 0 0	- 0 0 0 +	0 0 0
$\frac{25}{24}$	0 + + 0 0	0 0 + + +	+ + 0 + 0	0 0 0 - 0	0 - 0 - 0	+ 0 0
$\frac{24}{23}$	+ 0 0 0 +	0 0 + 0 0	- - - 0 -	+ 0 + 0 +	0 0 - 0 +	0 0 0
$\frac{23}{22}$	0 - 0 + 0	0 0 - - -	0 0 + 0 +	0 + 0 - 0	0 - 0 - 0	0 + 0
$\frac{22}{21}$	- 0 0 0 0	+ 0 0 + 0	+ 0 + - 0	- - 0 0 -	+ 0 + 0 -	0 0 0
$\frac{21}{20}$	0 + 0 0 +	0 0 + 0 0	- - - 0 -	0 0 0 + +	0 + 0 0 0	- + 0
$\frac{20}{19}$	0 0 - - 0	0 0 + + +	0 0 0 0 0	+ 0 + - 0	+ - 0 - 0	0 0 +
$\frac{19}{18}$	+ 0 0 0 0	0 + 0 0 +	0 + 0 + +	0 + - 0 +	- 0 - 0 +	0 0 0
$\frac{18}{17}$	0 - 0 0 0	+ 0 0 + 0	+ 0 + - 0	0 - 0 - -	0 0 0 + 0	+ - 0
$\frac{17}{16}$	0 0 + 0 -	0 0 - 0 0	+ + 0 0 0	- 0 - + 0	0 + + 0 0	- 0 +
$\frac{16}{15}$	0 + 0 0 0	0 + 0 0 +	0 + 0 + +	0 + 0 0 +	0 - 0 - 0	- + 0
$\frac{15}{14}$	0 0 - 0 0	- 0 0 - 0	- 0 0 + 0	+ 0 0 - 0	- 0 - + 0	+ 0 -
$\frac{14}{13}$	0 0 0 + +	0 0 + 0 0	0 0 + 0 +	+ 0 + - 0	0 - 0 0 +	0 - +
$\frac{13}{12}$	0 0 + 0 0	0 - 0 0 -	0 - 0 - 0	0 0 + 0 0	+ - + - 0	- 0 +
$\frac{12}{11}$	0 0 0 - 0	+ 0 0 + 0	0 0 - 0 0	- + 0 + 0	+ 0 0 - -	0 + -
$\frac{11}{10}$	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 -	0 - - 0 0	- + 0 + +	0 - +
$\frac{10}{9}$	0 0 0 0 -	- 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 - +	0 0 + 0 +	- - +
$\frac{9}{8}$	0 0 0 0 +	0 - 0 0 0	0 + 0 0 +	0 0 + 0 -	0 - - 0 -	+ + -
$\frac{8}{7}$	0 0 0 0 0	+ + 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	+ 0 + - +	- - +
$\frac{7}{6}$	0 0 0 0 0	0 0 - - 0	- 0 - 0 0	- 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 0
$\frac{6}{5}$	0 0 0 0 0	0 0 + 0 -	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0
$\frac{5}{4}$	0 0 0 0 0	0 0 0 + +	0 0 0 - 0	0 - 0 0 0	- 0 0 + 0	0 0 0
$\frac{4}{3}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ + 0 + 0	0 0 0 0 -	0 0 - 0 0	+ 0 0
$\frac{3}{2}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 0 +	0 0 0 0 -	0 + 0
$\frac{2}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 + 0 +	0 0 +
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 + 0	+ + +

Таблица 12. Корневые элементы: A_6 -нумерация

$$\begin{aligned}
e_{1000000} &= e_{6,7} + e_{9,10} + e_{11,12} + e_{13,15} + e_{16,18} + e_{19,22} \\
&\quad + e_{22,19} + e_{18,16} + e_{15,13} + e_{12,11} + e_{10,9} + e_{7,6} \\
e_{0000000} &= e_{5,8} + e_{6,9} + e_{7,10} + e_{20,28} + e_{23,27} + e_{26,25} \\
&\quad + e_{25,26} + e_{27,23} + e_{28,20} + e_{10,7} + e_{9,6} + e_{8,5} \\
e_{0100000} &= e_{5,6} + e_{8,9} + e_{12,14} + e_{15,17} + e_{18,21} + e_{22,24} \\
&\quad + e_{24,22} + e_{21,18} + e_{17,15} + e_{14,12} + e_{9,8} + e_{6,5} \\
e_{0010000} &= e_{4,5} + e_{9,11} + e_{10,12} + e_{17,20} + e_{21,23} + e_{24,26} \\
&\quad + e_{26,24} + e_{23,21} + e_{20,17} + e_{12,10} + e_{11,9} + e_{5,4} \\
e_{0000100} &= e_{3,4} + e_{11,13} + e_{12,15} + e_{14,17} + e_{23,25} + e_{26,27} \\
&\quad + e_{27,26} + e_{25,23} + e_{17,14} + e_{15,12} + e_{13,11} + e_{4,3} \\
e_{0000010} &= e_{2,3} + e_{13,16} + e_{15,18} + e_{17,21} + e_{20,23} + e_{27,28} \\
&\quad + e_{28,27} + e_{23,20} + e_{21,17} + e_{18,15} + e_{16,13} + e_{3,2} \\
e_{0000001} &= e_{1,2} + e_{16,19} + e_{18,22} + e_{21,24} + e_{23,26} + e_{25,27} \\
&\quad + e_{27,25} + e_{26,23} + e_{24,21} + e_{22,18} + e_{19,16} + e_{2,1} \\
e_{1100000} &= -e_{5,7} - e_{8,10} + e_{11,14} + e_{13,17} + e_{16,21} + e_{19,24} \\
&\quad - e_{24,19} - e_{21,16} - e_{17,13} - e_{14,11} + e_{10,8} + e_{7,5} \\
e_{0010000} &= -e_{4,8} + e_{6,11} + e_{7,12} - e_{17,28} - e_{21,27} - e_{24,25} \\
&\quad + e_{25,24} + e_{27,21} + e_{28,17} - e_{12,7} - e_{11,6} + e_{8,4} \\
e_{0110000} &= -e_{4,6} + e_{8,11} - e_{10,14} + e_{15,20} + e_{18,23} + e_{22,26} \\
&\quad - e_{26,22} - e_{23,18} - e_{20,15} + e_{14,10} - e_{11,8} + e_{6,4} \\
e_{0011000} &= -e_{3,5} + e_{9,13} + e_{10,15} - e_{14,20} + e_{21,25} + e_{24,27} \\
&\quad - e_{27,24} - e_{25,21} + e_{20,14} - e_{15,10} - e_{13,9} + e_{5,3} \\
e_{0000110} &= -e_{2,4} + e_{11,16} + e_{12,18} + e_{14,21} - e_{20,25} + e_{26,28} \\
&\quad - e_{28,26} + e_{25,20} - e_{21,14} - e_{18,12} - e_{16,11} + e_{4,2} \\
e_{0000011} &= -e_{1,3} + e_{13,19} + e_{15,22} + e_{17,24} + e_{20,26} - e_{25,28} \\
&\quad + e_{28,25} - e_{26,20} - e_{24,17} - e_{22,15} - e_{19,13} + e_{3,1}
\end{aligned}$$

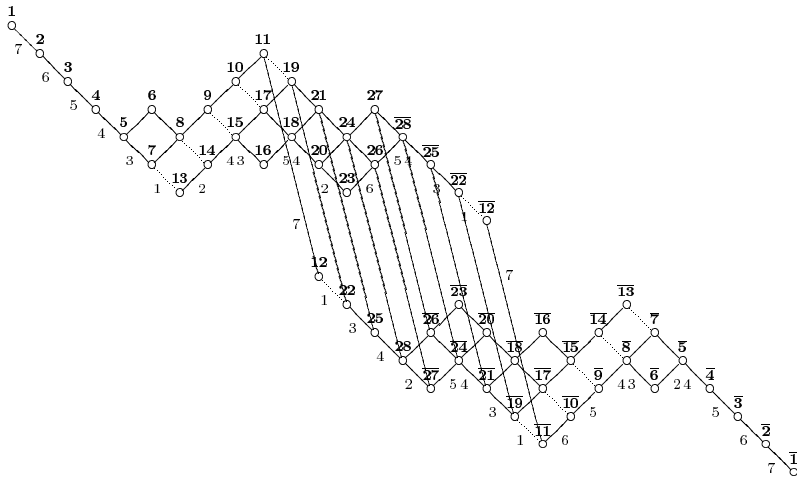
$$\begin{aligned}
e_{111000} &= e_{4,7} - e_{8,12} - e_{9,14} + e_{13,20} + e_{16,23} + e_{19,26} \\
&\quad + e_{26,19} + e_{23,16} + e_{20,13} - e_{14,9} - e_{12,8} + e_{7,4} \\
e_{011000} &= e_{4,9} + e_{5,11} - e_{7,14} - e_{15,28} - e_{18,27} - e_{22,25} \\
&\quad - e_{25,22} - e_{27,18} - e_{28,15} - e_{14,7} + e_{11,5} + e_{9,4} \\
e_{001100} &= e_{3,8} + e_{6,13} + e_{7,15} + e_{14,28} - e_{21,26} - e_{24,23} \\
&\quad - e_{23,24} - e_{26,21} + e_{28,14} + e_{15,7} + e_{13,6} + e_{8,3} \\
e_{011100} &= e_{3,6} + e_{8,13} - e_{10,17} - e_{12,20} + e_{18,25} + e_{22,27} \\
&\quad + e_{27,22} + e_{25,18} - e_{20,12} - e_{17,10} + e_{13,8} + e_{6,3} \\
e_{001110} &= e_{2,5} + e_{9,16} + e_{10,18} - e_{14,23} - e_{17,25} + e_{24,28} \\
&\quad + e_{28,24} - e_{25,17} - e_{23,14} + e_{18,10} + e_{16,9} + e_{5,2} \\
e_{000111} &= e_{1,4} + e_{11,19} + e_{12,22} + e_{14,24} - e_{20,27} - e_{23,28} \\
&\quad - e_{28,23} - e_{27,20} + e_{24,14} + e_{22,12} + e_{19,11} + e_{4,1} \\
e_{111000} &= -e_{4,10} - e_{5,12} - e_{6,14} - e_{13,28} - e_{16,27} - e_{19,25} \\
&\quad + e_{25,19} + e_{27,16} + e_{28,13} + e_{14,6} + e_{12,5} + e_{10,4} \\
e_{111100} &= -e_{3,7} - e_{8,15} - e_{9,17} - e_{11,20} + e_{16,25} + e_{19,27} \\
&\quad - e_{27,19} - e_{25,16} + e_{20,11} + e_{17,9} + e_{15,8} + e_{7,3} \\
e_{011100} &= -e_{3,9} + e_{5,13} - e_{7,17} + e_{12,28} - e_{18,26} - e_{22,23} \\
&\quad + e_{23,22} + e_{26,18} - e_{28,12} + e_{17,7} - e_{13,5} + e_{9,3} \\
e_{001110} &= -e_{2,8} + e_{6,16} + e_{7,18} + e_{14,27} + e_{17,26} - e_{24,20} \\
&\quad + e_{20,24} - e_{26,17} - e_{27,14} - e_{18,7} - e_{16,6} + e_{8,2} \\
e_{011110} &= -e_{2,6} + e_{8,16} - e_{10,21} - e_{12,23} - e_{15,25} + e_{22,28} \\
&\quad - e_{28,22} + e_{25,15} + e_{23,12} + e_{21,10} - e_{16,8} + e_{6,2} \\
e_{000111} &= -e_{1,5} + e_{9,19} + e_{10,22} - e_{14,26} - e_{17,27} - e_{21,28} \\
&\quad + e_{28,21} + e_{27,17} + e_{26,14} - e_{22,10} - e_{19,9} + e_{5,1} \\
e_{111100} &= e_{3,10} - e_{5,15} - e_{6,17} + e_{11,28} - e_{16,26} - e_{19,23} \\
&\quad - e_{23,19} - e_{26,16} + e_{28,11} - e_{17,6} - e_{15,5} + e_{10,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{1111110} &= e_{2,7} - e_{8,18} - e_{9,21} - e_{11,23} - e_{13,25} + e_{19,28} \\
&\quad + e_{28,19} - e_{25,13} - e_{23,11} - e_{21,9} - e_{18,8} + e_{7,2} \\
e_{012100} &= e_{3,11} + e_{4,13} + e_{7,20} + e_{10,28} + e_{18,24} + e_{22,21} \\
&\quad + e_{21,22} + e_{24,18} + e_{28,10} + e_{20,7} + e_{13,4} + e_{11,3} \\
e_{0111110} &= e_{2,9} + e_{5,16} - e_{7,21} + e_{12,27} + e_{15,26} - e_{22,20} \\
&\quad - e_{20,22} + e_{26,15} + e_{27,12} - e_{21,7} + e_{16,5} + e_{9,2} \\
e_{0011111} &= e_{1,8} + e_{6,19} + e_{7,22} + e_{14,25} + e_{17,23} + e_{21,20} \\
&\quad + e_{20,21} + e_{23,17} + e_{25,14} + e_{22,7} + e_{19,6} + e_{8,1} \\
e_{0111111} &= e_{1,6} + e_{8,19} - e_{10,24} - e_{12,26} - e_{15,27} - e_{18,28} \\
&\quad - e_{28,18} - e_{27,15} - e_{26,12} - e_{24,10} + e_{19,8} + e_{6,1} \\
e_{112100} &= -e_{3,12} - e_{4,15} + e_{6,20} + e_{9,28} + e_{16,24} + e_{19,21} \\
&\quad - e_{21,19} - e_{24,16} - e_{28,9} - e_{20,6} + e_{15,4} + e_{12,3} \\
e_{1111110} &= -e_{2,10} - e_{5,18} - e_{6,21} + e_{11,27} + e_{13,26} - e_{19,20} \\
&\quad + e_{20,19} - e_{26,13} - e_{27,11} + e_{21,6} + e_{18,5} + e_{10,2} \\
e_{1111111} &= -e_{1,7} - e_{8,22} - e_{9,24} - e_{11,26} - e_{13,27} - e_{16,28} \\
&\quad + e_{28,16} + e_{27,13} + e_{26,11} + e_{24,9} + e_{22,8} + e_{7,1} \\
e_{0121110} &= -e_{2,11} + e_{4,16} + e_{7,23} + e_{10,27} - e_{15,24} + e_{22,17} \\
&\quad - e_{17,22} + e_{24,15} - e_{27,10} - e_{23,7} - e_{16,4} + e_{11,2} \\
e_{0111111} &= -e_{1,9} + e_{5,19} - e_{7,24} + e_{12,25} + e_{15,23} + e_{18,20} \\
&\quad - e_{20,18} - e_{23,15} - e_{25,12} + e_{24,7} - e_{19,5} + e_{9,1} \\
e_{122100} &= e_{3,14} + e_{4,17} + e_{5,20} + e_{8,28} - e_{16,22} - e_{19,18} \\
&\quad - e_{18,19} - e_{22,16} + e_{28,8} + e_{20,5} + e_{17,4} + e_{14,3} \\
e_{1121110} &= e_{2,12} - e_{4,18} + e_{6,23} + e_{9,27} - e_{13,24} + e_{19,17} \\
&\quad + e_{17,19} - e_{24,13} + e_{27,9} + e_{23,6} - e_{18,4} + e_{12,2} \\
e_{1111111} &= e_{1,10} - e_{5,22} - e_{6,24} + e_{11,25} + e_{13,23} + e_{16,20} \\
&\quad + e_{20,16} + e_{23,13} + e_{25,11} - e_{24,6} - e_{22,5} + e_{10,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{012210} &= e_{2,13} + e_{3,16} - e_{7,25} - e_{10,\overline{26}} - e_{12,\overline{24}} - e_{22,\overline{14}} \\
&\quad - e_{14,\overline{22}} - e_{24,\overline{12}} - e_{26,\overline{10}} - e_{25,\overline{7}} + e_{16,\overline{3}} + e_{13,\overline{2}} \\
e_{012111} &= e_{1,11} + e_{4,19} + e_{7,26} + e_{10,\overline{25}} - e_{15,\overline{21}} - e_{18,\overline{17}} \\
&\quad - e_{17,\overline{18}} - e_{21,\overline{15}} + e_{25,\overline{10}} + e_{26,\overline{7}} + e_{19,\overline{4}} + e_{11,\overline{1}} \\
e_{122110} &= -e_{2,14} + e_{4,21} + e_{5,23} + e_{8,\overline{27}} + e_{13,\overline{22}} - e_{19,\overline{15}} \\
&\quad + e_{15,\overline{19}} - e_{22,\overline{13}} - e_{27,\overline{8}} - e_{23,\overline{5}} - e_{21,\overline{4}} + e_{14,\overline{2}} \\
e_{112210} &= -e_{2,15} - e_{3,18} - e_{6,25} - e_{9,\overline{26}} - e_{11,\overline{24}} - e_{19,\overline{14}} \\
&\quad + e_{14,\overline{19}} + e_{24,\overline{11}} + e_{26,\overline{9}} + e_{25,\overline{6}} + e_{18,\overline{3}} + e_{15,\overline{2}} \\
e_{112111} &= -e_{1,12} - e_{4,22} + e_{6,26} + e_{9,\overline{25}} - e_{13,\overline{21}} - e_{16,\overline{17}} \\
&\quad + e_{17,\overline{16}} + e_{21,\overline{13}} - e_{25,\overline{9}} - e_{26,\overline{6}} + e_{22,\overline{4}} + e_{12,\overline{1}} \\
e_{012211} &= -e_{1,13} + e_{3,19} - e_{7,27} - e_{10,\overline{23}} - e_{12,\overline{21}} + e_{18,\overline{14}} \\
&\quad - e_{14,\overline{18}} + e_{21,\overline{12}} + e_{23,\overline{10}} + e_{27,\overline{7}} - e_{19,\overline{3}} + e_{13,\overline{1}} \\
e_{122210} &= e_{2,17} + e_{3,21} - e_{5,25} - e_{8,\overline{26}} + e_{11,\overline{22}} + e_{19,\overline{12}} \\
&\quad + e_{12,\overline{19}} + e_{22,\overline{11}} - e_{26,\overline{8}} - e_{25,\overline{5}} + e_{21,\overline{3}} + e_{17,\overline{2}} \\
e_{122111} &= e_{1,14} + e_{4,24} + e_{5,26} + e_{8,\overline{25}} + e_{13,\overline{18}} + e_{16,\overline{15}} \\
&\quad + e_{15,\overline{16}} + e_{18,\overline{13}} + e_{25,\overline{8}} + e_{26,\overline{5}} + e_{24,\overline{4}} + e_{14,\overline{1}} \\
e_{112211} &= e_{1,15} - e_{3,22} - e_{6,27} - e_{9,\overline{23}} - e_{11,\overline{21}} + e_{16,\overline{14}} \\
&\quad + e_{14,\overline{16}} - e_{21,\overline{11}} - e_{23,\overline{9}} - e_{27,\overline{6}} - e_{22,\overline{3}} + e_{15,\overline{1}} \\
e_{012221} &= e_{1,16} + e_{2,19} + e_{7,28} + e_{10,\overline{20}} + e_{12,\overline{17}} + e_{15,\overline{14}} \\
&\quad + e_{14,\overline{15}} + e_{17,\overline{12}} + e_{20,\overline{10}} + e_{28,\overline{7}} + e_{19,\overline{2}} + e_{16,\overline{1}} \\
e_{123210} &= -e_{2,20} - e_{3,23} - e_{4,25} + e_{8,\overline{24}} + e_{9,\overline{22}} - e_{19,\overline{10}} \\
&\quad + e_{10,\overline{19}} - e_{22,\overline{9}} - e_{24,\overline{8}} + e_{25,\overline{4}} + e_{23,\overline{3}} + e_{20,\overline{2}} \\
e_{122211} &= -e_{1,17} + e_{3,24} - e_{5,27} - e_{8,\overline{23}} + e_{11,\overline{18}} - e_{16,\overline{12}} \\
&\quad + e_{12,\overline{16}} - e_{18,\overline{11}} + e_{23,\overline{8}} + e_{27,\overline{5}} - e_{24,\overline{3}} + e_{17,\overline{1}} \\
e_{112221} &= -e_{1,18} - e_{2,22} + e_{6,28} + e_{9,\overline{20}} + e_{11,\overline{17}} + e_{13,\overline{14}} \\
&\quad - e_{14,\overline{13}} - e_{17,\overline{11}} - e_{20,\overline{9}} - e_{28,\overline{6}} + e_{22,\overline{2}} + e_{18,\overline{1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{123210} &= e_{2,28} + e_{3,27} + e_{4,26} + e_{5,24} + e_{6,22} + e_{19,7} \\
&\quad + e_{7,19} + e_{22,6} + e_{24,5} + e_{26,4} + e_{27,3} + e_{28,2} \\
e_{123211} &= e_{1,20} - e_{3,26} - e_{4,27} + e_{8,21} + e_{9,18} + e_{16,10} \\
&\quad + e_{10,16} + e_{18,9} + e_{21,8} - e_{27,4} - e_{26,3} + e_{20,1} \\
e_{122221} &= e_{1,21} + e_{2,24} + e_{5,28} + e_{8,20} - e_{11,15} - e_{13,12} \\
&\quad - e_{12,13} - e_{15,11} + e_{20,8} + e_{28,5} + e_{24,2} + e_{21,1} \\
e_{123211} &= -e_{1,28} + e_{3,25} + e_{4,23} + e_{5,21} + e_{6,18} - e_{16,7} \\
&\quad + e_{7,16} - e_{18,6} - e_{21,5} - e_{23,4} - e_{25,3} + e_{28,1} \\
e_{123221} &= -e_{1,23} - e_{2,26} + e_{4,28} - e_{8,17} - e_{9,15} + e_{13,10} \\
&\quad - e_{10,13} + e_{15,9} + e_{17,8} - e_{28,4} + e_{26,2} + e_{23,1} \\
e_{123221} &= e_{1,27} + e_{2,25} - e_{4,20} - e_{5,17} - e_{6,15} - e_{13,7} \\
&\quad - e_{7,13} - e_{15,6} - e_{17,5} - e_{20,4} + e_{25,2} + e_{27,1} \\
e_{123321} &= e_{1,25} + e_{2,27} + e_{3,28} + e_{8,14} + e_{9,12} + e_{11,10} \\
&\quad + e_{10,11} + e_{12,9} + e_{14,8} + e_{28,3} + e_{27,2} + e_{25,1} \\
e_{123321} &= -e_{1,26} - e_{2,23} - e_{3,20} + e_{5,14} + e_{6,12} - e_{11,7} \\
&\quad + e_{7,11} - e_{12,6} - e_{14,5} + e_{20,3} + e_{23,2} + e_{26,1} \\
e_{124321} &= e_{1,24} + e_{2,21} + e_{3,17} + e_{4,14} - e_{6,10} - e_{9,7} \\
&\quad - e_{7,9} - e_{10,6} + e_{14,4} + e_{17,3} + e_{21,2} + e_{24,1} \\
e_{134321} &= -e_{1,22} - e_{2,18} - e_{3,15} - e_{4,12} - e_{5,10} - e_{8,7} \\
&\quad + e_{7,8} + e_{10,5} + e_{12,4} + e_{15,3} + e_{18,2} + e_{22,1} \\
e_{234321} &= e_{1,19} + e_{2,16} + e_{3,13} + e_{4,11} + e_{5,9} + e_{6,8} \\
&\quad + e_{8,6} + e_{9,5} + e_{11,4} + e_{13,3} + e_{16,2} + e_{19,1}
\end{aligned}$$

Таблица 13. Матрица знаков $V(\varpi_7)$: D_6 -нумерация



	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
1	0 + - + -	+ + - + -	+ 0 - + -	+ + - - +	+ 0 - - 0	+ + 0
2	+ 0 + - +	- - + - +	0 + + - +	- - + 0 -	0 - + 0 +	0 0 -
3	- + 0 + -	+ + - + 0	+ + - + -	+ 0 0 - 0	+ - 0 - +	+ 0 -
4	+ - + 0 +	- - + 0 +	+ + + - 0	0 - + - 0	+ - 0 0 +	0 - 0
5	- + - + 0	+ + 0 + +	+ + - 0 -	0 - 0 - +	0 - 0 + 0	0 - +
6	+ - + - +	0 0 + + +	+ + 0 - -	0 - 0 - 0	0 - + 0 0	+ 0 0
7	+ - + - +	0 0 + + +	+ + + 0 0	- 0 - 0 +	- 0 0 + -	0 - +
8	- + - + 0	+ + 0 + +	+ + 0 + 0	- 0 - 0 0	- 0 + 0 -	+ 0 0
9	+ - + 0 +	+ + + 0 +	+ + 0 0 +	+ 0 0 0 -	0 0 + - 0	+ 0 -
10	- + 0 + +	+ + + + 0	+ + 0 0 0	0 + + 0 +	0 0 - 0 0	0 - 0
11	+ 0 + + +	+ + + + +	0 + 0 0 0	0 0 0 + 0	+ 0 0 + 0	- + 0
12	0 + + + +	+ + + + +	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0 0 +	0 0 +
13	- + - + -	0 + 0 0 0	0 0 0 + +	- + - + +	- + 0 + -	0 - +
14	+ - + - 0	- 0 + 0 0	0 0 + 0 +	- + - + 0	- + + 0 -	+ 0 0
15	- + - 0 -	- 0 0 + 0	0 0 + + 0	+ + 0 + -	0 + + - 0	+ 0 -
16	+ - + 0 0	0 - - + 0	0 0 - - +	0 0 + 0 -	+ 0 + - +	+ 0 -
17	+ - 0 - -	- 0 0 0 +	0 0 + + +	0 0 + + +	0 + - 0 0	0 - 0
18	- + 0 + 0	0 - - 0 +	0 0 - - 0	+ + 0 0 +	+ 0 - 0 +	0 - 0
19	- 0 - - -	- 0 0 0 0	+ 0 + + +	0 + 0 0 0	+ + 0 + 0	- + 0
20	+ - 0 0 +	0 + 0 - +	0 0 + 0 -	- + + 0 0	0 0 + + 0	0 - +
21	+ 0 + + 0	0 - - 0 0	+ 0 - - 0	+ 0 + + 0	0 0 0 + +	- + 0
22	0 - - - -	- 0 0 0 0	0 + + + +	0 + 0 + 0	0 0 0 0 +	0 0 +
23	- + 0 0 0	+ 0 + + -	0 0 0 + +	+ - - 0 +	0 0 0 0 0	+ 0 0
24	- 0 - 0 +	0 + 0 - 0	+ 0 + 0 -	- 0 0 + +	+ 0 0 0 0	+ + +
25	0 + + + 0	0 - - 0 0	0 + - - 0	+ 0 + 0 0	+ + 0 0 0	0 0 +
26	+ 0 + 0 0	+ 0 + + 0	- 0 0 + +	+ 0 0 - 0	- 0 + + 0	0 0 0
27	+ 0 0 - -	0 - 0 0 -	+ 0 - 0 0	0 - - + -	+ 0 0 + 0	0 0 0
28	0 - - 0 +	0 + 0 - 0	0 + + 0 -	- 0 0 0 +	0 + 0 + +	0 0 0

	$\bar{2}$ 8	$\bar{2}$ 7	$\bar{2}$ 6	$\bar{2}$ 5	$\bar{2}$ 4	$\bar{2}$ 3	$\bar{2}$ 2	$\bar{2}$ 1	$\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ 9	$\bar{1}$ 8	$\bar{1}$ 7	$\bar{1}$ 6	$\bar{1}$ 5	$\bar{1}$ 4	$\bar{1}$ 3	$\bar{1}$ 2	$\bar{1}$ 1	$\bar{1}$ 0	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	
1	-	0	0	+	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	+	+	0	-	0	0	+	0	-	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	+	0	0	0	+	0	0	-	0	+	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	+	0	-	0	+	+	0	0	-	0	0	+	-	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-	+	0	+	0	+	0	0	-	0	+	0	-	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0
6	-	+	0	+	-	0	0	+	+	0	-	0	+	0	0	-	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0
7	0	0	-	0	0	+	+	0	0	+	0	-	0	+	-	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
8	-	+	0	0	-	0	+	0	+	+	0	-	0	+	0	-	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	0	0
9	0	+	0	-	0	0	+	-	0	+	+	-	0	0	0	+	-	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0
10	+	0	-	-	+	0	+	-	0	+	0	0	+	-	+	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0
11	-	0	0	+	0	-	-	0	+	0	-	+	+	-	+	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0
12	0	-	+	0	-	+	0	+	-	-	+	-	-	+	-	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0
13	0	0	-	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	-	+	-	0	+	0	0	0	0	0	0
14	-	+	0	0	-	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0	0	+	+	-	+	0	-	0	+	0	0	0	0	0
15	0	+	0	-	0	0	0	-	0	0	+	0	0	0	0	0	+	+	-	0	+	-	0	0	+	0	0	0	0
16	0	+	0	0	0	0	-	0	0	-	0	+	0	0	0	0	+	+	-	0	0	+	-	+	0	0	0	0	0
17	+	0	-	-	+	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	0	-	+	-	0	0	0	+	0	0	0
18	+	0	-	0	+	0	-	0	0	-	0	0	0	+	0	0	+	+	0	-	0	0	+	-	0	+	0	0	0
19	-	0	0	+	0	-	0	0	+	0	-	0	+	0	0	0	-	0	+	-	+	-	0	0	0	0	+	0	0
20	0	0	-	+	0	0	-	+	0	-	0	0	0	0	+	0	+	+	0	0	-	0	+	0	-	+	0	0	0
21	-	0	0	0	0	-	+	0	+	0	0	-	0	+	0	0	-	0	+	-	0	0	+	-	0	0	+	0	0
22	0	-	+	0	-	+	0	+	-	0	+	0	0	0	0	0	0	-	+	-	+	0	0	0	0	0	0	+	0
23	-	+	0	+	-	0	-	+	0	-	0	0	0	0	0	+	+	+	0	0	0	-	0	+	-	+	0	0	0
24	0	0	0	-	0	-	+	0	0	0	+	+	-	0	0	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	0
25	0	-	+	0	-	+	0	0	-	+	0	+	0	-	0	0	-	-	+	0	0	-	+	0	0	0	0	+	0
26	+	+	0	-	0	0	+	0	-	0	+	0	0	0	+	+	-	0	+	0	0	-	0	+	-	0	+	0	0
27	+	0	+	+	0	-	-	0	0	0	0	0	+	-	+	0	+	0	0	+	-	0	+	0	0	-	+	0	0
28	0	+	+	0	0	+	0	-	0	+	-	+	0	0	-	0	0	-	0	-	0	+	-	0	+	0	0	+	0

	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
$\frac{28}{27}$	- 0 0 + 0	- 0 - 0 +	- 0 0 - 0	0 + + - 0	- 0 - 0 0	+ + 0
$\frac{27}{26}$	0 + + 0 0	+ 0 + + 0	0 - 0 + +	+ 0 0 0 0	0 - + 0 -	+ 0 +
$\frac{26}{25}$	0 + 0 - -	0 - 0 0 -	0 + - 0 0	0 - - 0 -	0 + 0 0 +	0 + +
$\frac{25}{24}$	+ 0 0 0 +	+ 0 0 - -	+ 0 0 0 -	0 - 0 + +	0 0 + - 0	- + 0
$\frac{24}{23}$	0 - 0 + 0	- 0 - 0 +	0 - 0 - 0	0 + + 0 0	0 - - 0 -	0 0 0
$\frac{23}{22}$	0 0 + + +	0 + 0 0 0	- + + 0 0	0 0 0 - 0	- + 0 - +	0 - +
$\frac{22}{21}$	- 0 0 0 0	0 + + + +	- 0 0 0 0	- 0 - 0 -	+ 0 - + 0	+ - 0
$\frac{21}{20}$	0 + 0 0 +	+ 0 0 - -	0 + 0 0 -	0 - 0 0 +	0 + + 0 0	0 0 -
$\frac{20}{19}$	0 0 - - 0	+ 0 + 0 0	+ - 0 + 0	0 0 0 + 0	+ - 0 0 -	- 0 0
$\frac{19}{18}$	0 - 0 0 0	0 + + + +	0 - 0 0 0	- 0 - 0 -	0 0 - 0 +	0 0 +
$\frac{18}{17}$	0 0 + 0 -	- 0 0 + 0	- + 0 0 +	0 0 0 - 0	0 + 0 + 0	+ 0 -
$\frac{17}{16}$	0 0 - 0 0	0 - - - 0	+ - 0 0 0	+ 0 0 0 0	- 0 0 - +	- 0 +
$\frac{16}{15}$	0 0 0 + +	+ 0 0 0 +	+ - 0 0 0	0 + 0 + 0	0 - 0 0 0	0 + 0
$\frac{15}{14}$	0 0 0 - 0	0 + + 0 -	- + 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 0 0 -	0 - 0
$\frac{14}{13}$	0 0 0 0 -	0 - 0 + +	+ - 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 + 0	0 + -
$\frac{13}{12}$	0 0 0 0 0	- 0 - - -	- + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 0
$\frac{12}{11}$	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + + +	+ + + - +	- 0 + - 0	- + 0
$\frac{11}{10}$	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + + +	+ + + 0 +	0 - + 0 -	0 0 -
$\frac{10}{9}$	0 0 + 0 0	0 0 0 0 0	0 0 - - -	- 0 0 + 0	+ - 0 + -	+ 0 -
$\frac{9}{8}$	0 0 0 + 0	0 0 0 0 0	0 0 + + 0	0 - - - 0	- + 0 0 +	0 + 0
$\frac{8}{7}$	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 - 0 +	0 + 0 + -	0 - 0 - 0	0 - +
$\frac{7}{6}$	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 - -	0 - 0 - 0	0 + - 0 0	- 0 0
$\frac{6}{5}$	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	0 0 + 0 0	+ 0 + 0 +	+ 0 0 + -	0 + -
$\frac{5}{4}$	0 0 0 0 0	0 0 + 0 0	0 0 0 + 0	- 0 - 0 0	- 0 + 0 +	+ 0 0
$\frac{4}{3}$	0 0 0 0 0	0 0 0 + 0	0 0 0 0 +	+ 0 0 0 -	0 0 - - 0	- 0 +
$\frac{3}{2}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 +	0 0 0 0 0	0 + + 0 +	0 0 + 0 0	0 - 0
$\frac{2}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 + 0	+ 0 0 + 0	+ + 0
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0 0 0	0 0 0 0 0	0 + 0 0 +	0 0 +

Таблица 14. Корневые элементы: D_6 -нумерация

$$\begin{aligned}
e_{100000} &= e_{7,13} + e_{8,14} + e_{9,15} + e_{10,17} + e_{11,19} + e_{12,22} \\
&\quad + e_{22,12} + e_{19,11} + e_{17,10} + e_{15,9} + e_{14,8} + e_{13,7} \\
e_{000000} &= e_{5,6} + e_{7,8} + e_{13,14} + e_{20,23} + e_{24,26} + e_{28,27} \\
&\quad + e_{27,28} + e_{26,24} + e_{23,20} + e_{14,13} + e_{8,7} + e_{6,5} \\
e_{010000} &= e_{5,7} + e_{6,8} + e_{15,16} + e_{17,18} + e_{19,21} + e_{22,25} \\
&\quad + e_{25,22} + e_{21,19} + e_{18,17} + e_{16,15} + e_{8,6} + e_{7,5} \\
e_{001000} &= e_{4,5} + e_{8,9} + e_{14,15} + e_{18,20} + e_{21,24} + e_{25,28} \\
&\quad + e_{28,25} + e_{24,21} + e_{20,18} + e_{15,14} + e_{9,8} + e_{5,4} \\
e_{000100} &= e_{3,4} + e_{9,10} + e_{15,17} + e_{16,18} + e_{24,27} + e_{28,26} \\
&\quad + e_{26,28} + e_{27,24} + e_{18,16} + e_{17,15} + e_{10,9} + e_{4,3} \\
e_{000010} &= e_{2,3} + e_{10,11} + e_{17,19} + e_{18,21} + e_{20,24} + e_{26,23} \\
&\quad + e_{23,26} + e_{24,20} + e_{21,18} + e_{19,17} + e_{11,10} + e_{3,2} \\
e_{000001} &= e_{1,2} + e_{11,12} + e_{19,22} + e_{21,25} + e_{24,28} + e_{27,26} \\
&\quad + e_{26,27} + e_{28,24} + e_{25,21} + e_{22,19} + e_{12,11} + e_{2,1} \\
e_{110000} &= -e_{5,13} - e_{6,14} + e_{9,16} + e_{10,18} + e_{11,21} + e_{12,25} \\
&\quad - e_{25,12} - e_{21,11} - e_{18,10} - e_{16,9} + e_{14,8} + e_{13,5} \\
e_{001000} &= -e_{4,6} + e_{7,9} + e_{13,15} - e_{18,23} - e_{21,26} - e_{25,27} \\
&\quad + e_{27,25} + e_{26,21} + e_{23,18} - e_{15,13} - e_{9,7} + e_{6,4} \\
e_{011000} &= -e_{4,7} + e_{6,9} - e_{14,16} + e_{17,20} + e_{19,24} + e_{22,28} \\
&\quad - e_{28,22} - e_{24,19} - e_{20,17} + e_{16,14} - e_{9,6} + e_{7,4} \\
e_{001100} &= -e_{3,5} + e_{8,10} + e_{14,17} - e_{16,20} + e_{21,27} + e_{25,26} \\
&\quad - e_{26,25} - e_{27,21} + e_{20,16} - e_{17,14} - e_{10,8} + e_{5,3} \\
e_{000110} &= -e_{2,4} + e_{9,11} + e_{15,19} + e_{16,21} - e_{20,27} + e_{28,23} \\
&\quad - e_{23,28} + e_{27,20} - e_{21,16} - e_{19,15} - e_{11,9} + e_{4,2} \\
e_{000011} &= -e_{1,3} + e_{10,12} + e_{17,22} + e_{18,25} + e_{20,28} - e_{27,23} \\
&\quad + e_{23,27} - e_{28,20} - e_{25,18} - e_{22,17} - e_{12,10} + e_{3,1}
\end{aligned}$$

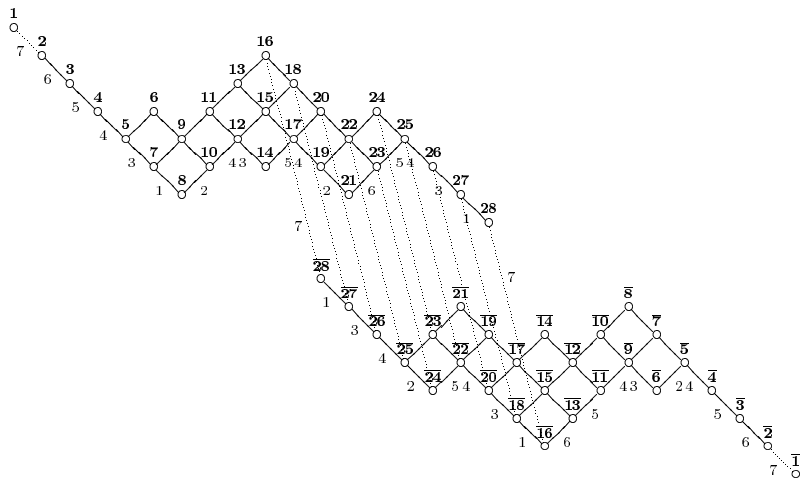
$$\begin{aligned}
e_{111000} &= e_{4,13} - e_{6,15} - e_{8,16} + e_{10,20} + e_{11,24} + e_{12,28} \\
&\quad + e_{\overline{28,12}} + e_{\overline{24,11}} + e_{\overline{20,10}} - e_{\overline{16,8}} - e_{\overline{15,6}} + e_{\overline{13,4}} \\
e_{011000} &= e_{4,8} + e_{5,9} - e_{13,16} - e_{17,23} - e_{19,26} - e_{22,27} \\
&\quad - e_{27,22} - e_{\overline{26,19}} - e_{\overline{23,17}} - e_{\overline{16,13}} + e_{\overline{9,5}} + e_{\overline{8,4}} \\
e_{001100} &= e_{3,6} + e_{7,10} + e_{13,17} + e_{16,23} - e_{21,28} - e_{25,24} \\
&\quad - e_{24,25} - e_{28,21} + e_{\overline{23,16}} + e_{\overline{17,13}} + e_{\overline{10,7}} + e_{\overline{8,3}} \\
e_{011100} &= e_{3,7} + e_{6,10} - e_{14,18} - e_{15,20} + e_{19,27} + e_{22,26} \\
&\quad + e_{26,22} + e_{\overline{27,19}} - e_{\overline{20,15}} - e_{\overline{18,14}} + e_{\overline{10,6}} + e_{\overline{7,3}} \\
e_{001110} &= e_{2,5} + e_{8,11} + e_{14,19} - e_{16,24} - e_{18,27} + e_{25,23} \\
&\quad + e_{23,25} - e_{\overline{27,18}} - e_{\overline{24,16}} + e_{\overline{19,14}} + e_{\overline{11,8}} + e_{\overline{5,2}} \\
e_{000111} &= e_{1,4} + e_{9,12} + e_{15,22} + e_{16,25} - e_{20,26} - e_{24,23} \\
&\quad - e_{23,24} - e_{26,20} + e_{\overline{25,16}} + e_{\overline{22,15}} + e_{\overline{12,9}} + e_{\overline{4,1}} \\
e_{111000} &= -e_{4,14} - e_{5,15} - e_{7,16} - e_{10,23} - e_{11,26} - e_{12,27} \\
&\quad + e_{27,12} + e_{\overline{26,11}} + e_{\overline{23,10}} + e_{\overline{16,7}} + e_{\overline{15,5}} + e_{\overline{14,4}} \\
e_{111100} &= -e_{3,13} - e_{6,17} - e_{8,18} - e_{9,20} + e_{11,27} + e_{12,26} \\
&\quad - e_{26,12} - e_{\overline{27,11}} + e_{\overline{20,9}} + e_{\overline{18,8}} + e_{\overline{17,6}} + e_{\overline{13,3}} \\
e_{011100} &= -e_{3,8} + e_{5,10} - e_{13,18} + e_{15,23} - e_{19,28} - e_{22,24} \\
&\quad + e_{24,22} + e_{28,19} - e_{\overline{23,15}} + e_{\overline{18,13}} - e_{\overline{10,5}} + e_{\overline{8,3}} \\
e_{001110} &= -e_{2,6} + e_{7,11} + e_{13,19} + e_{16,26} + e_{18,28} - e_{25,20} \\
&\quad + e_{20,25} - e_{28,18} - e_{\overline{26,16}} - e_{\overline{19,13}} - e_{\overline{11,7}} + e_{\overline{6,2}} \\
e_{011110} &= -e_{2,7} + e_{6,11} - e_{14,21} - e_{15,24} - e_{17,27} + e_{22,23} \\
&\quad - e_{23,22} + e_{\overline{27,17}} + e_{\overline{24,15}} + e_{\overline{21,14}} - e_{\overline{11,6}} + e_{\overline{7,2}} \\
e_{001111} &= -e_{1,5} + e_{8,12} + e_{14,22} - e_{16,28} - e_{18,26} - e_{21,23} \\
&\quad + e_{23,21} + e_{26,18} + e_{\overline{28,16}} - e_{\overline{22,14}} - e_{\overline{12,8}} + e_{\overline{5,1}} \\
e_{111100} &= e_{3,14} - e_{5,17} - e_{7,18} + e_{9,23} - e_{11,28} - e_{12,24} \\
&\quad - e_{24,12} - e_{28,11} + e_{\overline{23,9}} - e_{\overline{18,7}} - e_{\overline{17,5}} + e_{\overline{14,3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{111110} &= e_{2,13} - e_{6,19} - e_{8,21} - e_{9,24} - e_{10,27} + e_{12,\overline{23}} \\
&\quad + e_{23,\overline{12}} - e_{27,\overline{10}} - e_{24,\overline{9}} - e_{21,\overline{8}} - e_{19,\overline{6}} + e_{13,\overline{2}} \\
e_{012100} &= e_{3,9} + e_{4,10} + e_{13,20} + e_{14,23} + e_{19,\overline{25}} + e_{22,\overline{21}} \\
&\quad + e_{21,\overline{22}} + e_{25,\overline{19}} + e_{23,\overline{14}} + e_{20,\overline{13}} + e_{10,\overline{4}} + e_{9,\overline{3}} \\
e_{011110} &= e_{2,8} + e_{5,11} - e_{13,21} + e_{15,26} + e_{17,\overline{28}} - e_{22,\overline{20}} \\
&\quad - e_{20,\overline{22}} + e_{28,\overline{17}} + e_{26,\overline{15}} - e_{21,\overline{13}} + e_{11,\overline{5}} + e_{8,\overline{2}} \\
e_{001111} &= e_{1,6} + e_{7,12} + e_{13,22} + e_{16,\overline{27}} + e_{18,\overline{24}} + e_{21,\overline{20}} \\
&\quad + e_{20,\overline{21}} + e_{24,\overline{18}} + e_{27,\overline{16}} + e_{22,\overline{13}} + e_{12,\overline{7}} + e_{6,\overline{1}} \\
e_{011111} &= e_{1,7} + e_{6,12} - e_{14,25} - e_{15,28} - e_{17,\overline{26}} - e_{19,\overline{23}} \\
&\quad - e_{23,\overline{19}} - e_{26,\overline{17}} - e_{28,\overline{15}} - e_{25,\overline{14}} + e_{12,\overline{6}} + e_{7,\overline{1}} \\
e_{112100} &= -e_{3,15} - e_{4,17} + e_{7,20} + e_{8,23} + e_{11,\overline{25}} + e_{12,\overline{21}} \\
&\quad - e_{21,\overline{12}} - e_{25,\overline{11}} - e_{23,\overline{8}} - e_{20,\overline{7}} + e_{17,\overline{4}} + e_{15,\overline{3}} \\
e_{111110} &= -e_{2,14} - e_{5,19} - e_{7,21} + e_{9,26} + e_{10,\overline{28}} - e_{12,\overline{20}} \\
&\quad + e_{20,\overline{12}} - e_{28,\overline{10}} - e_{26,\overline{9}} + e_{21,\overline{7}} + e_{19,\overline{5}} + e_{14,\overline{2}} \\
e_{111111} &= -e_{1,13} - e_{6,22} - e_{8,25} - e_{9,28} - e_{10,\overline{26}} - e_{11,\overline{23}} \\
&\quad + e_{23,\overline{11}} + e_{26,\overline{10}} + e_{28,\overline{9}} + e_{25,\overline{8}} + e_{22,\overline{6}} + e_{13,\overline{1}} \\
e_{012110} &= -e_{2,9} + e_{4,11} + e_{13,24} + e_{14,26} - e_{17,\overline{25}} + e_{22,\overline{18}} \\
&\quad - e_{18,\overline{22}} + e_{25,\overline{17}} - e_{26,\overline{14}} - e_{24,\overline{13}} - e_{11,\overline{4}} + e_{9,\overline{2}} \\
e_{011111} &= -e_{1,8} + e_{5,12} - e_{13,25} + e_{15,\overline{27}} + e_{17,\overline{24}} + e_{19,\overline{20}} \\
&\quad - e_{20,\overline{19}} - e_{24,\overline{17}} - e_{27,\overline{15}} + e_{25,\overline{13}} - e_{12,\overline{5}} + e_{8,\overline{1}} \\
e_{122100} &= e_{3,16} + e_{4,18} + e_{5,20} + e_{6,23} - e_{11,\overline{22}} - e_{12,\overline{19}} \\
&\quad - e_{19,\overline{12}} - e_{22,\overline{11}} + e_{23,\overline{6}} + e_{20,\overline{5}} + e_{18,\overline{4}} + e_{16,\overline{3}} \\
e_{112110} &= e_{2,15} - e_{4,19} + e_{7,24} + e_{8,26} - e_{10,\overline{25}} + e_{12,\overline{18}} \\
&\quad + e_{18,\overline{12}} - e_{25,\overline{10}} + e_{26,\overline{8}} + e_{24,\overline{7}} - e_{19,\overline{4}} + e_{15,\overline{2}} \\
e_{111111} &= e_{1,14} - e_{5,22} - e_{7,25} + e_{9,\overline{27}} + e_{10,\overline{24}} + e_{11,\overline{20}} \\
&\quad + e_{20,\overline{11}} + e_{24,\overline{10}} + e_{27,\overline{9}} - e_{25,\overline{7}} - e_{22,\overline{5}} + e_{14,\overline{1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{012210} &= e_{2,10} + e_{3,11} - e_{13,27} - e_{14,\overline{28}} - e_{15,\overline{25}} - e_{22,\overline{16}} \\
&\quad - e_{16,\overline{22}} - e_{25,\overline{15}} - e_{28,\overline{14}} - e_{\overline{27},\overline{13}} + e_{\overline{11},\overline{3}} + e_{\overline{10},\overline{2}} \\
e_{012111} &= e_{1,9} + e_{4,12} + e_{13,28} + e_{14,\overline{27}} - e_{17,\overline{21}} - e_{19,\overline{18}} \\
&\quad - e_{18,\overline{19}} - e_{21,\overline{17}} + e_{27,\overline{14}} + e_{\overline{28},\overline{13}} + e_{\overline{12},\overline{4}} + e_{\overline{9},\overline{1}} \\
e_{122110} &= -e_{2,16} + e_{4,21} + e_{5,24} + e_{6,26} + e_{10,\overline{22}} - e_{12,\overline{17}} \\
&\quad + e_{17,\overline{12}} - e_{22,\overline{10}} - e_{\overline{26},\overline{8}} - e_{\overline{24},\overline{5}} - e_{\overline{21},\overline{4}} + e_{\overline{16},\overline{2}} \\
e_{112210} &= -e_{2,17} - e_{3,19} - e_{7,27} - e_{8,\overline{28}} - e_{9,\overline{25}} - e_{12,\overline{16}} \\
&\quad + e_{16,\overline{12}} + e_{25,\overline{9}} + e_{28,\overline{8}} + e_{\overline{27},\overline{7}} + e_{\overline{19},\overline{3}} + e_{\overline{17},\overline{2}} \\
e_{112111} &= -e_{1,15} - e_{4,22} + e_{7,28} + e_{8,\overline{27}} - e_{10,\overline{21}} - e_{11,\overline{18}} \\
&\quad + e_{18,\overline{11}} + e_{21,\overline{10}} - e_{27,\overline{8}} - e_{\overline{28},\overline{7}} + e_{\overline{22},\overline{4}} + e_{\overline{15},\overline{1}} \\
e_{012211} &= -e_{1,10} + e_{3,12} - e_{13,\overline{26}} - e_{14,\overline{24}} - e_{15,\overline{21}} + e_{19,\overline{16}} \\
&\quad - e_{16,\overline{19}} + e_{21,\overline{15}} + e_{24,\overline{14}} + e_{26,\overline{13}} - e_{\overline{12},\overline{3}} + e_{\overline{10},\overline{1}} \\
e_{122210} &= e_{2,18} + e_{3,21} - e_{5,27} - e_{6,\overline{28}} + e_{9,\overline{22}} + e_{12,\overline{15}} \\
&\quad + e_{15,\overline{12}} + e_{22,\overline{9}} - e_{28,\overline{6}} - e_{\overline{27},\overline{5}} + e_{\overline{21},\overline{3}} + e_{\overline{18},\overline{2}} \\
e_{122111} &= e_{1,16} + e_{4,25} + e_{5,28} + e_{6,\overline{27}} + e_{10,\overline{19}} + e_{11,\overline{17}} \\
&\quad + e_{17,\overline{11}} + e_{19,\overline{10}} + e_{27,\overline{6}} + e_{\overline{28},\overline{5}} + e_{\overline{25},\overline{4}} + e_{\overline{16},\overline{1}} \\
e_{112211} &= e_{1,17} - e_{3,22} - e_{7,\overline{26}} - e_{8,\overline{24}} - e_{9,\overline{21}} + e_{11,\overline{16}} \\
&\quad + e_{16,\overline{11}} - e_{21,\overline{9}} - e_{24,\overline{8}} - e_{26,\overline{7}} - e_{\overline{22},\overline{3}} + e_{\overline{17},\overline{1}} \\
e_{012221} &= e_{1,11} + e_{2,12} + e_{13,\overline{23}} + e_{14,\overline{20}} + e_{15,\overline{18}} + e_{17,\overline{16}} \\
&\quad + e_{16,\overline{17}} + e_{18,\overline{15}} + e_{20,\overline{14}} + e_{23,\overline{13}} + e_{\overline{12},\overline{2}} + e_{\overline{11},\overline{1}} \\
e_{123210} &= -e_{2,20} - e_{3,24} - e_{4,27} + e_{6,\overline{25}} + e_{8,\overline{22}} - e_{12,\overline{14}} \\
&\quad + e_{14,\overline{12}} - e_{22,\overline{8}} - e_{25,\overline{6}} + e_{\overline{27},\overline{4}} + e_{\overline{24},\overline{3}} + e_{\overline{20},\overline{2}} \\
e_{122211} &= -e_{1,18} + e_{3,25} - e_{5,\overline{26}} - e_{6,\overline{24}} + e_{9,\overline{19}} - e_{11,\overline{15}} \\
&\quad + e_{15,\overline{11}} - e_{19,\overline{9}} + e_{24,\overline{6}} + e_{26,\overline{5}} - e_{25,\overline{3}} + e_{\overline{18},\overline{1}} \\
e_{112221} &= -e_{1,19} - e_{2,22} + e_{7,\overline{23}} + e_{8,\overline{20}} + e_{9,\overline{18}} + e_{10,\overline{16}} \\
&\quad - e_{16,\overline{10}} - e_{18,\overline{9}} - e_{20,\overline{8}} - e_{23,\overline{7}} + e_{\overline{22},\overline{2}} + e_{\overline{19},\overline{1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{123210} &= e_{2,23} + e_{3,26} + e_{4,\overline{28}} + e_{5,\overline{25}} + e_{7,\overline{22}} + e_{12,\overline{13}} \\
&\quad + e_{13,\overline{12}} + e_{22,\overline{7}} + e_{25,\overline{5}} + e_{28,\overline{4}} + e_{\overline{26},\overline{3}} + e_{\overline{23},\overline{2}} \\
e_{123211} &= e_{1,20} - e_{3,28} - e_{4,\overline{26}} + e_{6,\overline{21}} + e_{8,\overline{19}} + e_{11,\overline{14}} \\
&\quad + e_{14,\overline{11}} + e_{19,\overline{8}} + e_{21,\overline{6}} - e_{26,\overline{4}} - e_{\overline{28},\overline{3}} + e_{\overline{20},\overline{1}} \\
e_{122221} &= e_{1,21} + e_{2,25} + e_{5,\overline{23}} + e_{6,\overline{20}} - e_{9,\overline{17}} - e_{10,\overline{15}} \\
&\quad - e_{15,\overline{10}} - e_{17,\overline{9}} + e_{20,\overline{6}} + e_{23,\overline{5}} + e_{\overline{25},\overline{2}} + e_{\overline{21},\overline{1}} \\
e_{123211} &= -e_{1,23} + e_{3,\overline{27}} + e_{4,\overline{24}} + e_{5,\overline{21}} + e_{7,\overline{19}} - e_{11,\overline{13}} \\
&\quad + e_{13,\overline{11}} - e_{19,\overline{7}} - e_{21,\overline{5}} - e_{24,\overline{4}} - e_{27,\overline{3}} + e_{\overline{23},\overline{1}} \\
e_{123221} &= -e_{1,24} - e_{2,28} + e_{4,\overline{23}} - e_{6,\overline{18}} - e_{8,\overline{17}} + e_{10,\overline{14}} \\
&\quad - e_{14,\overline{10}} + e_{17,\overline{8}} + e_{18,\overline{6}} - e_{23,\overline{4}} + e_{\overline{28},\overline{2}} + e_{\overline{24},\overline{1}} \\
e_{123221} &= e_{1,26} + e_{2,\overline{27}} - e_{4,\overline{20}} - e_{5,\overline{18}} - e_{7,\overline{17}} - e_{10,\overline{13}} \\
&\quad - e_{13,\overline{10}} - e_{17,\overline{7}} - e_{18,\overline{5}} - e_{20,\overline{4}} + e_{27,\overline{2}} + e_{\overline{26},\overline{1}} \\
e_{123321} &= e_{1,27} + e_{2,\overline{26}} + e_{3,\overline{23}} + e_{6,\overline{16}} + e_{8,\overline{15}} + e_{9,\overline{14}} \\
&\quad + e_{14,\overline{9}} + e_{15,\overline{8}} + e_{16,\overline{6}} + e_{23,\overline{3}} + e_{26,\overline{2}} + e_{\overline{27},\overline{1}} \\
e_{123321} &= -e_{1,\overline{28}} - e_{2,\overline{24}} - e_{3,\overline{20}} + e_{5,\overline{16}} + e_{7,\overline{15}} - e_{9,\overline{13}} \\
&\quad + e_{13,\overline{9}} - e_{15,\overline{7}} - e_{16,\overline{5}} + e_{20,\overline{3}} + e_{24,\overline{2}} + e_{28,\overline{1}} \\
e_{124321} &= e_{1,\overline{25}} + e_{2,\overline{21}} + e_{3,\overline{18}} + e_{4,\overline{16}} - e_{7,\overline{14}} - e_{8,\overline{13}} \\
&\quad - e_{13,\overline{8}} - e_{14,\overline{7}} + e_{16,\overline{4}} + e_{18,\overline{3}} + e_{21,\overline{2}} + e_{25,\overline{1}} \\
e_{134321} &= -e_{1,\overline{22}} - e_{2,\overline{19}} - e_{3,\overline{17}} - e_{4,\overline{15}} - e_{5,\overline{14}} - e_{6,\overline{13}} \\
&\quad + e_{13,\overline{6}} + e_{14,\overline{5}} + e_{15,\overline{4}} + e_{17,\overline{3}} + e_{19,\overline{2}} + e_{22,\overline{1}} \\
e_{234321} &= e_{1,\overline{12}} + e_{2,\overline{11}} + e_{3,\overline{10}} + e_{4,\overline{9}} + e_{5,\overline{8}} + e_{7,\overline{6}} \\
&\quad + e_{6,\overline{7}} + e_{8,\overline{5}} + e_{9,\overline{4}} + e_{10,\overline{3}} + e_{11,\overline{2}} + e_{12,\overline{1}}
\end{aligned}$$

Таблица 15. Матрица знаков $V(\varpi_7)$: E_6 -нумерация



	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
1	0 + - + -	+ + - - +	+ - - + +	+ - - + +	- - + + -	+ - +
2	+ 0 + - +	- - + + -	- + + - -	0 + 0 - 0	+ 0 0 0 0	0 0 0
3	- + 0 + -	+ + - - +	+ - 0 + 0	+ 0 - 0 +	0 - + 0 0	0 0 0
4	+ - + 0 +	- - + + -	0 0 + 0 -	+ + - 0 +	0 0 0 - +	0 0 0
5	- + - + 0	+ + - 0 0	+ - + 0 -	+ 0 - + 0	0 + 0 - 0	+ 0 0
6	+ - + - +	0 0 0 + -	+ - + 0 -	+ 0 - 0 0	+ 0 + 0 -	+ 0 0
7	+ - + - +	0 0 + + 0	+ 0 + - 0	+ - 0 + -	0 + 0 - 0	0 + 0
8	- + - + -	0 + 0 0 +	0 + 0 - +	0 - + + -	0 + 0 - 0	0 0 +
9	- + - + 0	+ + 0 0 +	+ 0 + - 0	+ - 0 0 -	+ 0 + 0 -	0 + 0
10	+ - + - 0	- 0 + + 0	0 + 0 - +	0 - + 0 -	+ 0 + 0 -	0 0 +
11	+ - + 0 +	+ + 0 + 0	0 + + + 0	+ 0 0 - 0	+ - + 0 0	- + 0
12	- + - 0 -	- 0 + 0 +	+ 0 0 + +	0 0 + - 0	+ - + 0 0	- 0 +
13	- + 0 + +	+ + 0 + 0	+ 0 0 0 +	+ + 0 + 0	- 0 0 - +	- + 0
14	+ - + 0 0	0 - - - -	+ + 0 0 0	0 + 0 - +	+ - + 0 0	0 - +
15	+ - 0 - -	- 0 + 0 +	0 + + 0 0	0 + + + 0	- 0 0 - +	- 0 +
16	+ 0 + + +	+ + 0 + 0	+ 0 + 0 0	0 0 + 0 +	0 + - + -	+ - 0
17	- + 0 + 0	0 - - - -	0 0 + + +	0 0 0 + +	- 0 0 - +	0 - +
18	- 0 - - -	- 0 + 0 +	0 + 0 0 +	+ 0 0 0 +	0 + - + -	+ 0 -
19	+ - 0 0 +	0 + + 0 0	- - + - +	0 + 0 0 0	+ + 0 - 0	+ - +
20	+ 0 + + 0	0 - - - -	0 0 0 + 0	+ + + 0 0	0 + - + -	0 + -
21	- + 0 0 0	+ 0 0 + +	+ + - + -	0 - 0 + 0	0 0 + 0 -	+ - +
22	- 0 - 0 +	0 + + 0 0	- - 0 - 0	+ 0 + + +	0 0 + + 0	- + -
23	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + +	+ + 0 + 0	- 0 - 0 -	+ + 0 0 +	- + -
24	+ 0 0 - -	0 - - 0 0	0 0 - 0 -	+ - + - +	0 + 0 0 +	+ - +
25	- 0 0 + 0	- 0 0 - -	0 0 + 0 +	- + - 0 -	- 0 + + 0	+ - +
26	+ 0 0 0 +	+ 0 0 0 0	- - - 0 -	+ 0 + + 0	+ - - + +	0 + -
27	- 0 0 0 0	0 + 0 + 0	+ 0 + - 0	- - 0 - +	- + + - -	+ 0 +
28	+ 0 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 + +	0 + - + -	+ - - + +	- + 0

	$\bar{2}$ 8	$\bar{2}$ 7	$\bar{2}$ 6	$\bar{2}$ 5	$\bar{2}$ 4	$\bar{2}$ 3	$\bar{2}$ 2	$\bar{2}$ 1	$\bar{1}$ 0	$\bar{1}$ 9	$\bar{1}$ 8	$\bar{1}$ 7	$\bar{1}$ 6	$\bar{1}$ 5	$\bar{1}$ 4	$\bar{1}$ 3	$\bar{1}$ 2	$\bar{1}$ 1	$\bar{1}$ 0	$\bar{9}$	$\bar{8}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	+	-	+	-	+	+	-	0	+	0	-	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	+	-	+	-	+	0	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	+	-	+	0	0	-	+	+	0	-	0	0	0	0	+	0	-	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	+	-	0	+	0	-	0	+	+	0	0	-	0	0	+	0	0	0	-	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	+	-	0	0	+	0	-	0	+	+	0	-	0	0	+	0	0	0	0	0	0	-	+	0	0	0	0	0	0
7	+	0	-	+	0	-	0	+	0	0	+	0	0	-	0	0	+	0	-	0	0	0	+	0	0	0	0	0	0
8	0	+	-	+	0	-	0	+	0	0	0	+	0	0	0	-	0	+	0	-	0	0	+	0	0	0	0	0	0
9	+	0	-	0	+	0	-	0	0	+	+	0	0	-	0	0	+	0	0	0	0	+	0	0	0	-	0	0	0
10	0	+	-	0	+	0	-	0	0	+	0	0	+	0	0	-	0	+	0	0	0	0	-	0	+	0	0	0	0
11	+	0	0	-	+	0	0	0	-	0	+	+	0	-	0	0	0	+	0	0	0	-	0	0	0	+	0	0	0
12	0	+	0	-	+	0	0	0	-	0	0	+	+	0	0	-	0	0	0	+	0	0	-	0	0	+	0	0	0
13	+	0	0	0	0	-	+	0	-	0	+	0	0	0	+	0	-	0	+	0	0	-	0	0	0	0	+	0	0
14	0	0	+	-	+	0	0	0	0	0	-	0	+	+	0	-	0	0	0	0	0	0	0	+	-	+	0	0	0
15	0	+	0	0	0	-	+	0	-	0	0	0	+	0	+	0	0	-	0	+	0	0	-	0	0	0	+	0	0
16	+	0	0	0	0	0	0	-	0	+	0	-	0	+	+	0	-	0	+	0	0	-	0	0	0	0	0	+	0
17	0	0	+	0	0	-	+	0	0	0	-	0	+	0	0	0	+	-	0	0	0	0	0	+	-	0	+	0	0
18	0	+	0	0	0	0	0	-	0	+	0	-	0	0	+	+	0	-	0	+	0	0	-	0	0	0	0	+	0
19	0	0	0	+	0	-	0	0	+	0	-	0	+	0	0	0	0	+	-	0	0	0	+	0	-	+	0	0	0
20	0	0	+	0	0	0	0	-	0	+	0	0	0	-	0	+	+	-	0	0	0	0	0	+	-	0	+	0	0
21	0	0	0	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	-	0	+	-	+	0	0
22	0	0	0	+	0	0	0	-	0	0	0	+	0	-	0	0	+	-	0	0	0	+	0	0	-	0	+	0	0
23	0	0	0	0	+	0	0	0	0	-	0	+	0	-	0	0	0	0	0	0	0	+	-	0	+	-	0	+	0
24	0	0	0	0	0	+	0	-	0	0	0	0	0	+	0	0	-	+	+	-	0	0	+	0	0	-	+	0	0
25	0	0	0	0	0	0	+	0	0	-	0	0	0	0	+	0	-	+	0	0	0	+	-	0	+	0	-	+	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	-	0	0	+	0	0	0	-	+	0	0	0	+	-	+	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	-	0	0	+	0	-	0	0	+	0	+	-	+	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	0	0	0	-	0	+	0	-	0	0	+	+	-	+	0	0	0

	1 2 3 4 5	6 7 8 9 0	1 1 1 1 1 1 2 3 4 5	1 1 1 1 2 6 7 8 9 0	2 2 2 2 2 1 2 3 4 5	2 2 2 6 7 8
$\frac{28}{27}$	0 + + + +	+ + 0 + 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0
$\frac{26}{25}$	0 + + + 0	0 - - - -	0 0 0 + 0	0 + 0 0 +	0 0 0 0 0	0 0 0
$\frac{24}{23}$	0 + + 0 0	+ 0 0 + +	+ + 0 + 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 0	0 0 0
$\frac{22}{21}$	0 - 0 + 0	- 0 0 - -	0 0 + 0 +	0 + 0 0 0	- 0 0 0 +	0 0 0
$\frac{20}{19}$	0 + 0 0 +	+ 0 0 0 0	- - - 0 -	0 0 0 + 0	+ 0 0 0 0	+ 0 0
$\frac{18}{17}$	0 - 0 0 0	0 + 0 + 0	+ 0 + - 0	0 - 0 - 0	- 0 0 0 0	0 + 0
$\frac{16}{15}$	0 + 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 + +	0 + 0 + 0	+ 0 0 0 0	0 0 +
$\frac{14}{13}$	0 0 0 + +	+ 0 0 0 0	0 0 + 0 +	+ 0 + 0 0	0 0 0 + +	+ 0 0
$\frac{12}{11}$	0 0 + 0 0	0 0 - 0 -	0 - 0 - 0	0 0 + 0 +	0 + + 0 0	0 0 -
$\frac{10}{9}$	0 0 0 - 0	0 + 0 + 0	0 0 - 0 0	- + 0 0 +	0 0 0 - -	0 + 0
$\frac{8}{7}$	0 0 0 + 0	0 0 + 0 +	0 0 0 0 -	0 - - 0 -	0 0 0 + +	0 0 +
$\frac{6}{5}$	0 0 0 0 -	0 - 0 0 0	+ 0 + 0 0	+ 0 0 + 0	0 + 0 + 0	- - 0
$\frac{4}{3}$	0 0 0 0 +	0 0 - 0 0	0 + 0 0 +	0 0 + - 0	0 - 0 - 0	+ 0 -
$\frac{3}{2}$	0 0 0 0 0	- 0 0 - 0	- 0 - 0 0	- 0 0 0 0	+ 0 + 0 +	+ + 0
$\frac{2}{1}$	0 0 0 0 0	+ 0 0 0 -	0 - 0 0 -	0 0 - 0 0	- 0 - 0 -	- 0 +
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 + + 0 0	0 0 0 + 0	0 + 0 + +	0 + 0 + 0	0 + +
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 + +	0 0 0 - 0	0 - 0 0 -	+ 0 + 0 +	0 - -
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ + 0 + 0	0 0 0 - 0	- - - 0 0	+ + +
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 + 0 +	0 + 0 + 0	+ 0 0 - -	- - -
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	+ 0 + 0 +	0 + + + +	+ + +
$\frac{1}{1}$	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0

Таблица 16. Корневые элементы: E_6 -нумерация

$$\begin{aligned}
e_{1000000} &= e_{7,8} + e_{9,10} + e_{11,12} + e_{13,15} + e_{16,18} + e_{\overline{28,27}} \\
&\quad + e_{27,28} + e_{\overline{18,16}} + e_{\overline{15,13}} + e_{\overline{12,11}} + e_{\overline{10,9}} + e_{\overline{8,7}} \\
e_{0000000} &= e_{5,6} + e_{7,9} + e_{8,10} + e_{19,21} + e_{22,23} + e_{\overline{25,24}} \\
&\quad + e_{24,25} + e_{\overline{23,22}} + e_{\overline{21,19}} + e_{\overline{10,8}} + e_{9,7} + e_{6,5} \\
e_{0100000} &= e_{5,7} + e_{6,9} + e_{12,14} + e_{15,17} + e_{18,20} + e_{\overline{27,26}} \\
&\quad + e_{26,27} + e_{\overline{20,18}} + e_{\overline{17,15}} + e_{\overline{14,12}} + e_{9,6} + e_{7,5} \\
e_{0010000} &= e_{4,5} + e_{9,11} + e_{10,12} + e_{17,19} + e_{20,22} + e_{\overline{26,25}} \\
&\quad + e_{25,26} + e_{\overline{22,20}} + e_{\overline{19,17}} + e_{\overline{12,10}} + e_{\overline{11,9}} + e_{5,4} \\
e_{0000100} &= e_{3,4} + e_{11,13} + e_{12,15} + e_{14,17} + e_{22,24} + e_{\overline{25,23}} \\
&\quad + e_{23,25} + e_{\overline{24,22}} + e_{\overline{17,14}} + e_{\overline{15,12}} + e_{\overline{13,11}} + e_{4,3} \\
e_{0000010} &= e_{2,3} + e_{13,16} + e_{15,18} + e_{17,20} + e_{19,22} + e_{\overline{23,21}} \\
&\quad + e_{21,23} + e_{\overline{22,19}} + e_{\overline{20,17}} + e_{\overline{18,15}} + e_{\overline{16,13}} + e_{3,2} \\
e_{0000001} &= e_{1,2} + e_{\overline{16,28}} + e_{\overline{18,27}} + e_{\overline{20,26}} + e_{\overline{22,25}} + e_{\overline{24,23}} \\
&\quad + e_{\overline{23,24}} + e_{\overline{25,22}} + e_{\overline{26,20}} + e_{\overline{27,18}} + e_{\overline{28,16}} + e_{\overline{2,1}} \\
e_{1100000} &= -e_{5,8} - e_{6,10} + e_{11,14} + e_{13,17} + e_{16,20} + e_{\overline{28,26}} \\
&\quad - e_{26,28} - e_{\overline{20,16}} - e_{\overline{17,13}} - e_{\overline{14,11}} + e_{\overline{10,6}} + e_{\overline{8,5}} \\
e_{0010000} &= -e_{4,6} + e_{7,11} + e_{8,12} - e_{17,21} - e_{20,23} - e_{\overline{26,24}} \\
&\quad + e_{24,26} + e_{\overline{23,20}} + e_{\overline{21,17}} - e_{\overline{12,8}} - e_{\overline{11,7}} + e_{6,4} \\
e_{0110000} &= -e_{4,7} + e_{6,11} - e_{10,14} + e_{15,19} + e_{18,22} + e_{\overline{27,25}} \\
&\quad - e_{25,27} - e_{\overline{22,18}} - e_{\overline{19,15}} + e_{\overline{14,10}} - e_{\overline{11,6}} + e_{7,4} \\
e_{0011000} &= -e_{3,5} + e_{9,13} + e_{10,15} - e_{14,19} + e_{20,24} + e_{\overline{26,23}} \\
&\quad - e_{23,26} - e_{\overline{24,20}} + e_{\overline{19,14}} - e_{\overline{15,10}} - e_{\overline{13,9}} + e_{5,3} \\
e_{0000110} &= -e_{2,4} + e_{11,16} + e_{12,18} + e_{14,20} - e_{19,24} + e_{\overline{25,21}} \\
&\quad - e_{21,25} + e_{\overline{24,19}} - e_{\overline{20,14}} - e_{\overline{18,12}} - e_{\overline{16,11}} + e_{4,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{000011} &= -e_{1,3} + e_{13,28} + e_{15,27} + e_{17,26} + e_{19,25} - e_{24,21} \\
&\quad + e_{21,24} - e_{25,19} - e_{26,17} - e_{27,15} - e_{28,13} + e_{3,1} \\
e_{111000} &= e_{4,8} - e_{6,12} - e_{9,14} + e_{13,19} + e_{16,22} + e_{28,25} \\
&\quad + e_{25,28} + e_{22,16} + e_{19,13} - e_{14,9} - e_{12,6} + e_{8,4} \\
e_{011000} &= e_{4,9} + e_{5,11} - e_{8,14} - e_{15,21} - e_{18,23} - e_{27,24} \\
&\quad - e_{24,27} - e_{23,18} - e_{21,15} - e_{14,8} + e_{11,5} + e_{9,4} \\
e_{001100} &= e_{3,6} + e_{7,13} + e_{8,15} + e_{14,21} - e_{20,25} - e_{26,22} \\
&\quad - e_{22,26} - e_{25,20} + e_{21,14} + e_{15,8} + e_{13,7} + e_{6,3} \\
e_{011100} &= e_{3,7} + e_{6,13} - e_{10,17} - e_{12,19} + e_{18,24} + e_{27,23} \\
&\quad + e_{23,27} + e_{24,18} - e_{19,12} - e_{17,10} + e_{13,6} + e_{7,3} \\
e_{001110} &= e_{2,5} + e_{9,16} + e_{10,18} - e_{14,22} - e_{17,24} + e_{26,21} \\
&\quad + e_{21,26} - e_{24,17} - e_{22,14} + e_{18,10} + e_{16,9} + e_{5,2} \\
e_{000111} &= e_{1,4} + e_{11,28} + e_{12,27} + e_{14,26} - e_{19,23} - e_{22,21} \\
&\quad - e_{21,22} - e_{23,19} + e_{26,14} + e_{27,12} + e_{28,11} + e_{4,1} \\
e_{111000} &= -e_{4,10} - e_{5,12} - e_{7,14} - e_{13,21} - e_{16,23} - e_{28,24} \\
&\quad + e_{24,28} + e_{23,16} + e_{21,13} + e_{14,7} + e_{12,5} + e_{10,4} \\
e_{111100} &= -e_{3,8} - e_{6,15} - e_{9,17} - e_{11,19} + e_{16,24} + e_{28,23} \\
&\quad - e_{23,28} - e_{24,16} + e_{19,11} + e_{17,9} + e_{15,6} + e_{8,3} \\
e_{011100} &= -e_{3,9} + e_{5,13} - e_{8,17} + e_{12,21} - e_{18,25} - e_{27,22} \\
&\quad + e_{22,27} + e_{25,18} - e_{21,12} + e_{17,8} - e_{13,5} + e_{9,3} \\
e_{001110} &= -e_{2,6} + e_{7,16} + e_{8,18} + e_{14,23} + e_{17,25} - e_{26,19} \\
&\quad + e_{19,26} - e_{25,17} - e_{23,14} - e_{18,8} - e_{16,7} + e_{6,2} \\
e_{011110} &= -e_{2,7} + e_{6,16} - e_{10,20} - e_{12,22} - e_{15,24} + e_{27,21} \\
&\quad - e_{21,27} + e_{24,15} + e_{22,12} + e_{20,10} - e_{16,6} + e_{7,2} \\
e_{001111} &= -e_{1,5} + e_{9,28} + e_{10,27} - e_{14,25} - e_{17,23} - e_{20,21} \\
&\quad + e_{21,20} + e_{23,17} + e_{25,14} - e_{27,10} - e_{28,9} + e_{5,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{1111100} &= e_{3,10} - e_{5,15} - e_{7,17} + e_{11,21} - e_{16,25} - e_{\overline{28,22}} \\
&\quad - e_{22,28} - e_{\overline{25,16}} + e_{\overline{21,11}} - e_{\overline{17,7}} - e_{\overline{15,5}} + e_{\overline{10,3}} \\
e_{1111110} &= e_{2,8} - e_{6,18} - e_{9,20} - e_{11,22} - e_{13,24} + e_{\overline{28,21}} \\
&\quad + e_{21,28} - e_{\overline{24,13}} - e_{\overline{22,11}} - e_{\overline{20,9}} - e_{\overline{18,6}} + e_{\overline{8,2}} \\
e_{012100} &= e_{3,11} + e_{4,13} + e_{8,19} + e_{10,21} + e_{18,26} + e_{\overline{27,20}} \\
&\quad + e_{20,27} + e_{\overline{26,18}} + e_{\overline{21,10}} + e_{\overline{19,8}} + e_{\overline{13,4}} + e_{\overline{11,3}} \\
e_{0111110} &= e_{2,9} + e_{5,16} - e_{8,20} + e_{12,23} + e_{15,25} - e_{\overline{27,19}} \\
&\quad - e_{19,27} + e_{\overline{25,15}} + e_{\overline{23,12}} - e_{\overline{20,8}} + e_{\overline{16,5}} + e_{\overline{9,2}} \\
e_{0011111} &= e_{1,6} + e_{7,28} + e_{8,27} + e_{14,24} + e_{17,22} + e_{20,19} \\
&\quad + e_{19,20} + e_{22,17} + e_{24,14} + e_{27,8} + e_{28,7} + e_{\overline{6,1}} \\
e_{0111111} &= e_{1,7} + e_{6,28} - e_{10,26} - e_{12,25} - e_{15,23} - e_{18,21} \\
&\quad - e_{21,18} - e_{23,15} - e_{25,12} - e_{26,10} + e_{28,6} + e_{7,1} \\
e_{1112100} &= -e_{3,12} - e_{4,15} + e_{7,19} + e_{9,21} + e_{16,26} + e_{\overline{28,20}} \\
&\quad - e_{20,28} - e_{\overline{26,16}} - e_{\overline{21,9}} - e_{\overline{19,7}} + e_{\overline{15,4}} + e_{\overline{12,3}} \\
e_{1111110} &= -e_{2,10} - e_{5,18} - e_{7,20} + e_{11,23} + e_{13,25} - e_{\overline{28,19}} \\
&\quad + e_{19,28} - e_{\overline{25,13}} - e_{\overline{23,11}} + e_{\overline{20,7}} + e_{\overline{18,5}} + e_{\overline{10,2}} \\
e_{1111111} &= -e_{1,8} - e_{6,27} - e_{9,26} - e_{11,25} - e_{13,23} - e_{16,21} \\
&\quad + e_{21,16} + e_{23,13} + e_{25,11} + e_{26,9} + e_{27,6} + e_{\overline{8,1}} \\
e_{0121110} &= -e_{2,11} + e_{4,16} + e_{8,22} + e_{10,23} - e_{15,26} + e_{\overline{27,17}} \\
&\quad - e_{17,27} + e_{\overline{26,15}} - e_{\overline{23,10}} - e_{\overline{22,8}} - e_{\overline{16,4}} + e_{\overline{11,2}} \\
e_{0111111} &= -e_{1,9} + e_{5,28} - e_{8,26} + e_{12,24} + e_{15,22} + e_{18,19} \\
&\quad - e_{19,18} - e_{22,15} - e_{24,12} + e_{26,8} - e_{28,5} + e_{\overline{9,1}} \\
e_{1222100} &= e_{3,14} + e_{4,17} + e_{5,19} + e_{6,21} - e_{16,27} - e_{\overline{28,18}} \\
&\quad - e_{18,28} - e_{\overline{27,16}} + e_{\overline{21,6}} + e_{\overline{19,5}} + e_{\overline{17,4}} + e_{\overline{14,3}} \\
e_{1121110} &= e_{2,12} - e_{4,18} + e_{7,22} + e_{9,23} - e_{13,26} + e_{\overline{28,17}} \\
&\quad + e_{17,28} - e_{\overline{26,13}} + e_{\overline{23,9}} + e_{\overline{22,7}} - e_{\overline{18,4}} + e_{\overline{12,2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{1111111} &= e_{1,10} - e_{5,27} - e_{7,26} + e_{11,24} + e_{13,22} + e_{16,19} \\
&\quad + e_{19,16} + e_{22,13} + e_{24,11} - e_{26,7} - e_{27,5} + e_{10,1} \\
e_{012210} &= e_{2,13} + e_{3,16} - e_{8,24} - e_{10,25} - e_{12,26} - e_{27,14} \\
&\quad - e_{14,27} - e_{26,12} - e_{25,10} - e_{24,8} + e_{16,3} + e_{13,2} \\
e_{012111} &= e_{1,11} + e_{4,28} + e_{8,25} + e_{10,24} - e_{15,20} - e_{18,17} \\
&\quad - e_{17,18} - e_{20,15} + e_{24,10} + e_{25,8} + e_{28,4} + e_{11,1} \\
e_{122110} &= -e_{2,14} + e_{4,20} + e_{5,22} + e_{6,23} + e_{13,27} - e_{28,15} \\
&\quad + e_{15,28} - e_{27,13} - e_{23,6} - e_{22,5} - e_{20,4} + e_{14,2} \\
e_{112210} &= -e_{2,15} - e_{3,18} - e_{7,24} - e_{9,25} - e_{11,26} - e_{28,14} \\
&\quad + e_{14,28} + e_{26,11} + e_{25,9} + e_{24,7} + e_{18,3} + e_{15,2} \\
e_{112111} &= -e_{1,12} - e_{4,27} + e_{7,25} + e_{9,24} - e_{13,20} - e_{16,17} \\
&\quad + e_{17,16} + e_{20,13} - e_{24,9} - e_{25,7} + e_{27,4} + e_{12,1} \\
e_{012211} &= -e_{1,13} + e_{3,28} - e_{8,23} - e_{10,22} - e_{12,20} + e_{18,14} \\
&\quad - e_{14,18} + e_{20,12} + e_{22,10} + e_{23,8} - e_{28,3} + e_{13,1} \\
e_{122210} &= e_{2,17} + e_{3,20} - e_{5,24} - e_{6,25} + e_{11,27} + e_{28,12} \\
&\quad + e_{12,28} + e_{27,11} - e_{25,6} - e_{24,5} + e_{20,3} + e_{17,2} \\
e_{122111} &= e_{1,14} + e_{4,26} + e_{5,25} + e_{6,24} + e_{13,18} + e_{16,15} \\
&\quad + e_{15,16} + e_{18,13} + e_{24,6} + e_{25,5} + e_{26,4} + e_{14,1} \\
e_{112211} &= e_{1,15} - e_{3,27} - e_{7,23} - e_{9,22} - e_{11,20} + e_{16,14} \\
&\quad + e_{14,16} - e_{20,11} - e_{22,9} - e_{23,7} - e_{27,3} + e_{15,1} \\
e_{012221} &= e_{1,16} + e_{2,28} + e_{8,21} + e_{10,19} + e_{12,17} + e_{15,14} \\
&\quad + e_{14,15} + e_{17,12} + e_{19,10} + e_{21,8} + e_{28,2} + e_{16,1} \\
e_{123210} &= -e_{2,19} - e_{3,22} - e_{4,24} + e_{6,26} + e_{9,27} - e_{28,10} \\
&\quad + e_{10,28} - e_{27,9} - e_{26,6} + e_{24,4} + e_{22,3} + e_{19,2} \\
e_{122211} &= -e_{1,17} + e_{3,26} - e_{5,23} - e_{6,22} + e_{11,18} - e_{16,12} \\
&\quad + e_{12,16} - e_{18,11} + e_{22,6} + e_{23,5} - e_{26,3} + e_{17,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_{112221} &= -e_{1,18} - e_{2,27} + e_{7,21} + e_{9,19} + e_{11,17} + e_{13,14} \\
&\quad - e_{14,13} - e_{17,11} - e_{19,9} - e_{21,7} + e_{27,2} + e_{18,1} \\
e_{123210} &= e_{2,21} + e_{3,23} + e_{4,25} + e_{5,26} + e_{7,27} + e_{28,8} \\
&\quad + e_{8,28} + e_{27,7} + e_{26,6} + e_{25,5} + e_{23,3} + e_{21,2} \\
e_{123211} &= e_{1,19} - e_{3,25} - e_{4,23} + e_{6,20} + e_{9,18} + e_{16,10} \\
&\quad + e_{10,16} + e_{18,9} + e_{20,8} - e_{23,4} - e_{25,3} + e_{19,1} \\
e_{122221} &= e_{1,20} + e_{2,26} + e_{5,21} + e_{6,19} - e_{11,15} - e_{13,12} \\
&\quad - e_{12,13} - e_{15,11} + e_{19,6} + e_{21,5} + e_{26,2} + e_{20,1} \\
e_{123211} &= -e_{1,21} + e_{3,24} + e_{4,22} + e_{5,20} + e_{7,18} - e_{16,8} \\
&\quad + e_{8,16} - e_{18,7} - e_{20,5} - e_{22,4} - e_{24,3} + e_{21,1} \\
e_{123221} &= -e_{1,22} - e_{2,25} + e_{4,21} - e_{6,17} - e_{9,15} + e_{13,10} \\
&\quad - e_{10,13} + e_{15,9} + e_{17,8} - e_{21,4} + e_{25,2} + e_{22,1} \\
e_{123221} &= e_{1,23} + e_{2,24} - e_{4,19} - e_{5,17} - e_{7,15} - e_{13,8} \\
&\quad - e_{8,13} - e_{15,7} - e_{17,5} - e_{19,4} + e_{24,2} + e_{23,1} \\
e_{123321} &= e_{1,24} + e_{2,23} + e_{3,21} + e_{6,14} + e_{9,12} + e_{11,10} \\
&\quad + e_{10,11} + e_{12,9} + e_{14,6} + e_{21,3} + e_{23,2} + e_{24,1} \\
e_{123321} &= -e_{1,25} - e_{2,22} - e_{3,19} + e_{5,14} + e_{7,12} - e_{11,8} \\
&\quad + e_{8,11} - e_{12,7} - e_{14,5} + e_{19,3} + e_{22,2} + e_{25,1} \\
e_{124321} &= e_{1,26} + e_{2,20} + e_{3,17} + e_{4,14} - e_{7,10} - e_{9,8} \\
&\quad - e_{8,9} - e_{10,7} + e_{14,4} + e_{17,3} + e_{20,2} + e_{26,1} \\
e_{134321} &= -e_{1,27} - e_{2,18} - e_{3,15} - e_{4,12} - e_{5,10} - e_{6,8} \\
&\quad + e_{8,6} + e_{10,5} + e_{12,4} + e_{15,3} + e_{18,2} + e_{27,1} \\
e_{234321} &= e_{1,28} + e_{2,16} + e_{3,13} + e_{4,11} + e_{5,9} + e_{7,6} \\
&\quad + e_{6,7} + e_{9,5} + e_{11,4} + e_{13,3} + e_{16,2} + e_{28,1}
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Абе, *Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами*. — Алгебра и Анализ **5**, No. 2 (1993), 74–90.
2. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле*, Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., 1973, pp. 9–59.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Главы IV–VI*, Мир, М., 1972.
4. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Главы VII, VIII*, Мир, М., 1978.
5. Е. И. Бунина, *Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l , D_l и E_l над локальными кольцами с $1/2$* . — Фундам. Прикл. Мат. **15**, No. 2 (2007), 35–59.
6. Е. И. Бунина, *Автоморфизмы элементарных присоединенных групп Шевалле типов A_l , D_l и E_l над локальными кольцами с $1/2$* . — Алгебра и Логика **48**, No. 4 (2009), 443–470.
7. Н. А. Вавилов, *Как увидеть знаки структурных констант?* — Алгебра и Анализ **19**, No. 4 (2007), 34–68.
8. Н. А. Вавилов, *Вычисления в исключительных группах*. — Вестн. Самарск. ун-та, Естественнонаучная сер. No. 7 (2007), 11–24.
9. Н. А. Вавилов, *Нумерология квадратных уравнений*. — Алгебра и анализ **20**, No. 3 (2008), 9–40.
10. Н. А. Вавилов, *Строение изотропных редуктивных групп*. — Труды Ин-та Математики НАН Беларуси **18**, No. 1 (2010), 1–13.
11. Н. А. Вавилов, *Еще немного исключительной нумерологии*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 22–31.
12. Н. А. Вавилов, *A_3 -доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7 . II. Основная лемма*. — Алгебра и анализ (2010), в печати.
13. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, *A_2 -доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7* . — Алгебра и Анализ **16**, No. 4 (2004), 54–87.
14. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из книги*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
15. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа E_6* . — Алгебра и анализ **19**, No. 5 (2007), 35–62.
16. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *Нормализатор группы Шевалле типа E_7* , (2010) to appear.
17. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, *A_2 -доказательство структурных теорем для группы Шевалле типа E_8* , (2010) to appear.
18. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа E_6 в 27-мерно представлении*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
19. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, *A_2 -доказательство структурных теорем для групп Шевалле типа F_4* . — Алгебра и Анализ **20**, No. 4 (2008), 27–63.
20. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп*. — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер., No. 3 (2008), 51–95.
21. А. Ю. Лузгарев, *О надгруппах $E(E_6, R)$ и $E(E_7, R)$ в минимальных представлениях*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 216–243.
22. А. Ю. Лузгарев, *Надгруппы $E(F_4, R)$ в $G(E_6, R)$* . — Алгебра и Анализ **20**, No. 6 (2008), 148–185.

23. А. Ю. Лузгарев, *Надгруппы исключительных групп*, Канд. Дисс., СПб Гос Ун-т, 2008, 1–106.
24. А. Ю. Лузгарев, *Не зависящие от характеристики инварианты четвертой степени для $G(E_7, R)$* , (2010), to arXiv.
25. А. Ю. Лузгарев, *Уравнения, определяющие орбиту старшего веса в присоединенном представлении*, (2010), to arXiv.
26. А. Ю. Лузгарев, А. К. Ставрова, *Элементарная подгруппа изотропной редуктивной группы совершенна*. — Алгебра и Анализ (2010), to arXiv.
27. Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М. (1972).
28. И. М. Певзнер, *Корневые элементы в исключительных группах*, Канд. Дисс., СПб Гос Ун-т, 2008, 1–149.
29. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых подгрупп в группах типа E_6* . — Алгебра и Анализ (2010), to arXiv.
30. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа E_6 относительно множества корневых элементов. I*. — Алгебра и Анализ (2010), to arXiv.
31. В. А. Петров, А. К. Ставрова, *Элементарные подгруппы изотропных редуктивных групп*. — Алгебра и Анализ **20**, No. 4 (1978), 160–188.
32. Е. Б. Плоткин, *Сторговективная стабилизация K_1 -функтора для некоторых исключительных групп Шевалле*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **198** (1991), 65–88.
33. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы*. — Итоги науки и техн. Сер. совр. проблемы мат. Фундам. направл., т. 55, ВИНТИ, М., 1989, pp. 5–136.
34. А. К. Ставрова, *Строение изотропных редуктивных групп*, Канд. Дисс., СПб Гос Ун-т, (2009), 1–158.
35. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.
36. Д. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.
37. Д. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.
38. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981.
39. Е. Abe, *Chevalley groups over local rings*. — Tôhoku Math. J. **21**, No. 3 (1969), 474–494.
40. Е. Abe, *Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings*. — Comm. Algebra **11**, No. 12 (1983), 1271–1307.
41. Е. Abe, *Chevalley groups over commutative rings*, Radical Theory (Sendai, 1988) (Tokyo), Uchida Rokakuho, 1989, pp. 1–23.
42. Е. Abe, *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*. — Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 1–17.
43. Е. Abe, К. Suzuki, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*. — Tôhoku Math. J. (2) **28**, No. 2 (1976), 185–198.
44. М. Aschbacher, *Some multilinear forms with large isometry groups*. — Geom. Dedicata **25**, Nos. 1–3 (1988), 417–465.
45. Н. Azad, М. Barry, G. M. Seitz, *On the structure of parabolic subgroups*. — Comm. Algebra **18**, No. 2 (1990), 551–562.
46. J. Baez, *The octonions*. — Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 145–205.

47. A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov, *Localization-completion strikes again: relative K_1 is nilpotent*. — J. pure appl. Algebra **213** (2009), 1075–1085.
48. M. Brion, V. Lakshmibai, *A geometric approach to standard monomial theory*. — J. Representation Theory **7** (2003), 651–680.
49. A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier, *Distance regular graphs*, Springer-Verlag, N. Y. et al., 1989.
50. R. B. Brown, *A new type of nonassociative algebras*. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **50**, No. 5 (1963), 947–949.
51. R. B. Brown, *A minimal representation for the Lie algebra E_7* . — Ill. J. Math. **12**, No. 1 (1968), 190–200.
52. R. B. Brown, *Groups of type E_7* . — J. reine angew. Math. **236** (1969), 79–102.
53. R. Brylinski, B. Kostant, *Minimal representations of E_6 , E_7 , and E_8 and the generalized Capelli identity*. — Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **91**, No. 7 (1994), 2469–2472.
54. N. Burgoyne, C. Williamson, *Some computations involving simple Lie algebras*. — Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation, Ass. Comp. Mach., New York, (1971), pp. 162–171.
55. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, John Wiley & Sons, London–New York–Sydney, (1972), Pure and Applied Mathematics, Vol. 28.
56. R. W. Carter, *Finite groups of Lie type: Conjugacy classes and complex characters*, John Wiley & Sons, London et al., 1985.
57. P. E. Chaput, L. Manivel, N. Perrin *Quantum cohomology of minuscule homogeneous varieties*, `ccsd-0086927`, 28 Sep 2006, 1–34.
58. Y. Choi, S. Yoon, *Homology of the double and the triple loop spaces of E_6 , E_7 and E_8* . — Manuscripta Math. **103** (2000), 101–116.
59. V. Chernousov, *The kernel of the Rost invariant, Serre’s conjecture II and the Hasse principle for quasi-split groups D_4 , E_6 , E_7* . — Math. Ann. **326**, No. 2 (2003), 297–330.
60. A. M. Cohen, R. H. Cushman, *Gröbner bases and standard monomial theory*. — Computational algebraic geometry (Nice, 1992), Progr. Math., vol. 109, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1993), pp. 41–60.
61. A. M. Cohen, S. H. Murray, D. E. Taylor, *Computing in groups of Lie type*. — Math. Comput. **73** (2004), 1477–1498.
62. B. N. Cooperstein, *The fifty-six-dimensional module for E_7 . I. A four form for E_7* . — J. Algebra **173**, No. 2 (1995), 361–389.
63. T. De Medts, *A characterization of quadratic forms of type E_6 , E_7 and E_8* . — J. Algebra **252**, No. 2 (2002), 394–410.
64. L. E. Dickson, *The configurations of the 27 lines on a cubic surface and the 28 bitangents to a quartic curve*. — Amer. Math. Soc. Bull. **8** (1901), 63–70 (= Coll. Math. Papers, vol.5).
65. D. Đoković, *Explicit Cayley triples in real forms of E_7* . — Pacific J. Math. **191** (1999), 1–23.
66. D. Đoković, *The closure diagram for nilpotent orbits of the split real form of E_7* . — Represent. Theory **5** (2001), 284–316.
67. J. R. Faulkner, *A geometry for E_7* . — Trans. Amer. Math. Soc. **167** (1972), 49–58.
68. J. R. Faulkner, J. C. Ferrar, *Exceptional Lie algebras and related algebraic and geometric structures*. — Bull. London Math. Soc. **9**, No. 1 (1977), 1–35.

69. J. C. Ferrar, *Strictly regular elements in Freudenthal triple systems*. — Trans. Amer. Math. Soc. **174** (1972), 313–331.
70. J. C. Ferrar, *On the classification of Freudenthal triple systems and Lie algebras of type E_7* . — J. Algebra **62** (1980), 276–282.
71. I. B. Frenkel, V. Kac, *Basic representations of affine Lie algebras and dual resonance models*. — Invent. Math. **62**, No. 2 (1980), 23–66.
72. I. B. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex operator algebras and the Monster*, Academic Press, N. Y. et al., 1988.
73. H. Freudenthal, *Sur des invariants caractéristiques des groupes semi-simples*. — Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A **56** (1953), 90–94.
74. H. Freudenthal, *Sur le groupe exceptionnel E_7* . — Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A **56** (1953), 81–89.
75. H. Freudenthal, *Zur ebenen Oktavengeometrie*. — Indag. Math. **15** (1953), 195–200.
76. H. Freudenthal, *Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavenebene I–XI*. — Proc. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A **57** (1954), 218–230, 363–368; **58** (1955), 151–157, 277–285; **62** (1959), 165–201, 447–474; **66** (1963), 457–487.
77. H. Freudenthal, *Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie*. — Geom. Dedic. **19** (1985), 7–63.
78. R. S. Garibaldi, *Structurable algebras and groups of type E_6 and E_7* . — J. Algebra **236**, No. 2 (2001), 651–691.
79. R. S. Garibaldi, *Groups of type E_7 over arbitrary fields*. — Comm. Algebra **29**, No. 6 (2001), 2689–2710.
80. R. S. Garibaldi, *Cohomological invariants: exceptional groups and Spin groups*. — Preprint Emory Univ. Atlanta (2006), 1–75, with and appendix by D. W. Hoffmann.
81. Ph. Gille, *Le problème de Kneser–Tits*. — Séminaire Bourbaki No. 983 (2007), 1–39.
82. P. B. Gilkey, G. M. Seitz, *Some representations of exceptional Lie algebras*. — Geom. Dedicata **25**, no. 1–3 (1988), 407–416.
83. D. Ginzburg, *On standard L -functions for E_6 and E_7* . — J. Reine Angew. Math. **465** (1995), 101–131.
84. N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Gröbner bases and standard monomial bases*, 2001, 1–8.
85. R. Griess, A. Ryba, *Embeddings of $U_3(8)$, $Sz(8)$ and the Rudvalis group in algebraic groups of type E_7* . — Invent. Math. **116** (1994), 215–241.
86. A. L. Harebov, N. A. Vavilov, *On the lattice of subgroups of Chevalley groups containing a split maximal torus*. — Comm. Algebra **24**, No. 1 (1996), 109–133.
87. S. J. Haris, *Some irreducible representations of exceptional algebraic groups*. — Amer. J. Math. **93** (1971), 75–106.
88. R. Hazrat, V. Petrov, N. Vavilov, *Relative subgroups in Chevalley groups*. — J. K-theory **5** (2010), 603–618.
89. R. Hazrat, N. Vavilov, Zhang Zuhong, *Relative commutator calculus in Chevalley groups*. — J. Algebra (2010), 1–28, to appear.
90. J.-Y. Hée, *Groupes de Chevalley et groupes classiques*. — Seminar on finite groups, Vol. II, Publ. Math. Univ. Paris VII, vol. 17, Univ. Paris VII, Paris, 1984, pp. 1–54.
91. R. B. Howlett, L. J. Rylands, D. E. Taylor, *Matrix generators for exceptional groups of Lie type*. — J. Symb. Comput. **11** (2000), 1–17.

92. H. Kaji, O. Yasukura, *Projective geometry of Freudenthal's varieties of certain type*. — Michigan Math. J., **52**, No. 3 (2004), 515–542.
93. V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge Univ. Press, 2nd ed., 1985.
94. P. Kleidman, A. Ryba, *Kostant's conjecture holds for $E_7: L_2(37) < E_7(C)$* . — J. Algebra **161** (1993), 535–540.
95. P. Kleidman, U. Meierfrankenfeld, A. Ryba, $HS < E_7(5)$. — J. London Math. Soc. **60** (1999), 95–107.
96. V. Lakshmibai, P. Littelmann, P. Magyar, *Standard monomial theory and applications*. — Representation Theory and Geometry. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht et al., (1998), 319–364.
97. V. Lakshmibai, C. S. Seshadri, *Standard monomial theory*. — Hyderabad Conf. on Algebraic Groups, Madras, Manoj Prakashan, (1991), 279–323.
98. J. M. Landsberg, L. Manivel, *The projective geometry of Freudenthal's magic square*. — J. Algebra **239**, No. 2 (2001), 477–512.
99. W. Lichtenstein, *A system of quadrics describing the orbit of the highest weight vector*. — Proc. Amer. Math. Soc. **84**, No. 4 (1982), 605–608.
100. P. Littelmann, *Contracting modules and standard monomial theory for symmetrisable Kac-Moody algebras*. — J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 551–567.
101. P. Littelmann, *The path model, the quantum Frobenius map and standard monomial theory*. — Algebraic Groups and Their Representations. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht et al., (1998), 175–212.
102. J. Lurie, *On simply laced Lie algebras and their minuscule representations*. — Comment. Math. Helv. **166** (2001), 515–575.
103. A. Luzgarev, V. Petrov, N. Vavilov, *Explicit equations on orbit of the highest weight vector*, (2010), to appear.
104. J. G. M. Mars, *Les nombres de Tamagawa de certains groupes exceptionnels*. — Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 97–140.
105. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*. — Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 1–62.
106. K. Mizuno, *The conjugate classes of unipotent elements of the Chevalley groups E_7 and E_8* . — Tokyo J. Math. **3**, No. 2 (1980), 391–461.
107. C. Parker, G. E. Röhrle, *Minuscule representations*.
108. V. Petrov, N. Semenov, K. Zainoulline, *Zero cycles on a twisted Cayley plane*. — Canad. Math. Bull. **51**, No. 1 (2008), 114–124.
109. V. Petrov, A. Stavrova, *Tits indices over semilocal rings*. — Transformation Groups, (2010), 1–25, to appear.
110. V. Petrov, A. Stavrova, N. Vavilov, *Relative elementary subgroups in isotropic reductive groups*, (2010), to appear.
111. E. B. Plotkin, *On the stability of the K_1 -functor for Chevalley groups of type E_7* . — J. Algebra **210**, No. 1 (1998), 67–85.
112. E. B. Plotkin, A. A. Semenov, N. A. Vavilov, *Visual basic representations: an atlas*. — Internat. J. Algebra Comput. **8**, No. 1 (1998), 61–95.
113. R. Richardson, G. E. Röhrle, R. Steinberg, *Parabolic subgroups with abelian unipotent radical*. — Invent. Math. **110**, No. 3 (1992), 649–671.
114. Röhrle, *On the structure of parabolic subgroups in algebraic groups*. — J. Algebra **157**, No. 1 (1993), 80–115.

115. G. E. Röhrle, *On extraspecial parabolic subgroups*. — Contemp. Math. **153** (1993), 143–155.
116. H. Rubenthaler, *The (A_2, G_2) duality in E_6 , octonions and the triality principle*. — Trans. Amer. Math. Soc. **360**, No. 1 (2008), 347–367.
117. A. J. E. Ryba, *Identification of matrix generators of a Chevalley group*. — J. Algebra **309** (2007), 484–496.
118. L. J. Rylands, D. E. Taylor, *Construction for octonion and exceptional Jordan algebras*. — Preprint Univ. Sydney (2000), 1–11.
119. J. Sekiguchi, *Configurations of seven lines on the real projective plane and the root system of type E_7* . — J. Math. Soc. Japan **51**, No. 4 (1999), 987–1013.
120. C. S. Seshadri, *Geometry of G/P . I. Standard monomial theory for minuscule P* , C.P.Ramanujam: a tribute, Bombay: Tata Press, (1978), 207–239.
121. E. Shult, *Embeddings and hyperplanes of the Lie incidence geometry of type $E_{7,1}$* . — J. Geom. **59** (1997), 152–172.
122. T. A. Springer, *Some groups of type E_7* . — Nagoya Math. J. **182** (2006), 259–284.
123. T. A. Springer, F. D. Veldkamp, *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
124. A. Stavrova, *Normal structure of maximal parabolic subgroups in Chevalley groups over commutative rings*. — Algebra Coll. **16**, No. 4 (2009), 631–648.
125. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings*. — Amer. J. Math. **93** (1971), 965–1004.
126. M. R. Stein, *Stability theorems for K_1 , K_2 and related functors modeled on Chevalley groups*. — Japan. J. Math. (N.S.) **4**, No. 1 (1978), 77–108.
127. A. Stepanov, N. Vavilov, *On the length of commutators in Chevalley groups*. — Israel J. Math. (2010), 1–20 to appear.
128. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau*. — Applications of algebraic K -theory to algebraic geometry and number theory, Part I, II (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 693–710.
129. J. Tits, *Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exceptionnels*. — Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **39** (1953), 309–329.
130. J. Tits, *Le plan projectif des octaves et les groupes exceptionnels E_6 et E_7* . — Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **40** (1954), 29–40.
131. J. Tits, *Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles. I. Construction*. — Indag. Math. (1966), No. 28, 223–237.
132. L. N. Vaserstein, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*. — Tôhoku Math. J. (2) **38**, No. 2 (1986), 219–230.
133. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings*. — Nonassociative algebras and related topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 219–335.
134. N. A. Vavilov, *A third look at weight diagrams*. — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.
135. N. A. Vavilov, *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type E_l* . — Зап. научн. семин. ПОМИ **281** (2001), 60–104.
136. N. A. Vavilov, *An A_3 -proof of structure theorems for Chevalley groups of types E_6 and E_7* . — Int. J. Algebra Comput. **17**, no. 5–6 (2007), 1283–1298.

137. N. A. Vavilov, A. Yu. Luzgarev, A. V. Stepanov, *Calculations in exceptional groups over rings*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 48–72.
138. N. A. Vavilov, E. B. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations*. — Acta Appl. Math. **45**, No. 1 (1996), 73–113.
139. R. Weiss, *Moufang quadrangles of type E_6 and E_7* . — J. Reine Angew. Math. **590** (2006), 189–226.
140. Xu Xiaoping, *Polynomial representation of F_4 and a new combinatorial identity about twenty-four*, arXiv:0810.4670[math.RT], 26 Oct 2008, 1–18.
141. Xu Xiaoping, *Polynomial representation of E_6 and its combinatorial and PDE implications*, arXiv:0811.1399[math.RT], 10 Nov 2008, 1–24.
142. Xu Xiaoping, *Polynomial representation of E_7 and its combinatorial and PDE implications*, arXiv:0812.1432[math.RT], 8 Dec 2008, 1–37.

Vavilov N. A., Luzgarev A. Yu. Chevalley group of type E_7 in the 56-dimensional representation.

The present paper is devoted to a detailed computer study of the action of Chevalley group $G(E_7, R)$ on the 56-dimensional minimal module $V(\varpi_7)$. Our main objectives are an explicit choice and tabulation of the signs of structure constants for this action, compatible with a given choice of a positive Chevalley base, construction of multilinear invariants and of the equations, satisfied by the matrix entries of matrices from $G(E_7, R)$ in this representation, and explicit tabulation of root elements. These calculations are performed in four numberings of weights: the natural one, as well as those compatible with the A_6 -branching, the D_6 -branching, and the E_6 -branching. Similar tables for the action of Chevalley group $G(E_6, R)$ on the 27-dimensional minimal module $V(\varpi_1)$ were published in our joint paper with Igor Pevzner.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vavilov@pdmi.ras.ru

Поступило 24 ноября 2010 г.

Einstein Institute of Mathematics,
Hebrew University of Jerusalem
E-mail: mahalex@yandex.ru