

С. А. Назаров

**АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННОГО ЧИСЛА  
ВОЛНОВОДА С ТОНКИМ ЭКРАНИРУЮЩИМ  
ПРЕПЯТСТВИЕМ И АНОМАЛИИ ВУДА**

**1. Постановка задачи.** Пусть  $\Pi$  – полоса-волновод  $\mathbb{R} \times (-1/2, 1/2)$  и  $\Theta(\varepsilon)$  – тонкое ( $\varepsilon$  – малый положительный параметр) множество-экран,

$$\Theta(\varepsilon) = \{x = (x_1, x_2) : x_2 \in (-a_-, a_+), \\ -\varepsilon H_-(x_2) < x_1 < \varepsilon H_+(x_2)\}; \quad (1.1)$$

при этом  $H_{\pm}$  – гладкие функции на сегменте  $[-a_-, a_+] \subset (-1/2, 1/2)$  и  $H_+ + H_- \geq 0$ . В области  $\Omega(\varepsilon) = \Pi \setminus \overline{\Theta(\varepsilon)}$  (рис. 1а) рассмотрим спектральную задачу Неймана для оператора Лапласа  $\Delta$

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon(x) u^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega(\varepsilon), \quad \partial_{n^\varepsilon} u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega(\varepsilon), \quad (1.2)$$

которой из-за возможных особенностей решения в концевых точках экрана придадим вид интегрального тождества [1]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)} = \lambda^\varepsilon(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega(\varepsilon)}, \quad v^\varepsilon \in H^1(\Omega(\varepsilon)). \quad (1.3)$$

Здесь  $\lambda^\varepsilon$  – спектральный параметр,  $\partial_{n^\varepsilon}$  – производная вдоль внешней нормали на границе  $\partial\Omega(\varepsilon)$ , причем  $\partial_{n^\varepsilon} = \pm\partial_2$  на сторонах  $\varpi^\pm = \mathbb{R} \times \{\pm 1/2\}$  полосы и

$$\partial_{n^\varepsilon} = (1 + \varepsilon^2 H_{\pm}'(x_2)^2)^{-1/2} (\mp\partial_1 + \varepsilon H_{\pm}'(x_2)\partial_2) \quad (1.4)$$

на сторонах  $\theta^\pm(\varepsilon) = \{x : x_2 \in (-a_-, a_+), x_1 = \pm\varepsilon H_{\pm}(x_2)\}$  экрана (1.1),  $\nabla = (\partial_1, \partial_2)$  — оператор-градиент,  $\partial_j = \partial/\partial x_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $H_{\pm}' = \partial_2 H_{\pm}$ ,  $(\cdot, \cdot)_{\Omega(\varepsilon)}$  – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L_2(\Omega(\varepsilon))$ , и  $H^1(\Omega(\varepsilon))$  — пространство Соболева.

---

*Ключевые слова:* асимптотика собственного числа на непрерывном спектре, акустический волновод, захваченные волны на поверхности жидкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00759).

Поскольку левая часть (1.3) – положительная замкнутая билинейная форма, вариационной задаче (1.3) ставится [2, §10.1] в соответствие положительный самосопряженный неограниченный оператор  $A^\varepsilon$  в  $L_2(\Omega(\varepsilon))$ . Как известно (см., например, [3]) и нетрудно проверить, спектр  $\sigma^\varepsilon$  оператора  $A^\varepsilon$  непрерывный, и он заполняет всю замкнутую положительную вещественную полуось  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty)$ . В непрерывный спектр  $\sigma_c^\varepsilon$  могут быть вкраплены собственные числа, которые образуют точечный спектр  $\sigma_p^\varepsilon$  и являются предметом исследования в данной статье.

В работе [4] доказано существование по крайней мере одной точки  $\lambda_{\#}^\varepsilon \in \sigma_p^\varepsilon$  в случае препятствия (1.2), не обязательно тонкого, но симметричного относительно оси абсцисс (рис. 1а). Для рассматриваемой формы (1.1) препятствия результат [4] справедлив при дополнительных ограничениях: функции  $[0, a_+) \ni x_2 \mapsto H_\pm(x_2)$  монотонно убывающие (не исключаются случаи  $H_+ = 0, H_- \geq 0$  или  $H_- = 0, H_+ \geq 0$ ) и

$$a := a_+ = a_-, \quad H_\pm(x_2) = H_\pm(-x_2), \quad |x_2| \leq a. \quad (1.5)$$

Метод [4] состоит в постановке искусственных краевых условий

$$u_{\#}^\varepsilon(x_1, 0) = 0, \quad x_2 \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon H_-(0), \varepsilon H_+(0)], \quad (1.6)$$

на линии симметрии волновода с экраном, которые обеспечивают возникновение полуинтервала  $[0, \pi^2) \in \overline{\mathbb{R}_+}$ , свободного от непрерывного спектра задачи (1.2), (1.6) (уравнение Гельмгольца и краевое условие Неймана сужаются на верхнюю половину волновода  $\Omega_{\#}(\varepsilon) = \{x \in \Omega(\varepsilon) : x_2 > 0\}$  и его границы; ср. рис. 1а, и 2а). Появление положительной нижней грани  $\pi^2$  непрерывного спектра позволяет применить к оператору  $A_{\#}^\varepsilon$  задачи (1.2), (1.6) максиминимальный принцип (см., например, [2, теорема 10.2.2]) и, подобрав подходящую пробную функцию  $u^{\text{test}} \in H_{\#}^1(\Omega(\varepsilon))$ , для которой выполнено условие Дирихле (1.6), а дробь Рэлея удовлетворяет соотношению

$$\frac{\|\nabla u^{\text{test}}; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2}{\|u^{\text{test}}; L_2(\Omega(\varepsilon))\|^2} < \pi^2,$$

убедиться в существовании собственного числа  $\lambda_{\#}^\varepsilon \in (0, \pi^2)$  задачи (1.2), (1.6) с экспоненциально затухающей собственной функцией  $u_{\#}^\varepsilon \in H^1(\Omega_{\#}(\varepsilon))$ , называемой *захваченной волной*. Наконец, продолжение функции  $u_{\#}^\varepsilon$  по нечетности с верхней (рис. 2а) на нижнюю по-

ловину волновода – гладкое благодаря искусственным краевым условиям (1.6) – доставляет нетривиальное решение задачи (1.3) со спектральным параметром  $\lambda^\varepsilon = \lambda_{\#}^\varepsilon \in (0, \pi^2)$ , оказывающимся собственным числом оператора  $A^\varepsilon$ .

Подчеркнем, что метод [4] безразличен к присутствию малого параметра  $\varepsilon$ . Он нашел многочисленные применения, в частности, и для других задач математической физики (см. [5–7] для системы уравнений теории упругости, [8–10] для спектральных задач теории поверхностных волн и др.). При малом  $\varepsilon$  возможен асимптотический анализ сингулярно возмущенной задачи (1.2), (1.6). Так, повторив с незначительными изменениями выкладки и рассуждения из статьи [11], приходим к следующей асимптотической формуле для найденного методом [4] собственного числа:

$$\lambda^\varepsilon = \pi^2 - 4\varepsilon^2 \pi^4 \left( \int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 \right)^2 + O(\varepsilon^3). \quad (1.7)$$

Формула (1.7) верна при условии

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 > 0. \quad (1.8)$$

В случае равенства нулю интеграла из (1.8) точечный спектр при малом  $\varepsilon > 0$  по-прежнему не пуст и его полная кратность на интервале  $(0, \pi^2)$  равна единице, однако формула (1.7) для собственного числа в значительной степени изменяет асимптотическую структуру (см. [11]). Если же справедливо неравенство, противоположное (1.8), то собственных чисел на  $(0, \pi^2)$  у задачи (1.2), (1.6) нет (опять-таки при малом  $\varepsilon > 0$  (см. [11])).

В работе [11] обоснование представления (1.7) проведено при помощи аппарата теории спектральной меры (см., например, [2, гл. 6]), однако в данной статье для вывода этих и других асимптотических формул используются совершенно иные соображения, примененные впервые в работах [12, 13].

Упомянутые результаты о существовании и асимптотике собственных чисел требуют полной геометрической симметрии (1.5) и теряют силу при ее отсутствии. Более того, в статье [14] проверено, что при

сдвиге препятствия  $\Theta(\varepsilon)$ , симметричного, но не обязательно тонкого, вдоль оси абсцисс на малое расстояние  $\delta$ , собственное число  $\lambda_{\#}^{\varepsilon}$  оператора  $A^{\varepsilon}$  исчезает, превращаясь в точку комплексного резонанса с мнимой частью  $O(\delta^2)$ . Из-за этого результата сложилось мнение (см. [4, с. 25] и [15, с. 17]), что образование собственных чисел на непрерывном спектре – событие крайне редкое и неустойчивое по своей природе. Цель настоящей статьи — убедиться в том, что при достаточно произвольном выборе параметров  $a_{\pm}$  и  $H_{\pm}$  тонкого экрана (1.1) и малом  $\varepsilon > 0$  оператор  $A^{\varepsilon}$  задачи (1.2) имеет собственное число на интервале  $(0, \pi^2)$  без предположения (1.5).<sup>1</sup> Иными словами, собственное число на непрерывном спектре сохраняется, претерпевая лишь малое возмущение, если сопроводить сдвиг экрана вдоль оси ординат согласованной деформацией его профиля (ср. пример 7.6, 2)).

Проверка упомянутого факта опирается на асимптотический анализ вспомогательного объекта – расширенной матрицы рассеяния  $S(\varepsilon)$ , введенной в [16] для конических и в [17] для цилиндрических областей. Собственные числа матрицы  $S(\varepsilon)$  как раз и служат идентификатором точечного спектра  $\sigma_p^{\varepsilon}$ .

Для значительного упрощения изложения и сокращения формул примем дополнительные предположения:

$$H(x_2) := H_+(x_2) = H_-(x_2) \geq 0, \tag{1.9}$$

$$H \in C^2[-a_-, a_+], \quad H(\pm a_{\pm}) = H'(\pm a_{\pm}) = 0. \tag{1.10}$$

Иными словами, согласно требованию (1.9) экран  $\Theta(\varepsilon)$  симметричен относительно оси ординат (не путать с отвергнутым условием (1.5) симметричности относительно оси абсцисс) и согласно требованию (1.10) имеет пикообразные заострения (см. рис. 1b и 2b, а также п. 7 по поводу возможных обобщений). Тем не менее, область  $\Omega(\varepsilon)$  представима как объединение липшицевых областей с общей для всех  $\varepsilon \in (0, 1]$  мажорантой для постоянной Липшица. Далее считаем, что функция  $H$  продолжена нулем с сегмента  $[-a_-, a_+]$  на все сечение  $(-1/2, 1/2)$  полосы  $\Pi$ .

Для сохранения собственного числа на непрерывном спектре требуется соблюсти несколько условий. Во-первых, должно быть выполнено соотношение (1.8). Во-вторых, нужно допустить вариацию ( $\eta$  –

---

<sup>1</sup>Кстати, результат о существовании и отсутствии собственных чисел при нарушении монотонности функций  $H_{\pm}$  также не вытекает из результатов [4] (см. пример 7.6, 1)).

малый параметр) профильной функции

$$H(x_2) = H_0(x_2) + \eta \mathbf{H}(x_2), \quad (1.11)$$

и, в-третьих, подчинить основную часть функции (1.11) условию ортогональности, а поправочное слагаемое – условию нормировки

$$\int_{-1/2}^{1/2} H_0(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2 = 0, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \mathbf{H}(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2 = 1. \quad (1.12)$$

Финальная теорема 7.4 утверждает, что при всяком малом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  найдется такое малое  $\eta$ , что на интервале  $(0, \pi^2)$  существует собственное число задачи (1.2) в волноводе с экраном  $\Theta(\varepsilon)$ , заданном формулами (1.1) и (1.9), (1.11).

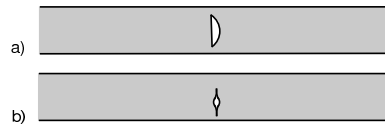


Рис. 1. Волноводы с тонкими экранами, симметричными относительно осей абсцисс (а) и ординат (б).

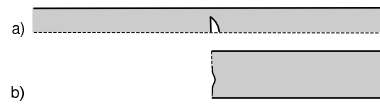


Рис. 2. Усечение волноводов, учитывающее симметрию относительно осей абсцисс (а) и ординат (б).

Задача (1.2) описывает волновые процессы в акустическом волноводе с жесткими стенками, а также к ней при помощи разделения переменных сводится задача о распространении волн на поверхности жидкости в трехмерном канале с прямоугольным сечением и препятствием в виде колонны (см., например, [18] и [19] соответственно).

Обрисует структуру статьи. В п. 2 и п. 3 приводятся классификации волн, физическая и естественная, определяется расширенная матрица рассеяния и доказываются достаточные условия существования собственного числа оператора  $A^\varepsilon$  (предложения 3.1, 3.3 и следствие 3.4). Асимптотика расширенной матрицы рассеяния конструируется в п. 4 и обосновывается в п. 5 (теорема 5.3), а в п. 6 найдена

асимптотика коэффициента отражения (теорема 6.2) и обсуждаются аномалии Вуда. Наконец, доказательство существования собственного числа  $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2)$  дано в п. 7 (теорема 7.4), а также в замечании 7.5 перечислены доступные обобщения, в основном касающиеся различных форм концов экрана  $\Theta(\varepsilon)$  (ср. рис. 3).

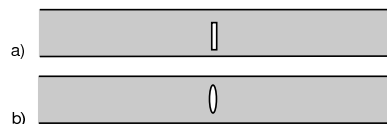


Рис. 3. Тонкие экраны с затупленным (а) и скругленным (б) концами.

**2. Уходящие и приходящие волны.** При  $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2)$  в задаче (1.2) появляются две *осциллирующие* волны

$$w_0^\pm(x) = (4\lambda^\varepsilon)^{-1/4} e^{\pm ix_1 \sqrt{\lambda^\varepsilon}} \quad (2.1)$$

( $i$  – мнимая единица), а также бесконечный набор *экспоненциальных* волн, среди которых будет востребована только первая (с наименьшими показателями роста/затухания) пара

$$v_1^\pm(x) = (4(\pi^2 - \lambda^\varepsilon))^{-1/4} \sin(\pi x_2) e^{\pm x_1 \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}}. \quad (2.2)$$

В соответствии со знаком волнового числа  $\pm \sqrt{\lambda^\varepsilon}$  волна  $w_0^-$  называется *приходящей* с бесконечности, а волна  $w_0^+$  – *уходящей* на бесконечность в правой половине

$$\Omega_+(\varepsilon) = \{x \in \Omega(\varepsilon) : x_1 > 0\} \quad (2.3)$$

волновода  $\Omega(\varepsilon)$  (ср. рис. 1а, и, и рис. 2b). Такая классификация соотносится с принципом излучения Зоммерфельда (см., например, [3]), который, впрочем, не работает в пороговой ситуации  $\lambda^\varepsilon = \pi^2$ , так как не позволяет отнести к какому-либо классу *стоячую*

$$v_1^0(x) = \sin(\pi x_2) \quad (2.4)$$

и *резонансную*

$$v_1^1(x) = x_1 \sin(\pi x_2) \quad (2.5)$$

волны.

В статье [20] (см. также книгу [21, §5.3]) предложена иная классификация, охватывающая пороговую ситуацию и основанная на анализе формы

$$\mathbf{q}(v, w) = \int_{-1/2}^{1/2} \left( \overline{w(R, x_2)} \partial_1 v(R, x_2) - v(R, x_2) \overline{\partial_1 w(R, x_2)} \right) dx_2. \quad (2.6)$$

Эта форма оказывается полуторалинейной ( $\mathbf{q}(\alpha v, \beta w) = \alpha \bar{\beta} \mathbf{q}(v, w)$ ) и антисимметричной ( $\mathbf{q}(v, w) = -\overline{\mathbf{q}(w, v)}$ ), т.е. симплектической и, кроме того, независит от параметра  $R > R_0$  для любых решений  $v$  и  $w$  уравнения Гельмгольца в полуполосе  $\Pi(R_0) = (R_0, +\infty) \times (-1/2, 1/2)$  с условиями Дирихле на ее боковых сторонах. Последнее свойство обеспечено формулой Грина, и для перечисленных выше волн параметр  $R$  можно брать любым, в том числе отрицательным. Вместе с тем, предельный переход  $R \rightarrow -\infty$  требует рассмотрения формы  $-\mathbf{q}(v, w)$ : смена знака обусловлена противоположным направлением распространения уходящей волны.<sup>2</sup> Иными словами, в общем случае определение (2.6) должно содержать производную  $\partial_n$  вдоль внешней нормали к сечениям волновода.

Основное наблюдение, сделанное в [20], состоит в следующем: для волн (2.1) справедливы формулы

$$\mathbf{q}(w_j^\pm, w_k^\pm) = \pm i \delta_{j,k}, \quad \mathbf{q}(w_j^\pm, w_k^\mp) = 0, \quad (2.7)$$

где  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера и пока  $j = k = 0$ . Таким образом, логично считать волну  $W$  уходящей или приходящей с бесконечности в  $\Omega_\mp(\varepsilon)$ , если  $\text{Im } \mathbf{q}(W, W) > 0$  или  $\text{Im } \mathbf{q}(W, W) < 0$  соответственно. Именно в этом смысле при  $\lambda^\varepsilon = \pi^2$  (на пороге) линейные волны

$$w_1^\pm(x) = (x_1 \mp i) \sin(\pi x_2) \quad (2.8)$$

объявляются уходящей (плюс) или приходящей (минус). При этом волны (2.1) и (2.8) удовлетворяют соотношениям (2.7), в которых теперь  $j, k = 0, 1$ . В отличие от *физических* условий излучения Зоммерфельда, допускающих только уходящие (с положительным волновым

<sup>2</sup>Условие симметрии (1.9), затребованное в п. 1 и сводящее задачу на половину (2.3) волновода  $\Omega(\varepsilon)$ , позволяет без загромождения обозначений избежать возможной путаницы в названиях “уходящая/приходящая волна для области, обладающей двумя выходами на бесконечность”.

числом) волны, условия излучения, порожденные формой (2.7), названы [20] *естественными*. Физические и естественные условия излучения неразличимы в межпороговой ситуации  $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2)$ , однако на пороге  $\lambda^\varepsilon = \pi^2$  физические условия обычно допускают стоячую волну (2.4), а естественные – всегда уходящую линейную волну  $w_1^+$ . Последнее обстоятельство оказывается решающим при определении матрицы рассеяния, которая на пороге теряет унитарность в случае физических условий излучения.

В работе [20] (см. также монографию [21, §5.3]) показано, что классификация, основанная на применении симплектической формы (2.6), пригодна и для общих эллиптических краевых задач, включенных в симметричную формулу Грина. Сама же форма  $\mathbf{q}$  в задачах распространения электромагнитных волн тесно связана с вектором Пойнтинга–Умова (ср. [21, §5.6]).

В статье [17] предложены<sup>3</sup> к рассмотрению линейные комбинации

$$w_1^\pm(x) = v_1^+(x) \mp i v_1^-(x) \tag{2.9}$$

экспоненциальных волн (2.2), возникающих при  $\lambda \in (0, \pi^2)$ . Нетрудно убедиться в том, что соотношения (2.7) при  $j, k = 0, 1$  остаются верными и для волн (2.1), (2.9). Таким образом, и волны (2.9) можно условно назвать уходящей (плюс) и приходящей (минус). Польза от введения экспоненциальных волн (2.9) станет понятной в очередном разделе.

**3. Расширенная матрица рассеяния и достаточное условие существования захваченной волны.** Пользуясь симметрией (1.9) области  $\Omega(\varepsilon)$  относительно оси ординат, назначим искусственное условие Неймана (ср. замечание 4.1)

$$-\partial_1 u^\varepsilon(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in (-1/2, -a_-) \cup (a_+, 1/2). \tag{3.1}$$

Далее, рассматривая спектральную задачу Неймана (1.2), (3.1) в полубесконечном волноводе (2.3) (рис. 2b), подразумеваем, что уравнение Гельмгольца из (1.2) сужено с  $\Omega(\varepsilon)$  на  $\Omega_+(\varepsilon)$ . Вариационная формулировка этой задачи выглядит так:

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)} = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)}, \quad v^\varepsilon \in H^1(\Omega_+(\varepsilon)) \tag{3.2}$$

---

<sup>3</sup>На самом деле определение [17] отличается от (2.9) множителями  $\pm i$ ; новая формула удобна потому, что “разводит” два собственных числа матрицы  $S(\varepsilon)$  в разные половины единичной окружности (ср. следствие 6.1).



(ср. интегральное тождество (1.3)). Ей отвечает положительный самосопряженный оператор  $A_{\mp}^{\varepsilon}$  в  $L_2(\Omega_{\mp}(\varepsilon))$  со спектром  $\sigma_{\mp}^{\varepsilon} = \overline{\mathbb{R}}_{+}$ . Если  $\lambda_{\mp}^{\varepsilon}$  – собственное число задачи (3.2) с собственной функцией  $u_{\mp}^{\varepsilon} \in H^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))$ , четное продолжение последней с  $\Omega_{\mp}(\varepsilon)$  на  $\Omega(\varepsilon)$  оказывается собственной функцией  $u_{\mp}^{\varepsilon} \in H^1(\Omega(\varepsilon))$  исходной задачи (1.3), а значит,  $\lambda_{\mp}^{\varepsilon} \in \sigma_p^{\varepsilon}$ .

Пусть  $\lambda^{\varepsilon} \in (0, \pi^2)$ . Как известно (см. [3], [21, §5.3] и др.) задача о дифракции волны на искривленном торце

$$\varpi(\varepsilon) = \{x : |x_2| < 1/2, x_1 = \varepsilon H(x_2)\} \quad (3.3)$$

волновода  $\Omega_{\mp}(\varepsilon)$  имеет решение  $u_0^{\varepsilon} \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_{\mp}(\varepsilon)})$ , представимое в виде

$$u_0^{\varepsilon}(x) = w_0^{-}(x) + s(\varepsilon)w_0^{+}(x) + O\left(e^{-x_1\sqrt{\pi^2-\lambda^{\varepsilon}}}\right). \quad (3.4)$$

Первое слагаемое в правой части (3.4) – приходящая (падающая) волна, а второе содержит уходящую (отраженную) волну, причем  $s(\varepsilon)$  – комплексный коэффициент отражения, модуль которого благодаря нормировке (2.7) равен единице.

Памятуя об искусственном происхождении части стенки (3.3), можно все-таки называть скаляр  $s(\varepsilon)$  (элементарной) *матрицей рассеяния*, однако помнить, что настоящая матрица рассеяния в задаче (1.2) имеет размеры  $2 \times 2$  и составлена из пар коэффициентов отражения и прохождения. Сокращение матрицы рассеяния до размеров  $1 \times 1$  существенно упрощает все доказательства. Например, упомянутое равенство  $|s(\varepsilon)| = 1$  вытекает (подробности см. в замечании 3.5) из формул  $w_0^{-}(x) = \overline{w_0^{+}(x)}$  и  $u_0^{\varepsilon}(x) = \overline{s(\varepsilon)^{-1}u_0^{\varepsilon}(x)}$ , обеспеченных самими определениями (2.1) и (3.4). Схожие упрощения нетрудно обнаружить и в доказательствах очередных двух утверждений, заимствованных из работы [17] и предоставляющих *расширенную матрицу рассеяния*  $S(\varepsilon)$  размером  $2 \times 2$ , а также достаточное условие существования захваченной волны.

**Предложение 3.1.** При  $\lambda^{\varepsilon} \in (0, \pi^2)$  задача (1.2), (3.1) имеет два решения  $U_j^{\varepsilon}$ , допускающих разложения

$$U_j^{\varepsilon}(x) = w_j^{-}(x) + \sum_{k=0}^1 S_{kj}(\varepsilon)w_k^{+}(x) + O\left(e^{-x_1\sqrt{4\pi^2-\lambda^{\varepsilon}}}\right), \quad (3.5)$$

а коэффициенты  $S_{kj}(\varepsilon)$ ,  $j, k = 0, 1$ , образуют унитарную матрицу  $S(\varepsilon)$ .

**Доказательство.** Введем весовое пространство  $W_{\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))$ , состоящее из функций  $v^{\varepsilon} \in H_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_{\pm}(\varepsilon)})$ , для которых конечна норма

$$\|v^{\varepsilon}; W_{\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))\| = \|e^{\beta x_1} v^{\varepsilon}; H^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))\|. \quad (3.6)$$

Отметим, что  $W_0^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon)) = H^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))$ , но при  $\beta > 0$  функции из  $W_{\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))$  исчезают на бесконечности с экспоненциальной скоростью, а при  $\beta < 0$  могут иметь экспоненциальный рост. Требуемая скорость затухания и допустимая скорость роста регулируются весовым показателем  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $f^{\varepsilon} \in W_{-\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))^*$  – линейный непрерывный функционал на пространстве  $W_{-\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))$ . Под *обобщенным* решением  $u^{\varepsilon} \in W_{\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))$  неоднородной (с правой частью  $f^{\varepsilon}$ ) задачи (1.2), (1.10) понимаем функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} (\nabla u^{\varepsilon}, \nabla v^{\varepsilon})_{\Omega_{\pm}(\varepsilon)} - \lambda^{\varepsilon} (u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\Omega_{\pm}(\varepsilon)} &= (f^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\Omega_{\pm}(\varepsilon)}, \\ v^{\varepsilon} &\in W_{-\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Подчеркнем, что  $(\cdot, \cdot)_{\Omega_{\pm}(\varepsilon)}$  – расширение скалярного произведения в пространстве  $L_2(\Omega_{\pm}(\varepsilon))$  до двойственности между подходящими пространствами, в том числе весовыми пространствами Лебега, т.е. в силу формулы (3.6) все слагаемые в равенстве (3.7) определены корректно.

Задаче (3.7) отвечает отображение

$$W_{\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon)) \ni u^{\varepsilon} \mapsto \mathcal{A}_{\beta}^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = f^{\varepsilon} \in W_{-\beta}^1(\Omega_{\pm}(\varepsilon))^*. \quad (3.8)$$

Оператор  $\mathcal{A}_{\beta}^{\varepsilon}$  является непрерывным при любом  $\beta \in \mathbb{R}$ , однако согласно общим результатам теории<sup>4</sup> эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. ключевые работы [23–27] и, например, монографию [21])  $\mathcal{A}_{\beta}^{\varepsilon}$  теряет фредгольмово свойство при запретных весовых показателях

$$\beta_0 = 0 \quad \text{и} \quad \beta_{\pm k} = \pm \sqrt{k^2 \pi^2 - \lambda^{\varepsilon}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

<sup>4</sup>Обычно эта теория имеет дело с краевыми задачами в классической постановке, но переход к обобщенным решениям не встречает сколь-нибудь заметных препятствий (ср. [22]).

Показатели  $\beta_0$  и  $\beta_{\pm 1}$ , разумеется, связаны с волнами (2.1) и (2.2), из которых нетрудно соорудить сингулярные последовательности Вейля, устанавливающие незамкнутость образа  $\mathcal{A}_{\pm\beta_p}^\varepsilon W_{\pm\beta_p}^1(\Omega_+(\varepsilon))$  оператора (3.8) (см., например, [21, §3.1, §4.1] и [22]). Запретные показатели  $\beta_{\pm k}$  с  $k \geq 2$  порождены другими экспоненциальными волнами. Тем не менее, ядро оператора  $\mathcal{A}_\beta^\varepsilon$  остается конечномерным при любых значениях спектрального параметра  $\lambda^\varepsilon$  и весового показателя  $\beta$  ([21, замечание 3.1.5]), что обеспечивает совпадение существенного и непрерывного спектров оператора  $\mathcal{A}_\pm^\varepsilon$ .

Возьмем

$$\gamma \in \left( \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}, \sqrt{4\pi^2 - \lambda^\varepsilon} \right) = (\beta_1, \beta_2) \quad (3.9)$$

и рассмотрим два фредгольмовых оператора  $\mathcal{A}_\gamma^\varepsilon$  и  $\mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon$ , которые согласно их определению оказываются взаимно сопряженными. Поскольку всюду исследуем только случай  $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2]$ , можно зафиксировать  $\gamma = \sqrt{2}\pi$ .

Теорема об асимптотике [24] (см. также [21, теоремы 3.1.4 и 5.1.4 (2)]) показывают, что в случае  $f^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))^* \subset W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon))^*$  любое решение  $u_{-\gamma}^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))$  задачи (3.7) с весовым показателем  $\beta = -\gamma$  допускает представление

$$u^\varepsilon(x) = \sum_{\pm} \sum_{j=0}^1 c_j^\pm w_j^\pm(x) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \quad \tilde{u}^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon)), \quad (3.10)$$

причем

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}^\varepsilon; W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon))\| + \sum_{\pm} \sum_{j=0}^1 |c_j^\pm| \\ & \leq c_\gamma (\|f^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))^*\| + \|u^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))\|). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Соотношения (3.10) и (3.11) влекут за собой (см. [21, теоремы 4.3.3 и 5.1.4 (4)] следующую формулу, связывающую индексы операторов  $\mathcal{A}_{\pm\gamma}^\varepsilon$ :

$$\text{Ind } \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon = \text{Ind } \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon + 4$$

(последнее слагаемое – количество волн, отделенных в асимптотике (3.10)). Таким образом,

$$2 = -\text{Ind } \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon = \text{Ind } \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon = \dim \ker \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon - \dim \ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon,$$

а значит, ядро  $\ker \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon$  представимо в виде

$$\ker \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon = K_\gamma^\varepsilon \oplus \ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon,$$

где  $K_\gamma^\varepsilon$  – двумерное подпространство. Если в нем нет двух элементов, подчиненных соотношению (3.5), то найдется решение  $U^\varepsilon \in \ker \mathcal{A}_{-\gamma}^\varepsilon \ominus \ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon$  однородной задачи (3.7) с  $\beta = -\gamma$ , для которого верно разложение<sup>5</sup>

$$U^\varepsilon = c_0 w_0^+ + c_1 w_1^+ + \tilde{U}^\varepsilon, \quad \tilde{U}^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon)). \quad (3.12)$$

При этом в силу условий (2.7) имеем

$$0 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbf{q}(U^\varepsilon, U^\varepsilon) = \mathbf{q}(c_0 w_0^+ + c_1 w_1^+, c_0 w_0^+ + c_1 w_1^+) = i|c_0|^2 + i|c_1|^2,$$

так как форма (2.6), вычисленная для решения (3.12), не зависит от параметра  $R$ , а влияние быстро затухающего остатка  $\tilde{U}^\varepsilon$  устранено предельным переходом  $R \rightarrow +\infty$ . Следовательно,  $c_0 = c_1 = 0$  и  $U^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon))$ , что противоречит предположению  $U^\varepsilon \notin \ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon$ .

Проверка унитарности матрицы  $S(\varepsilon)$  столь же проста:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \mathbf{q}(U_j^\varepsilon, U_k^\varepsilon) = \mathbf{q}\left(w_j^- + \sum_{m=0}^1 S_{mj}(\varepsilon) w_m^+, w_k^-(x) + \sum_{n=0}^1 S_{nk}(\varepsilon) w_n^+\right) \\ &= i \left( \sum_{m=0}^1 S_{mj}(\varepsilon) \overline{S_{nk}(\varepsilon)} - \delta_{j,k} \right); \end{aligned} \quad (3.13)$$

иными словами,  $S(\varepsilon)^* S(\varepsilon) = \mathbb{I}$  — единичная матрица. □

**Замечание 3.2.** Еще раз укажем, что согласованная с определением (3.8) запись соотношения (3.5) выглядит так:

$$U_j^\varepsilon = w_j^- + \sum_{k=0}^1 S_{kj}(\varepsilon) w_k^+ + \tilde{U}_j^\varepsilon, \quad \tilde{U}_j^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon)). \quad (3.14)$$

---

<sup>5</sup>Включение для  $\tilde{U}^\varepsilon$  – возможная интерпретация остатка  $O\left(e^{-x_1 \sqrt{4\pi^2 - \lambda^\varepsilon}}\right)$  в разложении (3.5); ср. далее замечание 3.2.

Аналогично вместо (3.4) следует писать разложение

$$u_0^\varepsilon = w_0^- + s(\varepsilon)w_0^+ + \tilde{u}_0^\varepsilon, \quad \tilde{u}_0^\varepsilon \in W_\beta^1(\Omega_+(\varepsilon)), \quad (3.15)$$

где  $\beta \in (0, \sqrt{\pi^2 - \lambda^\varepsilon}) = (\beta_0, \beta_1)$ . Сами функции (3.14) и (3.15) определены с точностью до слагаемых из подпространств  $\ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon$  и  $\ker \mathcal{A}_\beta^\varepsilon$  соответственно, однако вследствие достаточно быстрого затухания этих слагаемых коэффициенты  $S_{kj}(\varepsilon)$  и  $s(\varepsilon)$  остаются неизменными при любом выборе  $U_j^\varepsilon$  и  $u_0^\varepsilon$ . Подчеркнем, что в силу предположения (1.10) о гладкости торца (3.3) каждое решение однородной задачи (1.2), (3.1) принадлежит классам  $H_{\text{loc}}^2(\Omega_+(\varepsilon))$  и  $C_{\text{loc}}^1(\overline{\Omega_+(\varepsilon)})$  (см., например, [21, гл. 2]), т.е. соотношения (3.5) и (3.4) все-таки имеют смысл.  $\square$

**Предложение 3.3.** *Если при  $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2)$  правый нижний элемент  $S_{11}(\varepsilon)$  расширенной матрицы рассеяния  $S(\varepsilon)$  равен  $-1$ , то  $\lambda^\varepsilon$  – собственное число оператора  $A_\mp^\varepsilon$ , а  $U_1^\varepsilon \in H^1(\Omega_+(\varepsilon))$  – соответствующая собственная функция.*

**Доказательство.** Поскольку столбцы унитарной матрицы имеют единичную длину, т.е.  $|S_{01}(\varepsilon)|^2 + |S_{11}(\varepsilon)|^2 = 1$ , при сформулированном условии справедливо равенство  $S_{01}(\varepsilon) = 0$ . Таким образом, при учете формул (3.5) и (2.2) находим:

$$U_1^\varepsilon = w_1^- - w_1^+ + \tilde{U}_j^\varepsilon = 2iv_1^- + \tilde{U}_j^\varepsilon.$$

Осталось заметить, что обе функции  $v_1^-$  и  $\tilde{U}_j^\varepsilon$  принадлежат пространству  $H^1(\Omega_+(\varepsilon))$  ввиду их экспоненциального затухания на бесконечности.  $\square$

**Следствие 3.4.** *Пусть  $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2)$  и  $s(\varepsilon) \neq -1$ . Если  $-1$  – собственное число расширенной матрицы рассеяния  $S(\varepsilon)$ , то  $\lambda^\varepsilon$  и  $U_1^\varepsilon$  – собственные число и функция оператора  $A_\mp^\varepsilon$ .*

**Доказательство.** Предположим, что  $S_{11}(\varepsilon) \neq -1$  (иначе нужное утверждение вытекает из предложения 3.3). Обозначив многоточием слагаемые, исчезающие на бесконечности с экспоненциальной скоростью, переписываем формулы (3.5), (3.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} U_0^\varepsilon &= w_0^- + S_{00}(\varepsilon)w_0^+ + S_{10}(\varepsilon)v_1^+ + \dots, \\ U_1^\varepsilon &= (1 + S_{11}(\varepsilon))v_1^+ + S_{01}(\varepsilon)w_0^+ + \dots. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$\begin{aligned} U_0^\varepsilon - (S_{11}(\varepsilon) + 1)^{-1} S_{10}(\varepsilon) U_1^\varepsilon \\ = w_0^- - (S_{00}(\varepsilon) + S_{10}(\varepsilon)(S_{11}(\varepsilon) + 1)^{-1} S_{10}(\varepsilon)) w_0^+ + \dots \end{aligned}$$

имеет такое же разложение на бесконечности, что и разложение (3.4), (3.15) функции  $u_0^\varepsilon$ . При учете сказанного в замечании 3.2 о коэффициенте отражения заключаем, что

$$s(\varepsilon) = S_{00}(\varepsilon) - \frac{S_{01}(\varepsilon)S_{10}(\varepsilon)}{S_{11}(\varepsilon) + 1}. \quad (3.16)$$

Пусть  $(a_0(\varepsilon), a_1(\varepsilon))$  – собственный вектор матрицы  $S(\varepsilon)$ , отвечающий ее собственному числу  $-1$ . В силу формулы (3.16) из равенств

$$\begin{aligned} (S_{00}(\varepsilon) + 1)a_0(\varepsilon) + S_{01}(\varepsilon)a_1(\varepsilon) &= 0, \\ S_{10}(\varepsilon)a_0(\varepsilon) + (S_{11}(\varepsilon) + 1)a_1(\varepsilon) &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

вытекает, что

$$(s(\varepsilon) + 1)a_0(\varepsilon) = 0,$$

а значит,  $a_0(\varepsilon) = 0$  по сформулированному условию. Ввиду предположения  $S_{11}(\varepsilon) \neq -1$  второе равенство (3.17) приводит к формулам  $a_1(\varepsilon) = 0$  и  $a(\varepsilon) = 0 \in \mathbb{C}^2$  для собственного вектора. Полученное противоречие показывает, что  $S_{11}(\varepsilon) = -1$  в условиях следствия, т.е. нужное утверждение обеспечено предложением 3.3.  $\square$

Подчеркнем, что достаточное условие, сформулированное в предложении 3.3 и следствии 3.4, не является необходимым, так как расширенная матрица рассеяния  $S(\varepsilon)$  никак не отражает наличие или отсутствие захваченных волн, принадлежащих пространству  $W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon))$  и тем самым исчезающих на бесконечности с достаточно высокой экспоненциальной скоростью. Игнорирование этого обстоятельства при создании вычислительных схем может привести к ошибкам (некоторые из них обсуждаются в статьях [28, 29]). Более правильно для этих целей использовать бесконечномерный аналог расширенной матрицы рассеяния – *оператор фиктивного рассеяния* [29, 28], дающий *критерий* существования захваченных волн, который не востребован в настоящей статье лишь потому, что в предложении 5.1 удалось проверить отсутствие быстрозатухающих захваченных волн.

**Замечание 3.5.** Благодаря равенствам  $w_p^\pm = \overline{w_p^\mp}$ , вытекающим из определений (2.1), (2.9) и уже использованным перед предложением 3.1, матрица  $S(\varepsilon)$  обладает замечательными свойствами

$$S_{01}(\varepsilon) = S_{10}(\varepsilon), \quad |S_{00}(\varepsilon)| = |S_{11}(\varepsilon)|. \quad (3.18)$$

В самом деле, оперируя со строками решений и волн, запишем две формулы (3.14) как одну:

$$(U_0^\varepsilon, U_1^\varepsilon) = (w_0^-, w_1^-) + (w_0^+, w_1^+)S(\varepsilon) + (\tilde{U}_0^\varepsilon, \tilde{U}_1^\varepsilon). \quad (3.19)$$

Имеем

$$(\overline{U_0^\varepsilon}, \overline{U_1^\varepsilon}) = (w_0^+, w_1^+) + (w_0^-, w_1^-)\overline{S(\varepsilon)} + (\overline{\tilde{U}_0^\varepsilon}, \overline{\tilde{U}_1^\varepsilon}),$$

т.е.

$$(\overline{U_0^\varepsilon}, \overline{U_1^\varepsilon})\overline{S(\varepsilon)}^{-1} = (w_0^-, w_1^-) + (w_0^+, w_1^+)\overline{S(\varepsilon)}^{-1} + (\overline{\tilde{U}_0^\varepsilon}, \overline{\tilde{U}_1^\varepsilon})\overline{S(\varepsilon)}^{-1}, \quad (3.20)$$

В согласии со сказанным в замечании 3.2 строки решений (3.19) и (3.20) различаются лишь слагаемыми из пространства  $\ker \mathcal{A}_\gamma^\varepsilon$ , которые не влияют на коэффициенты при волнах  $w_p^\pm$  из-за слишком быстрого затухания на бесконечности. Таким образом,  $\overline{S(\varepsilon)}^{-1} = S(\varepsilon)$ , откуда благодаря совпадению обратной  $S(\varepsilon)^{-1}$  и сопряженной  $S(\varepsilon)^*$  для унитарной матрицы  $S(\varepsilon)$  выводим формулу  $\overline{S(\varepsilon)} = S(\varepsilon)^*$  и указанные свойства (3.19).  $\square$

**4. Формальная асимптотика расширенной матрицы рассеяния.** В этом разделе асимптотические анзацы для элементов матрицы  $S(\varepsilon)$  будут “угаданы”, но в следующем разделе займемся их обоснованием.

Пусть

$$\lambda^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^2 \mu \in (0, \pi^2), \quad (4.1)$$

где  $\mu$  – положительная величина, которая далее будет варьироваться. Элементы расширенной матрицы рассеяния ищем в виде

$$\begin{aligned} S_{pp}(\varepsilon) &= S_{pp}^0 + \varepsilon S_{pp}^1 + \dots, \\ S_{pq}(\varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} (S_{pq}^0 + \varepsilon S_{pq}^1 + \dots) \quad \text{при } p \neq q, \end{aligned} \quad (4.2)$$

причем теперь многоточием обозначаем члены, не существенные для предпринимаемого формального асимптотического анализа. Воспользуемся соотношениями (4.1), (4.2) и (2.1), (2.2), (2.9) и применим к слагаемым из правой части (3.5) формулу Тейлора. Для одного из специальных решений получаем, что

$$\begin{aligned}
 U_1^\varepsilon(x) &= (4\varepsilon^2\mu)^{-1/4} \sin(\pi x_2) \left( (e^{x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} + ie^{-x_1\varepsilon\sqrt{\mu}}) \right. \\
 &\quad \left. + (S_{11}^0 + \varepsilon S_{11}^1 + \dots)(e^{x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} - ie^{-x_1\varepsilon\sqrt{\mu}}) \right) \\
 &\quad + (4(\pi^2 - \varepsilon^2\mu))^{-1/4} \varepsilon^{1/2} (S_{01}^0 + \varepsilon S_{01}^1 + \dots) e^{ix_1\sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2\mu}} + \dots \\
 &= \varepsilon^{-1/2} (4\mu)^{-1/4} \sin(\pi x_2) ((1+i) + S_{11}^0(1-i)) \quad (4.3) \\
 &\quad + \varepsilon^{1/2} (4\mu)^{-1/4} \sin(\pi x_2) (x_1\sqrt{\mu}((1-i) + S_{11}^0(1+i)) \\
 &\quad + S_{11}^1(1-i)) + \varepsilon^{1/2} (2\pi)^{-1/2} S_{01}^0 e^{ix_1\pi} + \dots.
 \end{aligned}$$

Подразумевая последующее сращивание асимптотических разложений, внутреннего, справедливого в конечной части волновода  $\Omega_{\vdash}(\varepsilon)$ , и внешнего, приемлемого только на значительном удалении от его торца  $\varpi(\varepsilon)$ , будем искать внутреннее разложение как сумму

$$U_1^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/2} \mathbf{U}_1^0(x) + \varepsilon^{1/2} \mathbf{U}_1^1(x) + \dots, \quad (4.4)$$

извлекая информацию о надлежащем поведении асимптотических членов  $\mathbf{U}_1^0$  и  $\mathbf{U}_1^1$  на бесконечности из правой части (4.3).

Формальный переход к  $\varepsilon = 0$  спрямляет торец (3.3) полуполосы  $\Omega_{\vdash}(\varepsilon)$  и превращает задачу (1.2), (3.1) в однородную ( $g = 0$ ) задачу Неймана для уравнения Гельмгольца с предельным значением параметра (4.1)

$$\begin{aligned}
 -\Delta \mathbf{u}(x) &= \pi^2 \mathbf{u}(x), \quad x \in \Pi_{\vdash} = [0, +\infty) \times (-1/2, 1/2), \\
 \pm \partial_2 \mathbf{u}(x_1, \pm 1/2) &= 0, \quad x_1 > 0, \quad -\partial_1 \mathbf{u}(0, x_2) = g(x_2), \quad |x_2| < 1/2. \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

При  $g = 0$  имеется пара явных решений

$$\mathbf{u}_0(x) = (2\pi)^{-1/2} (e^{-i\pi x_1} + e^{i\pi x_1}), \quad \mathbf{u}_1(x) = \sin(\pi x_2). \quad (4.6)$$

**Замечание 4.1.** Вместо краевых условий Неймана (3.1) на части торца искусственно образованного полуполосы (2.3) можно было бы поставить условия Дирихле

$$u^\varepsilon(0, x_2) = 0, \quad x_2 \in (-1/2, -a_-) \cup (a_+, 1/2),$$



а затем воспользоваться *нечетным* относительно переменной  $x_1$  продолжением собственной функции на левую (отсутствующую на рис. 2b) часть области  $\Omega(\varepsilon)$ . Однако полученная таким образом смешанная краевая задача не имеет явных решений, что затрудняет асимптотический анализ, предпринимаемый в настоящей работе.  $\square$

Учитывая множитель при  $\varepsilon^{-1/2}$  в правой части (4.3), положим

$$\mathbf{U}_1^0(x) = (4\mu)^{-1/4} \sin(\pi x_2) ((1+i) + S_{11}^0(1-i)) =: B_0 \mathbf{u}_1(x). \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) удовлетворяет уравнению Гельмгольца в полуполосе  $\Omega_+( \varepsilon)$  и условию Неймана на ее боковых сторонах, но оставляет невязку в краевом условии на искривленном торце  $\varpi(\varepsilon)$  (см. определение (3.1)). Вычислим эту невязку, приняв во внимание формулу (1.4) для производной  $\partial_{n\varepsilon}$ :

$$(1 + \varepsilon^2 H'(x_2)^2)^{1/2} \partial_{n\varepsilon} \mathbf{U}_1^0(\varepsilon H(x_2), x_2) = \varepsilon \pi B_0 H'(x_2) \cos(\pi x_2). \quad (4.8)$$

Таким образом, второму члену  $\mathbf{U}_1^1$  анзаца (4.4) следует быть решением задачи (4.5) с правой частью

$$g(x_2) = -\pi B_0 H'(x_2) \cos(\pi x_2). \quad (4.9)$$

Метод Фурье дает решение  $\mathbf{U}_1^1$  в виде сходящегося ряда

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_p^q(x) &= \mathbf{C} \mathbf{u}_1(x) + \mathbf{C}_0 e^{i\pi x_2} + \mathbf{C}_1 x_1 \sin(\pi x_2) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{\infty} \mathbf{C}_j \cos(\pi j(x_2 + 1/2)) e^{-\pi x_1 \sqrt{j^2 - 1}}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

причем коэффициент  $\mathbf{C}$  произволен<sup>6</sup> и

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= 2\pi B_0 \int_{-1/2}^{1/2} H'(x_2) \cos(\pi x_2) \sin(\pi x_2) dx_2 \\ &= -2\pi^2 B_0 \int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2, \\ \mathbf{C}_0 &= -i B_0 \int_{-1/2}^{1/2} H'(x_2) \cos(\pi x_2) dx_2 = -i \pi B_0 \int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2. \end{aligned}$$

<sup>6</sup>В п. 5 берем его равным нулю.

Линейный рост выражения (4.10) должен оказаться таким, как предписано множителем при  $\varepsilon^{1/2}$  в правой части (4.3), а значит, положив

$$\hbar = 2\pi^2 \int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2, \quad (4.11)$$

получаем соотношение

$$\sqrt{\mu}(1-i) + \sqrt{\mu}S_{11}^0(1+i) = -\hbar(1+i) - \hbar S_{11}^0(1-i),$$

откуда выводим формулу

$$S_{11}^0 = -\frac{\sqrt{\mu}(1-i) + \hbar(1+i)}{\sqrt{\mu}(1+i) + \hbar(1-i)} = -\frac{2\hbar\sqrt{\mu} + i(\hbar^2 - \mu)}{\hbar^2 + \mu}. \quad (4.12)$$

Подчеркнем, что  $S_{11}^0 = -1$  при  $\sqrt{\mu} = \hbar$ , однако последнее равенство имеет смысл только в том случае, когда интеграл (4.11) положителен. Именно из этого наблюдения проистекает ограничение (1.8).

Сравнивая в формулах (4.10) и (4.3) коэффициенты  $\mathbf{C}_0$  и  $(2\pi)^{-1/2}S_{01}^0$  при осциллирующей уходящей волне  $e^{i\pi x_1}$ , вычисляем величину

$$\begin{aligned} S_{01}^0 &= (2\pi)^{1/2}\mathbf{C}_0 \\ &= (2\pi)^{3/2}(4\mu)^{-1/4}(1-i) \frac{\mu + i\hbar\sqrt{\mu}}{\hbar^2 + \mu} \int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Связь (3.18) элементов расширенной матрицы рассеяния доставляет и значение члена  $S_{10}^0$  второго асимптотического анзаца (4.2). Слагаемое  $S_{11}^1$  этого анзаца осталось неизвестным, так как коэффициент  $\mathbf{C}$  в правой части (4.10) произволен. Оно может быть найдено на очередном шаге асимптотической процедуры, т.е. при построении младшего асимптотического члена  $\varepsilon^{3/2}\mathbf{U}_1^2(x)$ , — точно так же на первом шаге процедуры при построении главного члена  $\varepsilon^{-1/2}\mathbf{U}_1^0(x)$  не удалось выяснить, чему равна величина  $S_{11}^0 = S_{11}(0)$ . Само значение коэффициента  $S_{11}^1$  по существу востребовано не будет. Простая, но достаточная для наших целей информация о нем обнаруживается при учете равенства  $|S_{11}(\varepsilon)|^2 + |S_{01}(\varepsilon)|^2 = 1$ , которое в силу представлений (4.2) очевидным образом обеспечивает соотношение

$$2 \operatorname{Re} (S_{11}^0 S_{11}^1) = |S_{01}^0|^2. \quad (4.14)$$

Обращаем внимание на весьма важное обстоятельство:  $S_{11}^1 \neq 0$  в случае  $S_{01}^0 \neq 0$ .

Теперь обратимся к асимптотическому анализу верхнего левого элемента  $S_{00}(\varepsilon)$  расширенной матрицы рассеяния. Сначала заметим, что согласно формулам (3.5), (4.2) и (2.1), (2.2), (2.9) справедливо разложение

$$\begin{aligned} U_0^\varepsilon(x) &= (4(\pi^2 - \varepsilon^2 \mu))^{-1/4} \left( e^{-ix_1 \sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2 \mu}} + (S_{00}^0 + \varepsilon S_{00}^1 + \dots) e^{ix_1 \sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2 \mu}} \right) \\ &+ (4\varepsilon^2 \mu)^{-1/4} (\varepsilon^{1/2} S_{10}^0 + \varepsilon^{3/2} S_{10}^1 + \dots) \sin(\pi x_2) \left( e^{x_1 \varepsilon \sqrt{\mu}} - i e^{-x_1 \varepsilon \sqrt{\mu}} \right) + \dots \\ &= (2\pi)^{-1/2} \left( e^{-ix_1 \pi} + S_{00}^0 e^{ix_1 \pi} + \varepsilon S_{00}^1 e^{ix_1 \pi} \right) \quad (4.15) \\ &+ (4\mu)^{-1/4} \sin(\pi x_2) \left( S_{10}^0 (1 - i) + \varepsilon (x_1 \sqrt{\mu} S_{10}^0 (1 + i) + S_{10}^1 (1 - i)) \right) + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, в аналогичном (4.4) асимптотическом анзаце

$$U_0^\varepsilon(x) = \varepsilon^0 \mathbf{U}_0^0(x) + \varepsilon \mathbf{U}_0^1(x) + \dots \quad (4.16)$$

главный член приобретает вид

$$\mathbf{U}_0^0 = \mathbf{u}_0 + (4\mu)^{-1/4} S_{10}^0 (1 - i) \mathbf{u}_1, \quad (4.17)$$

причем по необходимости

$$S_{00}^0 = 1. \quad (4.18)$$

При анализе главного члена  $\mathbf{U}_0^0$  коэффициент  $S_{10}^0$  найти не удастся, но он равен (4.13) благодаря первой формуле (3.18).

Определим теперь составляющие  $\mathbf{U}_0^1$  и  $S_{00}^1$  разложений (4.16) и (4.2). Аналогично (4.8) невязка суммы (4.17) в однородном краевом условии Неймана на торце  $\varpi(\varepsilon)$  принимает вид

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon^2 H'(x_2)^2)^{1/2} \partial_{n\varepsilon} \mathbf{U}_0^0 &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( e^{-i\pi x_1} + e^{i\pi x_1} \right) \Big|_{x_1 = \varepsilon H(x_2)} \\ &+ \frac{1 - i}{(4\mu)^{1/4}} S_{10}^0 H'(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \sin(\pi x_2) = -\varepsilon g(x_2) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

причем

$$g(x_2) = -\pi(2\pi)^{1/2} H(x_2) - \pi(1 - i)(4\mu)^{-1/4} S_{10}^0 H'(x_2) \cos(\pi x_2). \quad (4.19)$$

Решение  $U_0^1$  задачи (4.5) с правой частью (4.19) представимо как ряд Фурье (4.10) с коэффициентом

$$S_{00}^1 = C_0 = -i(2\pi)^{-1/2} \int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) dx_2 - \pi(1+i)S_{10}^0 \int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2. \quad (4.20)$$

Подчеркнем, что равенство  $S_{00}^1 = C_0$  возникает в результате сравнения внутреннего (4.17) и внешнего (4.15) разложений. Кроме того, появилась возможность определить коэффициент  $S_{10}^0$ , но он уже был найден ранее.

Поскольку никакие асимптотические члены в анзацах (4.2), кроме указанных равенствами (4.12), (4.18) и (4.13), (4.20), далее не понадобятся, формальный асимптотический анализ расширенной матрицы рассеяния закончен. Впрочем, процедуру построения асимптотики можно продолжить и найти полные асимптотические ряды для  $S_{pq}(\varepsilon)$ .

**5. Обоснование асимптотики расширенной матрицы рассеяния.** При переходе через порог  $\lambda^\varepsilon = \pi^2$  матрица рассеяния  $s(\varepsilon)$  (коэффициент отражения) претерпевает скачок хотя бы потому, что из-за появления при  $\lambda^\varepsilon > \pi^2$  второй (в дополнение к (2.1)) пары осциллирующих волн

$$w_1^\pm(x) = (4(\lambda^\varepsilon - \pi^2))^{-1/4} \sin(\pi x_2) e^{\pm i x_1 \sqrt{\lambda^\varepsilon - \pi^2}} \quad (5.1)$$

размеры матрицы рассеяния для задачи (1.2), (1.3) в области  $\Omega_\mp(\varepsilon)$  увеличивается с  $1 \times 1$  до  $2 \times 2$ . Более того, в работах [12, 13] установлено, что расширенная матрица рассеяния, сохраняющая размер  $2 \times 2$ , все-таки не выдерживает предельные переходы  $\lambda^\varepsilon \rightarrow \pi^2 \pm 0$ . Это вызвано нарушением непрерывности при трансформации экспоненциальных волн (2.2) в стоячую (2.4) и резонансную (2.5), а затем и в осциллирующие (5.1).

Покажем, как можно исправить положение дел с предельным переходом  $\lambda^\varepsilon \rightarrow \pi^2 - 0$ .

На основе приёма [30, замечание 1.3.20 и теорема 1.3.21] положим

$$w_1^{\varepsilon\pm}(x) = \left( \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\mu}} \left( e^{x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} - e^{-x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} \right) \mp \frac{i}{2} \left( e^{x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} + e^{-x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} \right) \right) \sin(\pi x_2). \quad (5.2)$$

Функции (5.2) “плавно” переходят в функции

$$w_1^{0\pm}(x) = (x_1 \mp i) \sin(\pi x_2),$$

образованные из линейных волн (2.8), а именно, нетрудно убедиться в справедливости такой оценки при  $p = 1$ :

$$\|w_p^{\varepsilon\pm} - w_p^{0\pm}; W_{-\gamma}^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))\| \leq c\varepsilon. \quad (5.3)$$

Волны (5.2) и (2.8) удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{q}(w_p^{\varepsilon\pm}, w_q^{\varepsilon\pm}) = \pm i\delta_{p,q}, \quad \mathbf{q}(w_p^{\varepsilon\pm}, w_q^{\varepsilon\mp}) = 0, \quad p, q = 0, 1, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (5.4)$$

**Предложение 5.1.** Пусть  $\lambda^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^2\mu$ . Найдутся такие  $\mu_0, \varepsilon_0 > 0$ , что при  $\mu \in [0, \mu_0)$  и  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  задача (3.7) с показателем  $\beta = -\gamma$  и правой частью  $f^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))^* \subset W_\gamma^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))^*$  имеет единственное решение  $\zeta^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))$ , допускающее представление

$$\tilde{\zeta}^\varepsilon = \zeta^\varepsilon - t_0^\varepsilon w_0^{\varepsilon+} - t_1^\varepsilon w_1^{\varepsilon+} \in W_\gamma^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon)), \quad (5.5)$$

причем волны  $w_0^{\varepsilon\pm}(x) = (4(\pi^2 - \varepsilon^2\mu))^{-1/4} e^{\pm ix_1\sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2\mu}}$  удовлетворяют соотношениям (2.7), (5.3), и выполнено неравенство

$$\|\tilde{\zeta}^\varepsilon; W_\gamma^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))\| + |t_0^\varepsilon| + |t_1^\varepsilon| \leq c\|f^\varepsilon; W_\gamma^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))^*\| \quad (5.6)$$

с множителем  $c$ , не зависящим от указанных выше  $\varepsilon$ ,  $\mu$  и  $f^\varepsilon$ . У этой же однородной задачи есть два решения  $\zeta_j^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon))$ , подчиненные включениям

$$\tilde{\zeta}_j^\varepsilon = \zeta_j^\varepsilon - T_{0j}^\varepsilon w_0^{\varepsilon+} - T_{1j}^\varepsilon w_1^{\varepsilon+} \in W_\gamma^1(\Omega_{\mp}(\varepsilon)), \quad (5.7)$$

а коэффициенты  $T_{kj}^\varepsilon$  образуют унитарную матрицу  $T^\varepsilon$ , для которой справедливо представление

$$T^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon). \quad (5.8)$$

**Доказательство.** Сначала отметим, что при любых допустимых  $\varepsilon$  и  $\mu$  единственность решения, подчиненного условию (5.5), и унитарность матрицы  $T^\varepsilon$  обеспечены исключительно соотношениями (2.7) и (5.4). В самом деле, предположив, что такое решение неединственно, получим решение  $\zeta^0$  однородной задачи (3.7), для которого выполнено соотношение (5.5). Теперь остается повторить с незначительными изменениями конец доказательства предложения 3.1, начиная с формулы (3.12), причем выкладка (3.13) установит унитарность матрицы  $T^\varepsilon$ .

Рассмотрим предельную задачу (4.5), переписанную как интегральное тождество

$$(\nabla\zeta^0, \nabla v^0)_{\Pi_+} - \pi^2(\zeta^0, v^0)_{\Pi_+} = (f^0, v^0)_{\Pi_+}, \quad v^0 \in W_\gamma^1(\Pi_+). \quad (5.9)$$

Для нее утверждения очевидны, так как возможно разделение переменных, и согласно методу Фурье однородная задача (4.5) не имеет экспоненциально затухающих решений, а два ограниченных решения (4.6) могут быть записаны в виде<sup>7</sup> (5.7) с диагональной матрицей  $T^0$ , указанной первой в правой части (5.8).

В силу требования (1.10) область  $\Omega_+$  трансформируется в область  $\Pi_+$  посредством “почти тождественного”  $C^2$ -диффеоморфизма  $\Phi^\varepsilon = \mathbb{I}_2 + \varepsilon\Psi^\varepsilon$ ; здесь  $\|\Psi^\varepsilon; C^2(\Omega_+(\varepsilon))^2\| \leq C$ . Таким образом, при малом  $\varepsilon > 0$  задача (3.7) с параметром  $\lambda^\varepsilon = \pi^2$  наследует все свойства задачи (5.9).

Операторы задачи (3.7) с разными параметрами  $\lambda^\varepsilon = \pi^2$  и  $\lambda^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^2\mu$ , но одной областью определения  $W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))$ , также мало отличаются один от другого. Поскольку отделяемые члены асимптотики  $w_p^{\varepsilon\pm}$  удовлетворяют оценке (5.3), предложение доказано.  $\square$

**Следствие 5.2.** Пусть выполнены условия предложения 5.1 и  $\lambda^\varepsilon = \pi^2 - \varepsilon^2\mu < \pi^2$ , т.е.  $\varepsilon > 0$ . Тогда у задачи (3.7) имеется единственное решение  $u^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))$ , удовлетворяющее включению

$$\tilde{u}^\varepsilon = u^\varepsilon - a_0^\varepsilon w_0^+ - a_1^\varepsilon w_1^+ \in W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon)), \quad (5.10)$$

<sup>7</sup>Заметили, что  $\mathbf{u}_1(x) = \frac{1}{2}i((x_1 + i)\sin(\pi x_2) - (x_1 - i)\sin(\pi x_2))$ .

и оценке

$$\|\tilde{u}^\varepsilon; W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon))\| + |a_0^\varepsilon| + \varepsilon^{1/2}|a_1^\varepsilon| \leq C \|f^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))^*\|. \quad (5.11)$$

При этом  $w_0^\pm$  и  $w_1^\pm$  – прежние волны (2.1) и (2.9), (2.2), а множитель  $C$  не зависит от параметров  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\mu \in (0, \mu_0]$  и правой части  $f^\varepsilon \in W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))^*$ .

**Доказательство.** Сначала повторим первый абзац доказательства предложения 5.1 и поймем, что осталось проверить следующий факт: коэффициенты  $c_p^\varepsilon$  в общем решении  $\zeta^\varepsilon + c_0^\varepsilon \zeta_0^\varepsilon + c_1^\varepsilon \zeta_1^\varepsilon$  можно подобрать так, чтобы для него было выполнено соотношение (5.10). В исправлении нуждаются только множители

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2} - i)t_1^\varepsilon + \frac{1}{2}c_1^\varepsilon \left( (\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2} + i) + T_{11}^\varepsilon(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2} - i) \right), \\ & \frac{1}{2}(-\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2} - i)t_1^\varepsilon + \frac{1}{2}c_1^\varepsilon \left( (-\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2} + i) + T_{11}^\varepsilon(-\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2} - i) \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

при экспоненциальных волнах  $e^{x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} \sin(\pi x_2)$  и  $e^{-x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} \sin(\pi x_2)$  соответственно: а суммарный множитель при уходящей волне  $e^{ix_1\sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2\mu}}$  может остаться любым, но множитель при приходящей волне  $e^{-ix_1\sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2\mu}}$  должен быть нулевым, т.е. нужно положить  $c_0^\varepsilon = 0$ . Согласно равенствам (2.2) и (2.9) суммы (5.12) нужно превратить в такие выражения:

$$\varepsilon^{-1/2}(4\mu)^{-1/4}a_1^\varepsilon, \quad -i\varepsilon^{-1/2}(4\mu)^{-1/4}a_1^\varepsilon. \quad (5.13)$$

Приравняем соответственные величины в списках (5.12) и (5.13), составив тем самым систему двух линейных уравнений относительно неизвестных  $c_1^\varepsilon$  и  $a_1^\varepsilon$ . После простых преобразований матрица  $M^\varepsilon$  этой системы принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2^{-1}(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}(T_{11}^\varepsilon + 1) - i(T_{11}^\varepsilon - 1)) & \varepsilon^{-1/2}(4\mu)^{-1/4} \\ -2^{-1}(\varepsilon^{-1}\mu^{-1/2}(T_{11}^\varepsilon + 1) + i(T_{11}^\varepsilon - 1)) & -i\varepsilon^{-1/2}(4\mu)^{-1/4} \end{pmatrix},$$

а ее определитель равен

$$\det M^\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon^{-1/4}(4\mu)^{-1/2}(1-i)\left\{\mu^{-1/2}\varepsilon^{-1}(T_{11}^\varepsilon + 1) - (T_{11}^\varepsilon - 1)\right\}. \quad (5.14)$$

Согласно строению (5.8) унитарной матрицы  $T^\varepsilon$  имеем

$$T_{11}^\varepsilon - 1 = -2 + O(\varepsilon), \quad \operatorname{Re}(\varepsilon^{-1}(T_{11}^\varepsilon + 1)) = O(\varepsilon).$$

Последнее соотношение выполнено, в частности, потому, что норма второго столбца матрицы  $T^\varepsilon$  равна единице и

$$2\operatorname{Re}(T_{11}^\varepsilon + 1) = -|T_{11}^\varepsilon + 1|^2 - |T_{01}^\varepsilon|^2 = O(\varepsilon^2)$$

(ср. формулу (4.14)). Итак, вещественная часть выражения из фигурных скобок в правой части (5.14) есть  $2 + O(\varepsilon)$ , а значит,

$$0 < c \leq \varepsilon^{-1/2} |\det M^\varepsilon| \leq C\varepsilon^{-1/2}.$$

Матрица  $M^\varepsilon$  обратима, система однозначно разрешима и верна оценка<sup>8</sup>

$$\varepsilon^{1/2}|a_1^\varepsilon| + \varepsilon|c_1^\varepsilon| \leq c|t_1^\varepsilon|.$$

Кроме того,  $a_0^\varepsilon = t_0^\varepsilon + T_{10}^\varepsilon c_1^\varepsilon$  и  $|a_0^\varepsilon| \leq c(|t_0^\varepsilon| + |t_1^\varepsilon|)$ , так как  $T_{10}^\varepsilon = O(\varepsilon)$ . Осталось применить неравенство (5.6) из предложения 5.1.  $\square$

Приступим к обоснованию асимптотики, построенной в п. 4. С этой целью сконструируем глобальные асимптотические приближения  $U_p^{\text{asym}}$  к указанным предложением 1 решениям  $U_p^\varepsilon$  задачи (1.2), (3.1) с параметром (4.1) и применим процедуру [31] (см. также, например, [30, гл. 2]), использующую срезки с “перехлестывающимися” носителями, а именно, функции  $X_\varepsilon, X_\infty \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(x_1) &= \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 < \varepsilon^{-1}; \\ 0 & \text{при } x_1 > 1 + \varepsilon^{-1}; \end{cases} \\ X_\infty(x_1) &= \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 > 2; \\ 0 & \text{при } x_1 < 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Положим

$$U_1^{\text{asym}} = X_\varepsilon Z_1^0 + X_\infty Z_1^\infty - X_\varepsilon X_\infty Z_1^{0\infty}, \quad (5.16)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1^0(x) &= \varepsilon^{-1/2}(\mathbf{U}_1^0(x) + \varepsilon \mathbf{U}_1^1(x)), \\ Z_1^\infty(x) &= (4\varepsilon^2 \mu)^{-1/4} \sin(\pi x_2) \left( (e^{x_1 \varepsilon \sqrt{\mu}} + i e^{-x_1 \varepsilon \sqrt{\mu}}) \right) \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Удобно оценить  $a_1^\varepsilon$  по правилу Крамера, а затем, сложив строки системы, показать, что  $|c_1^\varepsilon| \leq c(|t_1^\varepsilon| + \varepsilon^{-1/2}|a_1^\varepsilon|)$ .



$$+S_{11}^0(e^{x_1\varepsilon\sqrt{\mu}} - ie^{-x_1\varepsilon\sqrt{\mu}}) + (4(\pi^2 - \varepsilon^2\mu))^{-1/4}\varepsilon^{1/2}S_{01}^0e^{ix_1\sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2\mu}},$$

$$Z_1^{0\infty}(x) = \varepsilon^{-1/2}(4\mu)^{-1/4}\sin(\pi x_2)((1+i) + S_{11}^0(1-i)) \quad (5.17)$$

$$+\varepsilon^{1/2}(4\mu)^{-1/4}\sin(\pi x_2)(x_1\sqrt{\mu}(e^{-i\psi}(1-i)+S_{11}^0(1+i))+\varepsilon^{1/2}(2\pi)^{-1/2}S_{01}^0e^{ix_1\pi}.$$

Подчеркнем, что вычитаемое  $Z_1^{0\infty}$  в правой части (5.16) содержит все слагаемые, подвергшиеся сращиванию при построении формальной асимптотики, и тем самым устраняет их дублирование в первых членах  $Z_1^0$  и  $Z_1^\infty$  из правой части (5.16). Очевидное равенство  $\nabla(X_\varepsilon X_\infty) = \nabla X_\varepsilon + \nabla X_\infty$  позволит при проведении коммутирования со срезками (5.15) присоединять член  $Z_1^{0\infty}$  либо к  $Z_1^0$ , либо к  $Z_1^\infty$ , обеспечивая нужную скорость затухания разностей.

Функция  $U_1^\varepsilon - U_1^{\text{asym}}$  попадает в пространство  $W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))$  и при любой пробной гладкой функции  $v^\varepsilon \in W_\gamma^1(\Omega_+(\varepsilon))$  выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} &(\nabla(U_1^\varepsilon - U_1^{\text{asym}}), \nabla v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)} - (\pi^2 - \varepsilon^2\mu)(U_1^\varepsilon - U_1^{\text{asym}}, v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)} \\ &= I(v^\varepsilon) = I^0 + I^\infty + I^{0\infty} + I_{\text{com}}^0 + I^\mu + I_{\text{com}}^\infty \\ &:= -(\nabla Z_1^0, \nabla(X_\varepsilon v^\varepsilon))_{\Omega_+(\varepsilon)} + \pi^2(Z_1^0, X_\varepsilon v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)} \\ &\quad -(\nabla Z_1^\infty, \nabla(X_\infty v^\varepsilon))_{\Pi_+} + (\pi^2 - \varepsilon^2\mu)(Z_1^\infty, X_\infty v^\varepsilon)_{\Pi_+} \\ &\quad +(\nabla Z_1^{0\infty}, \nabla(X_\varepsilon X_\infty v^\varepsilon))_{\Pi_+} - \pi^2(Z_1^{0\infty}, X_\varepsilon X_\infty v^\varepsilon)_{\Pi_+} \\ &\quad \quad -\varepsilon^\mu(Z_1^0 - X_\infty Z_1^{0\infty}, X_\varepsilon v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)} \quad (5.18) \\ &\quad -((Z_1^0 - Z_1^{0\infty})\nabla X_\varepsilon, \nabla v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)} + (\nabla(Z_1^0 - Z_1^{0\infty}), v^\varepsilon \nabla X_\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)} \\ &\quad -((Z_1^\infty - Z_1^{0\infty})\nabla X_\infty, \nabla v^\varepsilon)_{\Pi_+} + (\nabla(Z_1^\infty - Z_1^{0\infty}), v^\varepsilon \nabla X_\infty)_{\Pi_+}. \end{aligned}$$

Поочередно оценим каждое из образованных слагаемых. Имеем

$$\begin{aligned} |I^0| &= \varepsilon^{-1/2}|(\Delta + \pi^2)\mathbf{U}_1^0, X_\varepsilon v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)}| + \varepsilon^{1/2}|(\Delta + \pi^2)\mathbf{U}_1^1, X_\varepsilon v^\varepsilon)_{\Omega_+(\varepsilon)}| \\ &\quad + |(\partial_{n^\varepsilon}(\varepsilon^{-1/2}\mathbf{U}_1^0 + \varepsilon^{1/2}\mathbf{U}_1^1), v^\varepsilon)_{\varpi(\varepsilon)}| \leq c\varepsilon^{3/2}\|v^\varepsilon; L_2(\varpi(\varepsilon))\| \\ &\leq c\varepsilon^{3/2}\|v^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))\|. \quad (5.19) \end{aligned}$$

В выкладке (5.19) были использованы, во-первых, уравнение Гельмгольца для функций  $\mathbf{U}_1^0$  и  $\mathbf{U}_1^1$  (см. задачу (4.5)) и, во-вторых, краевые условия на торце (3.3) (ср. формулы (1.4), (4.8) и (4.9)), означающие,

что  $\partial_{n\varepsilon}(\varepsilon^{-1/2}\mathbf{U}_1^0(x) + \varepsilon^{1/2}\mathbf{U}_1^1(x)) = O(\varepsilon^{3/2})$  при  $x \in \varpi(\varepsilon)$ . Также важно то, что пробная функция  $X_\varepsilon v^\varepsilon$  имеет компактный носитель.

Поскольку введенная в (5.17) функция  $Z_1^\infty$  — линейная комбинация волн, отвечающих спектральному параметру  $\pi^2 - \varepsilon^2\mu$ , а пробная функция  $X_\infty v^\varepsilon$  обращается в нуль при  $x_1 < 2$ , видим, что  $I^\infty = 0$ . Аналогично получаем, что  $I^{0\infty} = 0$ , так как все фигурирующие в выражении для  $Z_1^{0\infty}$  функции  $\sin(\pi x_2)$ ,  $x_1 \sin(\pi x_2)$  и  $e^{i\pi x_1}$  аннулируются оператором  $\Delta + \pi^2$ , а произведение  $X_\varepsilon X_\infty v^\varepsilon$  опять-таки обладает компактным носителем в замкнутой полосе  $\mathbb{R} \times [-1/2, 1/2]$ .

По построению разность  $Z_1^0 - X_\infty Z_1^{0\infty}$  исчезает на бесконечности со скоростью  $O(\varepsilon^{1/2}e^{-\sqrt{3}\pi x_1})$  (ср. формулы (5.17) и (4.7), (4.6), а также (4.10) с  $p = 1$  и  $\mathbf{C} = 0$ ). Следовательно,

$$|I^\mu| \leq c\varepsilon^{3/2}\|v^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))\|.$$

Носители производных срезающих функций  $X_\varepsilon$  и  $X_\infty$  расположены на множествах  $\bar{\omega} \times [\varepsilon^{-1}, 1 + \varepsilon^{-1}]$  и  $\bar{\omega} \times [1, 2]$  соответственно. На первом множестве разность  $Z_1^0(x) - Z_1^{0\infty}(x)$  составляет  $O(e^{-\sqrt{3}\pi/\varepsilon})$ , а на втором функция  $Z_1^\infty$  допускает разложение (4.3), в котором следует положить  $S_{11}^1 = S_{01}^1 = 0$ ; иными словами,  $Z^0(x) - Z^{0\infty}(x) = O(\varepsilon^{3/2})$  при  $x_1 \in [1, 2]$ . В итоге обнаруживаем, что

$$|I_{\text{com}}^0| \leq c\varepsilon^{-\tau/\varepsilon}, \quad \tau > 0, \quad |I_{\text{com}}^\infty| \leq c\varepsilon^{3/2}\|v^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))\|.$$

Собирая полученную информацию, выводим неравенство

$$|I(v^\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{3/2}\|v^\varepsilon; W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))\|,$$

означающее, что правая часть интегрального тождества (5.18) — функционал из пространства  $W_{-\gamma}^1(\Omega_+(\varepsilon))$  с нормой  $O(\varepsilon^{3/2})$ . Кроме того, для разности  $U_1^\varepsilon - U_1^{\text{asym}}$  справедливо разложение (3.10), в котором отсутствуют коэффициенты  $a_0^-$  и  $a_1^-$  при приходящих волнах  $w_0^-$  и  $w_1^-$  (по определению у обеих функций первый из названных коэффициентов равен нулю, а второй — единице). Таким образом, следствие 5.2, точнее неравенство (5.11), дает оценки коэффициентов при уходящих волнах  $w_0^+$  и  $w_1^+$ , которые (оценки) в используемых обозначениях переписывается следующим образом:

$$|S_{11}(\varepsilon) - S_{11}^0| \leq c\varepsilon, \quad |S_{01}(\varepsilon) - \varepsilon^{1/2}S_{01}^0| \leq c\varepsilon^{3/2}. \quad (5.20)$$

Аналогичные асимптотические формулы для двух других элементов расширенной матрицы рассеяния

$$|S_{00}(\varepsilon) - S_{00}^0 - \varepsilon S_{00}^1| \leq c\varepsilon^2, \quad |S_{10}(\varepsilon) - \varepsilon^{1/2} S_{10}^0| \leq c\varepsilon^{3/2} \quad (5.21)$$

выводятся при помощи таких же выкладок и рассуждений применительно к специальному решению  $U_0^\varepsilon$  и его асимптотическому приближению

$$U_0^{\text{asym}} = X_\varepsilon Z_0^0 + X_\infty Z_0^\infty - X_\varepsilon X_\infty Z_0^{0\infty}, \quad (5.22)$$

в котором, основываясь на соотношениях (4.15)–(4.17), следует положить

$$Z_0^0(x) = \mathbf{U}_0^0(x) + \varepsilon \mathbf{U}_1^1(x),$$

$$Z_0^\infty(x) = (4(\pi^2 - \varepsilon^2 \mu))^{-1/4} \left( e^{-ix_1 \sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2 \mu}} + (S_{00}^0 + \varepsilon S_{00}^1) e^{-ix_1 \sqrt{\pi^2 - \varepsilon^2 \mu}} \right) + (4\varepsilon^2 \mu)^{-1/4} \varepsilon^{1/2} S_{10}^0 \sin(\pi x_2) (e^{x_1 \varepsilon \sqrt{\mu}} - i e^{x_1 \varepsilon \sqrt{\mu}}), \quad (5.23)$$

$$Z_0^{0\infty}(x) = (2\pi)^{-1/2} (e^{-ix_1 \pi} + S_{00}^0 e^{ix_1 \pi})$$

$$+ \varepsilon \left( S_{00}^1 e^{ix_1 \pi} + (4\mu)^{-1/4} \sin(\pi x_2) (S_{10}^0 (1 - i) + \varepsilon x_1 \sqrt{\mu} S_{10}^0 (1 + i)) \right).$$

Обращаем внимание на строение левой части оценки (5.11): модуль коэффициента  $a_0^\varepsilon$  при волне  $w_0^+$  не имеет малого множителя  $\sqrt{\varepsilon}$ , а модуль коэффициента  $a_1^\varepsilon$  при волне  $w_1^+$  имеет. Именно поэтому окончательные неравенства (5.20) и (5.21) несколько отличаются одно от другого.

Полчеркнем, что, привлекая в асимптотические конструкции (5.16), (5.17) и (5.22), (5.23) младшие члены можно уточнить асимптотические формулы (5.20) и (5.21), т.е. при любом наперед заданном натуральном  $N$  получить приближения для  $S_{p1}^e$  и  $S_{p0}^e$  с погрешностями  $O(\varepsilon^{N+(1-p)/2})$  и  $O(\varepsilon^{N+(2-p)/2})$  соответственно. Каких-либо новых соображений для всех этих действий не требуется.

Сформулируем проверенный результат.

**Теорема 5.3.** *Элементы расширенной матрицы рассеяния удовлетворяют неравенствам (5.20) и (5.21), в которых величины  $S_{11}^0$ ,  $S_{01}^0 = S_{10}^0$  и  $S_{00}^0$ ,  $S_{00}^1$  заданы формулами (4.12), (4.13) и (4.18), (4.20) соответственно.*

**6. Аномалии Вуда.** Оправданные в теореме 5.3 формальные асимптотические разложения позволяют исследовать собственные числа матрицы  $S(\varepsilon)$ .

**Следствие 6.1.** Для собственных чисел  $\rho_0(\varepsilon)$  и  $\rho_1(\varepsilon)$  расширенной матрицы рассеяния верны формулы

$$|\rho_0(\varepsilon) - 1| \leq C\varepsilon, \quad \left| \rho_1(\varepsilon) + \frac{2\hbar\sqrt{\mu} + i(\hbar^2 - \mu)}{\hbar^2 + \mu} \right| \leq C\varepsilon.$$

На первый взгляд кажется, что следствия 3.4 и 6.1 позволяют доказать существование захваченных волн в задаче (1.2), (3.1). Поясним сказанное. Во-первых, собственные числа унитарной матрицы  $S(\varepsilon)$  не могут покидать единичной окружности  $\mathbb{S}$  на комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  и, к тому же, при малом  $\varepsilon$  и некотором  $\mu_0 > 0$  справедливы высказывания

$$\mu = \hbar^2 + \mu_0 \Rightarrow \text{Im } \rho_1(\varepsilon) > 0, \quad \mu = \hbar^2 - \mu_0 \Rightarrow \text{Im } \rho_1(\varepsilon) < 0,$$

а значит, для какого-то  $\mu \in (\hbar^2 - \mu_0, \hbar^2 + \mu_0)$  собственное число  $\rho_1(\varepsilon)$  становится равным  $-1$ . Во-вторых другое собственное число  $\rho_0(\varepsilon)$  близко к единице, что, вроде бы, обеспечивает справедливость условий следствия 3.4. Убедимся в том, что именно последний вывод, вообще говоря, ошибочен.

Допустим, что справедливо условие

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2 \neq 0, \tag{6.1}$$

влекущее за собой неравенства  $S_{01}^0 \neq 0$  и  $S_{11}^1 \neq 0$  (ср. формулы (4.13) и (4.14)). Просматривая доказательство предложения 3.3, видим, что решение  $U_1^\varepsilon$  никак не может быть захваченной волной именно из-за не тривиального множителя  $S_{01}^\varepsilon$  при осциллирующей волне. Теперь следствие 3.4 гарантирует, что в ситуации  $\rho_1(\varepsilon) = -1$  коэффициент отражения  $s(\varepsilon)$  должен стать равным минус единице. В то же время формулы (3.16) и (4.2) предсказывают, что при  $S_{11}^0 \neq -1$  величина  $s(\varepsilon)$  близка к единице. Такая неувязка понуждает к более детальному исследованию асимптотики коэффициента отражения при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Анзацы (4.2) дают возможность вычислить коэффициент отражения  $s(\varepsilon)$  по формуле (3.16), которая сохраняется и при  $S_{11}(\varepsilon) = -1$ ,

так как в этом случае  $S_{01}(\varepsilon) = S_{10}(\varepsilon) = 0$  (см. доказательство предложения 3.3 и замечание 3.2), т.е. в числителе дроби из (3.16) возникает “двойной нуль” по сравнению со знаменателем. Теперь, учитывая предположение (6.1), удерживаем два асимптотических члена в формулах (4.2) для  $S_{pp}(\varepsilon)$  и по одному для внедиагональных элементов расширенной матрицы рассеяния и находим:

$$\begin{aligned} s(\varepsilon) &= 1 + \varepsilon S_{11}^1 + O(\varepsilon^2) - \frac{\varepsilon S_{01}^0 S_{10}^0 + O(\varepsilon^2)}{1 + S_{11}^0 + \varepsilon S_{11}^1 + O(\varepsilon^2)} \\ &= 1 + \varepsilon S_{11}^1 - \frac{\varepsilon S_{01}^0 S_{10}^0}{1 + S_{11}^0 + \varepsilon S_{11}^1} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Оценки (5.20) и (5.21) приводят к следующему утверждению.

**Теорема 6.2.** *При условии (6.1) для коэффициента отражения  $s(\varepsilon)$  имеет место соотношение (6.1).*

“Странная” форма записи (6.2) подразумевает, что в случае  $\mu = \hbar^2$  (т.е. при  $S_{11}^0 = -1$  согласно представлению (4.12)) поправочное слагаемое

$$-\frac{\varepsilon S_{01}^0 S_{10}^0}{1 + S_{11}^0 + \varepsilon S_{11}^1} = -\frac{(S_{01}^0)^2}{S_{11}^1}$$

в правой части (6.2) становится *немалым*. Если же  $S_{11}^0 \neq -1$ , то поправка имеет порядок  $\varepsilon$ . Иными словами, коэффициент рассеяния  $s(\varepsilon)$ , по понятным причинам непрерывно зависящий от спектрального параметра, имеет большую производную относительно геометрического параметра  $\varepsilon$  вблизи собственного числа. Если параметр  $\mu$  в формуле (4.1) для  $\lambda^\varepsilon$  находится далеко от точки  $\hbar^2$ , то  $s(\varepsilon) - 1 = O(\varepsilon)$  в согласии с формулой (6.2). Вместе с тем, при приближении  $\mu$  к точке  $\hbar^2$  на расстояние  $O(\varepsilon)$  отклонение  $s(\varepsilon)$  от единицы становится большим, коэффициент отражения “пробегает” полуокружность, пересекая тем самым точку  $-1$ , и опять возвращается в  $\varepsilon$ -окрестность единицы. Такое поведение коэффициента отражения соответствует возникновению точки комплексного резонанса с малой мнимой частью (ср. [14]).

Описанный эффект быстрого изменения дифракционной картины около порога известен как аномалия Вуда и впервые был обнаружен экспериментально (см. [32]). В статьях [12, 13] уже давалось асимптотическое истолкование схожих аномалий в задаче о падении плоской

волны на периодическую границу, но асимптотическая формула вида (6.2) получена и обоснована по-видимому впервые.

Предположим, что

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2 = 0,$$

(ср. требование (1.12)). Тогда  $S_{01}^0 = S_{10}^0 = 0$  и  $\operatorname{Re} S_{11}^1 = 0$  (см. формулы (4.13) и (4.14)). Если случилось, что  $\operatorname{Im} S_{11}^1 \neq 0$ , то асимптотическое разложение (6.2) сохраняет силу, а аномалия Вуда отсутствует. Однако можно проверить, что на самом деле  $\operatorname{Im} S_{11}^1 = 0$ , и при учете младших членов асимптотик (4.2) коэффициент отражения принимает вид

$$s(\varepsilon) = 1 + \varepsilon S_{11}^1 + \varepsilon^2 S_{00}^2 + \varepsilon^3 S_{00}^3 + \frac{\varepsilon^3 S_{01}^1 S_{10}^1}{1 + S_{11}^0 + \varepsilon^2 S_{11}^2 + \varepsilon^3 S_{11}^3} + O(\varepsilon^2),$$

причем, к сожалению,  $S_{11}^2 = 0$ . Иными словами, в случае  $S_{01}^1 = S_{10}^1 = 0$  аномалия Вуда сохраняется. Громоздкие, но простые вычисления (они опущены, так как их результаты в статье не нужны по существу) показывают, что требование  $S_{01}^1 = S_{10}^1 = 0$  равносильно новому условию ортогональности для профильной функции  $H$ . На этом пути доказать возможность образования собственного числа  $\lambda^\varepsilon \in (0, \pi^2)$  не представляется возможным, так как логично предположить, что каждый последующий шаг описываемого процесса накладывает на  $H$  дополнительное условие ортогональности, и в итоге образуется бесконечный набор ограничений на  $H$ . К тому же, каждый шаг может приводить к уменьшению допустимой границы изменения малого параметра  $\varepsilon$ , и автор не знает, сходятся ли возникающие асимптотические ряды. В следующем разделе для поиска собственных чисел будут привлечены иные соображения.

Только в случае симметрии (1.5) относительно оси абсцисс нужное равенство  $S_{10}^\varepsilon = 0$  выполнено заведомо, а формулы (4.11) и (4.12) обеспечивают асимптотику (1.7) собственного числа, обнаруживаемого при помощи метода [4].

**7. Доказательство существования захваченной волны.** Сначала проверим, что при определенных условиях собственных чисел  $\lambda^\varepsilon < \pi^2$  у задачи (1.2), (3.1) нет.

**Теорема 7.1.** Если

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 < 0 \quad (7.1)$$

или в дополнение к требованию (1.8) справедлива формула (1.11) при  $\eta = 0$  и

$$\int_{-1/2}^{1/2} H(x_2) \sin(\pi x_2) dx_2 \neq 0, \quad (7.2)$$

то найдутся такие положительные величины  $\varepsilon_0$  и  $c_0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  на интервале  $(\pi^2 - c_0, \pi^2)$  точечный спектр оператора  $A_{\Gamma}^{\varepsilon}$  пуст.

**Доказательство.** Для весового показателя (3.9) оператор  $\mathcal{A}_{\gamma}^{\varepsilon}$  задачи (1.2), (3.1) является малым возмущением аналогичного оператора задачи (4.5) в полуполосе  $\Pi_{\Gamma} = \mathbb{R}_+ \times (-1/2, 1/2)$ , ядро которого тривиально (ср. доказательство предложения 5.1). Поэтому  $\mathcal{A}_{\gamma}^{\varepsilon}$  – мономорфизм, и в силу предложения 3.3 и следствия 3.4 захваченная волна может существовать только при выполнении соотношения  $S_{11}(\varepsilon) = -1$ . Если имеет место неравенство (7.1), то формулы (4.12), (4.11) и (5.20) гарантируют, что  $\operatorname{Re} S_{11}(\varepsilon) > 0$  в случае спектрального параметра (4.1) с малым  $\mu > 0$ . Как уже пояснялось в п. 6, в ситуации (1.8), (7.2) имеет место соотношение  $S_{01}(\varepsilon) \neq 0$ , а значит,  $|S_{11}^{\varepsilon}| < 1$  и  $S_{11}^{\varepsilon} \neq 1$ . Оба утверждения проверены.  $\square$

**Замечание 7.2.** Можно убедиться в том, что в условиях теоремы 7.1 на всем интервале  $(0, \pi^2)$  нет собственных чисел оператора  $A_{\Gamma}^{\varepsilon}$ . Для этого достаточно построить асимптотику расширенной матрицы рассеяния  $S(\varepsilon)$ , отвечающей спектральному параметру  $\lambda \in (0, \pi^2)$ . При таком  $\lambda$  пара (4.6) явных решений задачи в полуполосе  $\Pi_{\Gamma}$  заменяется следующей парой:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(x) &= e^{-ix_1\sqrt{\lambda}} + e^{-ix_1\sqrt{\lambda}}, \\ \mathbf{u}_1(x) &= \left( e^{x_1\sqrt{\pi^2-\lambda}} + e^{-x_1\sqrt{\pi^2-\lambda}} \right) \sin(\pi x_2) \\ &= \frac{1-i}{2} \left( \left( e^{x_1\sqrt{\pi^2-\lambda}} + ie^{-x_1\sqrt{\pi^2-\lambda}} \right) \sin(\pi x_2) \right. \\ &\quad \left. + i \left( e^{x_1\sqrt{\pi^2-\lambda}} - ie^{-x_1\sqrt{\pi^2-\lambda}} \right) \sin(\pi x_2) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

а значит, соблюсти требования предложения 3.3 малым возмущением матрицы (7.3) нельзя. В данной статье подробное доказательство этого факта не приводится потому, что по причинам, упомянутым в замечании 4.1, полное исследование спектра оператора  $A^\varepsilon$  исходной задачи (1.2) в волноводе  $\Omega(\varepsilon)$  провести все равно не удастся.  $\square$

С целью установить наличие собственного числа задачи (1.2), (3.1), примем формулы (4.1) и

$$\mu = \hbar_0^2 + \tau \quad (7.4)$$

для спектрального параметра  $\lambda^\varepsilon$  и соотношения (1.8) и (1.12), (1.11) для профильной функции  $H$  (напоминаем про условия ортогональности и нормировки (1.12), означающие, что левая часть (7.2) совпадает с дополнительным малым параметром  $\eta$ ). В формуле (7.4) выражение

$$\hbar_0 = 2\pi^2 \int_{-1/2}^{1/2} H_0(x_2) \cos(2\pi x_2) dx_2 > 0, \quad (7.5)$$

определено аналогично (4.11).

Будем искать малые величины  $\delta$  и  $\eta$  так, чтобы выполнялись равенства

$$\operatorname{Im} S_{11}^\varepsilon = 0, \quad \operatorname{Re} S_{01}^\varepsilon = 0. \quad (7.6)$$

**Лемма 7.3.** *Если при малых  $\varepsilon$ ,  $\tau$  и  $\eta$  справедливы равенства (7.6), то  $S_{11}^\varepsilon = -1$ .*

**Доказательство.** В силу формул (3.18) и (7.6) число  $S_{11}^\varepsilon$  вещественное, а числа  $S_{01}^\varepsilon = S_{10}^\varepsilon$  чисто мнимые. В случае  $S_{01}^\varepsilon = S_{10}^\varepsilon \neq 0$  ортогональность столбцов унитарной матрицы, т.е. соотношение

$$0 = \overline{S_{01}^\varepsilon} S_{00}^\varepsilon + \overline{S_{11}^\varepsilon} S_{10}^\varepsilon = -S_{01}^\varepsilon S_{00}^\varepsilon + S_{11}^\varepsilon S_{10}^\varepsilon,$$

означает, что  $S_{00}^\varepsilon$  – также вещественное число. Учитывая первую асимптотическую формулу (5.20), а также выражения (4.20) и (4.13), видим, что

$$\operatorname{Im} S_{00}^\varepsilon = -\varepsilon i (2\pi)^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} H_0(x_2) dx_2 + O(\varepsilon |\tau| \eta^2 + \varepsilon^2).$$



Иными словами,  $S_{00}^\varepsilon$  не может быть вещественным при малых  $\varepsilon$  и  $\tau$ ,  $\eta$ , так как интеграл от профильной функции  $H = H_0 + \eta \mathbf{H}$  положителен по определению. Таким образом,  $S_{01}^\varepsilon = 0$  и  $|S_{11}^\varepsilon| = 1$ . Осталось заметить, что  $S_{11}^\varepsilon = -1$  согласно первой асимптотической формуле (5.20) с главным членом (4.12), расположенным близко к точке  $-1$  при  $\mu \rightarrow \hbar_0^2$ .  $\square$

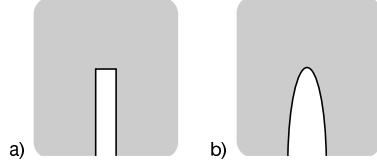


Рис. 4. Области для определения пограничных слоев в случае прямоугольного (а) и эллиптического (б) экранов.

Переписывая оценки (5.20) в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_{11}^\varepsilon &= S_{11}^\varepsilon - S_{11}^0, & |\widetilde{S}_{11}^\varepsilon| &\leq C\varepsilon, \\ \widetilde{S}_{01}^\varepsilon &= S_{01}^\varepsilon - \varepsilon^{1/2}S_{01}^0, & |\widetilde{S}_{01}^\varepsilon| &\leq C\varepsilon^{3/2} \end{aligned} \quad (7.7)$$

и учитывая формулы (4.12) и (4.13), преобразуем соотношения (7.6) в следующую систему трансцендентных уравнений для пары  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \tau &= (2\hbar^2 + \tau)\widetilde{S}_{11}^\varepsilon, \\ \eta &= \frac{(4(\hbar^2 + \tau))^{1/4}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{2\hbar^2 + \tau}{\hbar^2 + \tau + \hbar\sqrt{\hbar^2 + \tau}} \varepsilon^{-1/2} \widetilde{S}_{01}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Величины  $\hbar$  и  $\widetilde{S}_{p1}^\varepsilon$ , разумеется, зависят от параметров  $\tau$  и  $\eta$ , однако постоянную  $C$  в оценках (7.9) можно взять общей для всех  $(\tau, \eta)$  из круга  $\overline{\mathbb{B}}_{\varrho^0}$  с некоторым фиксированным радиусом  $\varrho^0 > 0$ . Оператор системы (7.8) действует непрерывно из  $\overline{\mathbb{B}}_{\varrho^\varepsilon}$  в тот же круг при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и некоторых  $\varepsilon_0 > 0$  и  $\varrho > 0$ . Таким образом, теорема о неподвижной точке обеспечивает существование решения  $(\tau, \eta) \in \overline{\mathbb{B}}_{\varrho^\varepsilon}$ . Теперь предложение 3.3 (достаточное условие существования захваченной волны) приводит к основному результату статьи.

**Теорема 7.4.** Пусть профиль  $H$  экрана (1.1) подчинен условиям (1.8)–(1.12). Найдутся такие положительные величины  $\varepsilon_0$  и  $c_0$ ,  $C_0$ ,  $\varrho_0$  что для всякого  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существует  $\eta \in (-\varrho_0\varepsilon, \varrho_0\varepsilon)$ , при котором на интервале  $(\pi^2 - C_0\varepsilon^2, \pi^2)$  имеется в точности одно собственное число  $\lambda^\varepsilon$  задачи (1.2), (3.1) в области  $\Omega_\Gamma(\varepsilon)$ . Это число также оказывается собственным для задачи (1.2) в волноводе с тонким экраном  $\Omega(\varepsilon) = \Pi \setminus \overline{\Theta(\varepsilon)}$ , и верна асимптотическая формула

$$\left| \lambda^\varepsilon - \pi^2 + 4\varepsilon^2 \pi^2 \left( \int_{-1/2}^{1/2} H_0(x_2) \cos(\pi x_2) dx_2 \right)^2 \right| \leq c_0 \varepsilon^\varepsilon. \quad (7.9)$$

**Замечание 7.5.** В случае центральной симметрии (1.5), (1.9) асимптотика (7.9), конечно же, не отличается от асимптотики (1.7), построенной в работе [11] другим методом. Результаты [11] получены и для других форм тонких экранов, например, прямоугольной или эллиптической (в большей общности, для экранов с затупленными и скругленными кромками; см. рис. 3а и 3б). При этом вблизи кромок возникают степенные пограничные слои, главные члены которых описываются при помощи решений задачи Неймана для уравнения Лапласа на плоскости с вырезанными полуполосой или параболой (см. рис. 3а, 3б и рис. 4а, 4б соответственно). Выкладки, учитывающие явление пограничного слоя и приводящие к асимптотическим анзацам для собственных чисел и функций, по сути дела остаются такими же, как и в [11], однако существенно усложняется процедура обоснования из п. 3 и п. 5, которая должна опираться на общие результаты теории [30] эллиптических краевых задач в областях с сингулярно возмущенными границами. Упомянутая теория помимо алгоритмов построения асимптотических рядов включает построение почти обратных операторов, вывод равномерных относительно малого параметра априорных оценок решений, формулу для индекса и пр. В частности, она позволяет приспособить предложенный в настоящей работе подход к обоснованию асимптотических конструкций для расширенной матрицы рассеяния, однако требует значительного увеличения объема статьи и загромождения изложения многими подробностями чисто технического плана. Именно поэтому в данной статье такие обобщения не рассматривались. Даже экраны в форме линзы (рис. 1а), обладающие угловыми кромками, но не требующие построения пограничных слоев, нуждаются в определении новых функциональных

пространств и изучения поведения решений  $\mathbf{U}_q^p$  вблизи углов, т.е. вызывают ненужные осложнения.  $\square$

**Пример 7.6** 1. Экран  $\Theta(\varepsilon)$  не обязательно должен быть связным, так как функции  $H_+$  и  $-H_-$  могут совпасть, например, на некотором интервале  $(-b_-, b_+)$ ; здесь  $-b_- < -a_- < a_+ < b_+$ . Если  $\pm b_{\pm} > 1/4$  и  $H_{\pm}(x_2) = 0$  при  $x_2 \in (-b_-, b_+)$ , то  $\cos(2\pi x_2) < 0$  для  $x_2 \in (-a_-, -b_-) \cup (b_+, a_+)$  и выполнено неравенство (7.1), означающее согласно теореме 7.1 при условии симметрии (1.9), что задача (1.2), (3.1) не имеет собственного числа  $\lambda^{\varepsilon} \in (\pi^2 - c_0, \pi^2)$ .

2. Пусть высота  $a = a_+ + a_-$  экрана  $\Theta^{\varepsilon}$  меньше  $1/2$ . В случаях  $\mp a_{\pm} \geq 0$  справедливо неравенство  $\mp \sin(\pi x_2) > 0$  при  $x_2 \in (-a_-, a_+)$ , и, следовательно, не может быть выполнено первое ограничение (1.12), а по теореме 7.1 при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  на интервале  $(\pi^2 - c_0, \pi^2)$  собственных чисел у задачи (1.2), (3.1) нет. Если  $\pm a_{\pm} > 0$ , то выбор положительных на интервале  $(-a_-, a_+)$  функций  $H_0$  и  $\mathbf{H}$ , удовлетворяющих соотношениям (1.12) и (7.5), достаточно произволен, причем по теореме 7.4 при каждом малом  $\varepsilon > 0$  можно найти малое  $\eta$ , для которого экран (1.1) с профильной функцией (1.11) обеспечивает собственное число  $\lambda^{\varepsilon}$ , подчиненное неравенству (7.9) и порождающее захваченную волну. Таким образом, изначально симметричный относительно оси абсцисс экран высотой  $a < 1/2$  можно смещать вдоль оси ординат на расстояния, меньшие  $1/4$ , при сохранении собственного числа посредством подходящего изменения профиля экрана.  $\square$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. Наука, М., 1973.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980.
3. С. Wilcox, *Scattering theory for diffraction gratings*. Berlin, Springer-Verlag, 1980.
4. D. V. Evans, M. Levitin, D. Vasil'ev, *Existence theorems for trapped modes*. — J. Fluid Mech. **261** (1994), P. 21–31.
5. I. Roitberg, D. Vassiliev, T. Weidl, *Edge resonance in an elastic semi-strip*. — Quart. J. Appl. Math. **51** (1998), No. 1, 1–13.
6. С. А. Назаров, *Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой*. — Журнал вычисл. матем. и матем. физ. **48** (2008), No. 5, 132–150.
7. G. Cardone, V. Minutolo, S. A. Nazarov, *Gaps in the essential spectrum of periodic elastic waveguides*. — ZAMM **89** (2009), No. 9, 729–741.
8. С. А. Назаров, *Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости*. — Матем. сб. **199** (2008), No. 12, 53–78.

9. С. А. Назаров, *Достаточные условия появления ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **369** (2009), 202–223.
10. S. A. Nazarov, J. H. Videman, *A sufficient condition for the existence of trapped modes for oblique waves in a two-layer fluid*. — Proc. R. Soc. A. **465** (2009), 3799–3816.
11. С. А. Назаров, *Асимптотика ловушечных мод и собственных чисел под порогом непрерывного спектра волновода с тонким экранирующим препятствием*. — Алгебра и анализ **22** (2010) (в печати).
12. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе. I*. — Матем. сб. **190** (1999), No. 1, 109–138.
13. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Аномалии Вуда и поверхностные волны в задачах рассеяния на периодической границе. II*. — Матем. сб. **190** (1999), No. 2, 43–70.
14. A. Aslanyan, L. Parnowski, D. Vassiliev, *Complex resonances in acoustic waveguides*. — Q. J. Mech. Appl. Math. **53** (2000), No. 3, 429–447.
15. С. М. Linton, P. McIver, *Embedded trapped modes in water waves and acoustics*. — Wave Motion **45** (2007), P. 16–29.
16. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Самосопряженные эллиптические задачи: операторы рассеяния и поляризации на ребрах границы*. — Алгебра и анализ **6** (1994), No. 4, 157–186.
17. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Расширенная матрица рассеяния и экспоненциально затухающие решения эллиптической задачи в цилиндрической области*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **264** (2000), 66–82.
18. Р. Миттра, С. Ли, *Аналитические методы теории волноводов*. Мир, М., 1974.
19. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B. Vainberg, *Linear Water Waves*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.
20. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач*. — Проблемы матем. физики. Вып. 13. Л.: изд-во ЛГУ (1991), 192–244.
21. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*. Наука, М., 1991.
22. S. A. Nazarov, *Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domain*. — Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.) International Mathematical Series, Vol. 9 (2008), pp. 261–309.
23. S. Agmon, L. Nirenberg, *Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach spaces*. — Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), No. 2, 121–239.
24. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
25. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками*. — Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.
26. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в  $L_p$  и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в*

- областях с особыми точками на границе. — Math. Nachr. **77** (1977), 25–82.
27. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*. — Успехи матем. наук **54** (1999), No. 5, 77–142.
28. С. А. Назаров, *Искусственные краевые условия для поиска поверхностных волн в задаче дифракции на периодической границе*. — Журнал вычисл. матем. и матем. физики **46** (2006), No. 12 2265–2276.
29. С. А. Назаров, *Критерий существования затухающих решений в задаче о резонаторе с цилиндрическим волноводом*. — Функциональный анализ и его приложения **40** (2006), No. 2, 20–32.
30. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении области*. Тбилиси: изд-во ТГУ, 1981.
31. С. А. Назаров, *Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений*. — Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва **5** (1996), 112–183.
32. В. Сибрук, *Роберт Вильямс Вуд. Современный чародей физической лаборатории*. М.–Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1946.

Nazarov S. A. On the asymptotics of an eigenvalue of a waveguide with thin shielding obstacle and Wood's anomalies.

Conditions are found out for the existence and absence of an eigenvalue in the interval  $(0, \pi^2)$  of the continuous spectrum of the Neumann problem for the Laplace operator in the unit strip with a thin (of width  $O(\varepsilon)$ ) symmetric screen which, as  $\varepsilon \rightarrow +0$ , shrinks into a line segment perpendicular to sides of the strip. An asymptotics of this eigenvalue is constructed as well as the asymptotics of the reflection coefficient which describes Wood's anomalies, namely quick changes of the diffraction characteristics near a frequency threshold in the continuous spectrum.

ИПМаш РАН,  
В.О. Большой пр. 61,  
199178 Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступило 23 августа 2010 г.