Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 385, 2010 г.

И. Качковский, Н. Филонов

АБСОЛЮТНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В СЛОЕ И В ГЛАДКОМ ЦИЛИНДРЕ

1. Введение

Пусть M – гладкое компактное риманово многообразие размерности k,

$$\Xi = M \times \mathbb{R}^m, \quad d := \dim \Xi = k + m.$$

Нас интересует природа спектра оператора Шредингера $H = -\Delta + V$ в цилиндре Ξ. Функция V предполагается периодичной. Если M – многообразие с краем, то мы рассматриваем оператор H с подходящими краевыми условиями на границе цилиндра $\partial\Xi = \partial M \times \mathbb{R}^m$. Мы докажем, что при некоторых условиях на потенциал V спектр оператора H абсолютно непрерывен (см. ниже теоремы 2.1 и 2.2).

Точки Ξ будем обозначать (x, y), $x \in M$, $y \in \mathbb{R}^m$. Пусть Γ – решетка в $\mathbb{R}^m$,

$$\Gamma = \left\{ l = \sum_{j=1}^{m} l_j b_j, \quad l_j \in \mathbb{Z} \right\}, \tag{1.1}$$

где $\{b_j\}_{j=1}^m$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что вещественный потенциал V периодичен по “продольным” переменным:

$$V(x, y + l) = V(x, y), \quad x \in M, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad l \in \Gamma. \tag{1.2}$$

В силу периодичности функцию V достаточно задавать на $M \times \Omega$, где

$$\Omega = \left\{ y = \sum_{j=1}^{m} y_j b_j, \quad y_j \in [0, 1) \right\} \tag{1.3}$$

Ключевые слова: оператор Шредингера, периодические коэффициенты, абсолютно непрерывный спектр.

Второй автор пользовался поддержкой гранта РФФИ 08-01-00209.

– элементарная ячейка решетки Γ.

Приведем основные известные результаты об абсолютной непрерывности спектра оператора H. Достаточные условия обычно формулируются в терминах принадлежности потенциала V классам $L_p(M\times\Omega)$ или слабым классам Лоренца $L^0_{p,\infty}(M\times\Omega)$. Напомним, что для множества N конечной меры имеют место включения $L_p(N)\subset L^0_{p,\infty}(N)\subset L_{p-\varepsilon}(N)$ с любым $\varepsilon>0$.

Подробно изучен двумерный случай, $d=2$ (Ξ – вся плоскость или полоса на плоскости). В работах [1, 12, 8] установлена абсолютная непрерывность спектра H при условии $V\in L_p$, $p>1$. Всюду в дальнейшем предполагаем $d\geqslant 3$.

Случай $k=0$, соответствующий оператору во всем пространстве, также хорошо изучен. В [14] доказана абсолютная непрерывность H при "предельном" условии $V\in L^0_{d/2,\infty}(\Omega)$ при всех $d\geqslant 3$ (см. также [3]). В случае $k=1$ (M – отрезок, Ξ – плоско-параллельный слой) в [10] доказана абсолютная непрерывность при условии $V\in L^0_{p,\infty}(M\times\Omega)$, где $p=\max(d/2,d-2)$. В этой работе рассмотрен также случай третьего краевого условия. Наконец, в случае $k\geqslant 2$ в работе авторов [5] установлена абсолютная непрерывность H при $V\in L_{d-1}(M\times\Omega)$.

В настоящей работе мы докажем (см. ниже теорему 2.1) абсолютную непрерывность оператора H при $V\in L_p(M\times\Omega)$ для всех $p>d/2$ в следующих случаях: 1) $\partial M=\varnothing$; 2) M – отрезок, $k=1$; 3) $d=3$ или 4. В случае, когда M – многообразие с краем, $k>1$ и $d>4$ мы вынуждены ограничиться $V\in L_{d-2}(M\times\Omega)$. При $k=1$ мы рассмотрим также случай третьего краевого условия (см. ниже теорему 2.2).

Во всех перечисленных работах доказательства проводятся по схеме Томаса [13], ключевым моментом которой является исследование семейства операторов

$$H(\xi)=-\Delta_x+(-i\nabla_y+\xi)^*(-i\nabla_y+\xi)+V(x,y),$$

где ξ – квазиимпульс. Для получения оценок резольвенты свободного (соответствующего $V=0$) оператора $H_0(\xi)$ мы применяем результаты [9] об оценках спектральных проекторов эллиптических операторов (идея применения этих оценок заимствована из [14]).

2. Формулировка результата

Пусть M – гладкое компактное риманово многообразие с краем или без края, $\dim M=k$. Рассмотрим d-мерный цилиндр

$$\Xi=M\times\mathbb{R}^m,\qquad d=k+m\geqslant 3.$$

Пусть Γ – решетка (1.1), Ω – ячейка (1.3), $V(x,y)$ – вещественная функция, удовлетворяющая (1.2). Предположим, что

$$V \in L_{d/2}(M \times \Omega). \tag{2.1}$$

В пространстве $L_2(\Xi)$ рассмотрим квадратичную форму

$$h[u,u] = \int\limits_{\Xi} \left(|\nabla u(x,y)|^2 + V(x,y)|u(x,y)|^2\right) dx\, dy, \tag{2.2}$$
$$\operatorname{Dom} h = H^1(\Xi).$$

Если M – многообразие с краем, $\partial M \neq \varnothing$, форму (2.2) будем обозначать через h_N. В этом случае мы рассмотрим также форму $h_D = h_N\, |_{H_0^1(\Xi)}$.

Хорошо известно, что при условии (2.1) квадратичная форма h (соотв. h_N, h_D) замкнута и полуограничена снизу. Ей отвечает самосопряженный в $L_2(\Xi)$ полуограниченный оператор H (соотв. H_N, H_D), который мы будем называть оператором Шредингера в цилиндре Ξ (в двух последних случаях – оператор Шредингера с условиями Неймана или Дирихле).

Теорема 2.1.

Пусть M – гладкое компактное риманово многообразие с краем или без края, $\dim M = k$, $\Xi = M \times \mathbb{R}^m$, $d = k + m \geqslant 3$. Пусть Γ – решетка (1.1), V – вещественная Γ-периодическая функция в Ξ. Предположим, что $V \in L_p(M \times \Omega)$, где

- *$p > d/2$, если $\partial M = \varnothing$;*
- *$p > d/2$, если $\partial M \neq \varnothing$ и $k = 1$ (M – отрезок);*
- *$p > d/2$, если $\partial M \neq \varnothing$ и $d = 3$ или $d = 4$;*
- *$p > d - 2$, если $\partial M \neq \varnothing$ и $d \geqslant 5$.*

Тогда спектры операторов H ($\partial M = \varnothing$), H_N и H_D ($\partial M \neq \varnothing$) абсолютно непрерывны.

В случае слоя (M – отрезок) результат Суслиной [10] (см. ниже теорему 4.5) позволяет охватить задачу с третьим краевым условием. Пусть $k = 1$, $\Xi = [0,a] \times \mathbb{R}^m$, σ – вещественная Γ-периодическая функция на $\partial\Xi = \{0; a\} \times \mathbb{R}^m$. Рассмотрим квадратичную форму

$$
\begin{aligned}
h_\sigma[u,u] = &\int\limits_{\Xi} \left(|\nabla u(x,y)|^2 + V(x,y)|u(x,y)|^2\right) dx\, dy \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\sigma(a,y)|u(a,y)|^2 - \sigma(0,y)|u(0,y)|^2\right) dy, \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

$$\operatorname{Dom} h_\sigma = H^1(\Xi).$$

При $\sigma \in L_m(\{0,a\} \times \Omega)$ форма (2.3) замкнута и полуограничена снизу (см. [11]). При $\sigma = 0$ форма h_σ совпадает с h_N.

Теорема 2.2. *Пусть* $\Xi = [0,a] \times \mathbb{R}^m$, $d = m+1 \geqslant 3$, Γ *– решетка* (1.1). *Пусть* V *–* Γ*-периодическая функция в* Ξ, $V \in L_p([0,a] \times \Omega)$ *при* $p > d/2$. *Пусть* σ *–* Γ*-периодическая функция на* $\partial\Xi$ *и предположим, что*

$$
\sigma \in L_q(\{0,a\} \times \Omega), \quad \text{где} \quad \begin{aligned} &q = 2 \quad \text{при} \quad d = 3, \\ &q = 2d-2 \quad \text{при} \quad d \geqslant 4. \end{aligned} \qquad (2.4)
$$

Тогда спектр оператора Шредингера H_σ, *отвечающего квадратичной форме* (2.3), *абсолютно непрерывен.*

Замечание 2.3 Сформулируем аналог теоремы 2.1 в матричном случае. Пусть V – $(n \times n)$-матричнозначная функция в Ξ, причем $V(x,y)^* = V(x,y)$, выполнено (1.2) и $V \in L_p(M \times \Omega)$, $p > d/2$. Квадратичная форма

$$h[u,u] = \int\limits_{\Xi} \left(|\nabla u(x,y)|^2 + \langle V(x,y)u(x,y)\,,\, u(x,y)\rangle\right) dx\, dy$$

замкнута и полуограничена на областях определения $H^1(\Xi, \mathbb{C}^n)$ и $H^1_0(\Xi, \mathbb{C}^n)$. Этим формам соответствуют самосопряженные операторы H, H_N, H_D в $L_2(\Xi, \mathbb{C}^n)$. В случае многообразия без края, в случае слоя и в случае 3- и 4-мерных цилиндров спектры этих операторов абсолютно непрерывны. В случае d-мерного цилиндра, $d > 4$, спектры H_N и H_D абсолютно непрерывны при $V \in L_p(M \times \Omega)$, $p > d-2$. Приводимое ниже доказательство теоремы 2.1 переносится на матричный случай без изменений. Нетрудно также сформулировать матричный аналог теоремы 2.2.

Нам будет удобна интерпретация ячейки Ω как множества точек m-мерного тора $\mathbb{T} = \mathbb{R}^m/\Gamma$. Введем дополнительный параметр $\xi \in \mathbb{C}^m$ и рассмотрим следующие квадратичные формы. В случае многообразия без края положим

$$h(\xi)[v,v] = \int\limits_{M\times\Omega} \left(|\nabla_x v|^2 + \langle(\nabla_y + i\xi)v, (\nabla_y + i\overline{\xi})v\rangle + V|v|^2\right) dx\, dy, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{Dom} h(\xi) = H^1(M \times \mathbb{T}).$$

В случае $\partial M \neq \varnothing$ форму (2.5) обозначим через $h_N(\xi)$ и положим еще

$$h_D(\xi) = h_N(\xi)\ |_{H_0^1(M\times\mathbb{T})}\ .$$

В случае слоя, $\Xi = [0,a] \times \mathbb{R}^m$, рассмотрим также форму

$$h_\sigma(\xi)[v,v] = h_N(\xi)[v,v] + \int\limits_{\Omega} \left(\sigma(a,y)|v(a,y)|^2 - \sigma(0,y)|v(0,y)|^2\right) dy,$$

$$\operatorname{Dom} h_\sigma(\xi) = H^1([0,a] \times \mathbb{T}).$$

Эти формы секториальны (определения секториальных форм и их основные свойства можно найти в [4, главы VI, VII]). Им отвечают аналитические семейства операторов $H(\xi)$, $H_N(\xi)$, $H_D(\xi)$ и $H_\sigma(\xi)$ соответственно. При вещественных ξ эти операторы самосопряжены.

Пусть b_1 – первый вектор базиса решетки Γ. Поскольку условия на потенциал инвариантны относительно растяжений, можно считать $|b_1| = 1$.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *или теоремы* 2.2. *Для любых* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\xi \perp b_1$, *существует такое* τ_0, *что при* $|\tau| > \tau_0$ *оператор* $(H((\pi + i\tau)b_1 + \xi) - \lambda I)$ *обратим и*

$$\left\| \left(H((\pi + i\tau)b_1 + \xi) - \lambda I\right)^{-1} \right\| \leqslant C|\tau|^{-1}. \quad (2.6)$$

Мы докажем эту теорему в §4. Стандартным образом (см., например, [2] или [6]) из теоремы 2.4 вытекают теоремы 2.1 и 2.2.

3. Оценки спектральных проекторов

Для самосопряженного оператора P обозначим через $E_k(P) = E_P([(k-1)^2; k^2))$ его спектральный проектор на подпространство, отвечающее отрезку $[(k-1)^2; k^2)$. В [9] доказана следующая

Теорема 3.1. *Пусть N – C^∞-гладкое компактное риманово многообразие размерности d без края, P – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на N с положительно определенным символом. Тогда*

$$\|E_k(P)f\|_{L_2(N)} \leqslant Ck^{d(1/p-1/2)-1/2}\|f\|_{L_p(N)},$$
$$f \in L_p(N), \quad 1 \leqslant p \leqslant \frac{2(d+1)}{d+3}.$$

По двойственности отсюда вытекает

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.1 *имеет место неравенство*

$$\|E_k(P)f\|_{L_q(N)} \leqslant Ck^{d(1/2-1/q)-1/2}\|f\|_{L_2(N)},$$
$$f \in L_2(N), \quad \frac{2(d+1)}{d-1} \leqslant q \leqslant +\infty. \quad (3.1)$$

Теорема 3.3. *Пусть N_0 – гладкое компактное риманово многообразие без края, $\dim N_0 = d-1$, P_0 – эллиптический оператор второго порядка на N_0 с положительно определенным символом. Рассмотрим эллиптический оператор $P = 1 \otimes P_0 - \frac{d^2}{dx^2} \otimes 1$ на многообразии $N = [0,a] \times N_0$ (здесь x – локальная координата на $[0,a]$). Тогда для оператора P с краевыми условиями Дирихле или Неймана выполняется оценка (3.1).*

Доказательство. Будем рассматривать задачу Дирихле, случай задачи Неймана аналогичен. Формулировка теоремы инвариантна относительно растяжения по переменной x, поэтому будем считать $a = \pi$. В этом случае спектральный проектор E_k оператора P является интегральным оператором с ядром

$$K(x,x',y,y') = \sum_{j^2+\lambda_n \in [(k-1)^2;k^2)} \frac{2}{\pi}\sin(jx)\sin(jx')\varphi_n(y)\overline{\varphi}_n(y'), \quad (3.2)$$

где $\{\lambda_n\}$, $\{\varphi_n\}$ – собственные значения и собственные функции оператора P_0. Введем оператор $\widetilde{E}_k$, действующий на функции из $L_2([0,2\pi]\times N_0)$ как интегральный оператор с тем же ядром (3.2), оператор продолжения нулем $T\colon L_2(N) \to L_2([0,2\pi]\times N_0)$ и оператор сужения $S\colon L_q([0,2\pi]\times N_0) \to L_q(N)$. Ясно, что $E_k = S\widetilde{E}_kT$. Далее,

$\widetilde{E}_k = \frac{1}{2\pi}(\widetilde{E}_k^{(1)} - \widetilde{E}_k^{(2)})$, где $\widetilde{E}_k^{(1)}$ и $\widetilde{E}_k^{(2)}$ — интегральные операторы с ядрами

$$K^{(1)}(x,x',y,y') = \sum_{j^2+\lambda_n\in[(k-1)^2;k^2)} \big(e^{ij(x-x')} + e^{-ij(x-x')}\big)\varphi_n(y)\overline{\varphi}_n(y'),$$
$$K^{(2)}(x,x',y,y') = \sum_{j^2+\lambda_n\in[(k-1)^2;k^2)} \big(e^{ij(x+x')} + e^{-ij(x+x')}\big)\varphi_n(y)\overline{\varphi}_n(y').$$

Оператор $\widetilde{E}_k^{(1)}$ представляет собой спектральный проектор оператора $-\frac{d^2}{dx^2}\otimes 1 + 1\otimes P_0$ на $[0,2\pi]\times N_0$ с периодическими по x граничными условиями. Это эллиптический оператор на многообразии без края $S^1\times N_0$, и для него выполняется оценка (3.1). Аналогично, оценка (3.1) выполняется для $\widetilde{E}_k^{(2)}$, а следовательно, и для $\widetilde{E}_k$ и E_k.

Доказательство для случая краевого условия Неймана отличается заменой $\sin(jx)$ на $\cos(jx)$, в этом случае $\widetilde{E}_k = \frac{1}{2\pi}(\widetilde{E}_k^{(1)} + \widetilde{E}_k^{(2)})$. □

В [7] доказана следующая

Теорема 3.4. *Пусть N – гладкое компактное риманово многообразие размерности $d \geqslant 3$ с краем. Пусть P – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с положительным символом на N с краевыми условиями Дирихле или Неймана. Тогда при*

$$5 \leqslant q \leqslant \infty, \quad \text{если} \quad d = 3; \quad 4 \leqslant q \leqslant \infty, \quad \text{если} \quad d \geqslant 4, \tag{3.3}$$

выполняется оценка (3.1). *При*

$$2 \leqslant q \leqslant 4, \quad d \geqslant 4$$

выполняется оценка

$$\|E_k f\|_{L_q(N)} \leqslant C k^{d(1/2-1/q)+2/q-1} \|f\|_{L_2(N)}. \tag{3.4}$$

4. Доказательство теоремы 2.4

Для краткости будем обозначать операторы $H((\pi+i\tau)b_1+\xi)$ через $H(\tau)$. Пусть

$$H_0(\tau) = H(\tau)|_{V=0,\,\sigma=0}\,, \quad H_0 = H_0(0).$$

Оператор H_0 – самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор на многообразии $M\times\mathbb{T}$. Через E_k обозначим его спектральный проектор на отрезок $[(k-1)^2;k^2)$. Для многообразия M сформулируем

Условие $A(q)$ *Многообразие M таково, что для любого $\xi\in\mathbb{R}^m$, $\langle\xi,b_1\rangle=0$, существуют такие положительные ε и C, что*

$$\|E_kf\|_{L_q(M\times\mathbb{T})}\leqslant Ck^{1/2-\varepsilon}\|f\|_{L_2(M\times\mathbb{T})},\quad \forall f\in L_2(M\times\mathbb{T}).$$

Ясно, что условие $A(q)$ влечет $A(\tilde q)$ при $\tilde q<q$.

Обозначим через $\{\mu_j\}$ и $\{\varphi_j(x)\}$ собственные значения и собственные функции оператора Лапласа $-\Delta_x$ в M с соответствующими краевыми условиями (Дирихле или Неймана). Тогда собственные значения оператора $H_0(\tau)$ имеют вид

$$h_{j,n}(\tau)=|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j-\tau^2+2i\tau\langle n+\pi b_1,b_1\rangle,$$

а нормированные собственные функции

$$\varphi_{j,n}(x,y)=|\Omega|^{-1/2}\varphi_j(x)e^{i\langle n,y\rangle},\quad j\in\mathbb{N},\quad n\in\widetilde\Gamma,$$

где $\widetilde\Gamma$ – двойственная решетка

$$\tilde\Gamma=\left\{n=\sum_{j=1}^m n_j\tilde b_j,\ n_j\in\mathbb{Z}\right\},\quad \langle b_k,\tilde b_j\rangle=2\pi\delta_{kj}.$$

Заметим, что $\langle n,b_1\rangle\in2\pi\mathbb{Z}$. Следовательно,

$$|h_{j,n}(\tau)|\geqslant|\operatorname{Im}h_{j,n}(\tau)|=2|\langle n+\pi b_1,b_1\rangle||\tau|\geqslant2\pi|\tau|.$$

Таким образом, при $|\tau|>0$ оператор $H_0(\tau)$ обратим, и

$$\|H_0(\tau)^{-1}\|\leqslant(2\pi|\tau|)^{-1},\quad \tau\neq0. \tag{4.1}$$

Введем также оператор $|H_0(\tau)|^{-1/2}$,

$$|H_0(\tau)|^{-1/2}\varphi_{j,n}=|h_{j,n}(\tau)|^{-1/2}\varphi_{j,n}.$$

Нам понадобится следующая элементарная

Лемма 4.1. *Пусть $0 < \varepsilon < 1/2$. Тогда суммы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-2\varepsilon}}{|k^2-\tau^2|+|\tau|}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-2\varepsilon}}{|(k-1)^2-\tau^2|+|\tau|} \tag{4.2}$$

конечны и равномерно ограничены по τ при $|\tau| > 1$.

Доказательство. Для определенности рассмотрим первую сумму. Не умаляя общности, можно считать τ положительным. Если $k^2 \geqslant 2\tau^2$, то знаменатель можно заменить на $\frac{1}{2}k^2$, откуда видно, что остаток ряда равномерно сходится. Это дает возможность считать, что $k^2 < 2\tau^2$. Далее,

$$\begin{aligned}\sum_{k<2\tau} \frac{k^{1-2\varepsilon}}{|k^2-\tau^2|+|\tau|} &\leqslant 2|\tau|^{1-2\varepsilon} \sum_{k<2\tau} \frac{1}{|k^2-\tau^2|+|\tau|} \\ &\leqslant 2\tau^{-2\varepsilon} \sum_{k<2\tau} \frac{1}{|k-\tau|+1}.\end{aligned}$$

Ограниченность последней суммы следует из ограниченности интеграла

$$\tau^{-2\varepsilon} \int_0^{2\tau} \frac{dk}{|k-\tau|+1} = 2\tau^{-2\varepsilon} \int_\tau^{2\tau} \frac{dk}{k-\tau+1} = 2\tau^{-2\varepsilon} \ln(\tau+1). \qquad \square$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнено условие $A(q)$. Тогда для некоторого $\tau_0 > 0$ верна оценка*

$$\big\| |H_0(\tau)|^{-1/2} f \big\|_{L_q(M\times\mathbb{T})} \leqslant C\|f\|_{L_2(M\times\mathbb{T})}, \quad \forall\colon |\tau| > \tau_0,\ f \in L_2(M). \tag{4.3}$$

Доказательство. Пусть E_k – спектральный проектор H_0 на отрезок $[(k-1)^2; k^2)$. Тогда

$$\begin{aligned}\big\| |H_0(\tau)|^{-1/2} f \big\|_{L_q(M)} &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \big\| E_k |H_0(\tau)|^{-1/2} f \big\|_{L_q(M)} \\ &\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-\varepsilon} \big\| E_k |H_0(\tau)|^{-1/2} f \big\|_{L_2(M)} \\ &\leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} k^{1/2-\varepsilon} \big\| E_k |H_0(\tau)|^{-1/2} \big\| \cdot \|E_k f\|_{L_2(M)},\end{aligned}$$

откуда по неравенству Коши–Буняковского–Шварца

$$\big\||H_0(\tau)|^{-1/2}f\big\|^2_{L_q(M)} \leqslant C\|f\|^2_{L_2(M)}\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-2\varepsilon}\big\|E_k|H_0(\tau)|^{-1/2}\big\|^2.$$

Собственные значения оператора H_0 имеют вид $|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j$, $n\in\widetilde{\Gamma}$, $j\in\mathbb{N}$. Область значений проектора E_k отвечает таким парам (j,n), что $(k-1)^2\leqslant|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j<k^2$. Следовательно,

$$\big\|E_k|H_0(\tau)|^{-1/2}\big\|^2=\max_{|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j\in[(k-1)^2;k^2)}\frac{1}{|h_{j,n}(\tau)|}$$

$$\leqslant\max_{|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j\in[(k-1)^2;k^2)}\frac{\sqrt{2}}{\big||n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j-\tau^2\big|+|\tau|}.$$

Остается показать, что сумма

$$\sum_{k=1}^{\infty}\max_{|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j\in[(k-1)^2;k^2)}\frac{k^{1-2\varepsilon}}{||n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j-\tau^2|+|\tau|}\tag{4.4}$$

конечна и равномерно ограничена по τ при $|\tau|>\tau_0$.

Для этого заметим, что во всех слагаемых кроме, может быть, одного, замена $|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j$ на $(k-1)^2$ или на k^2 не уменьшит это слагаемое: действительно, если $|\tau|\notin[k-1;k)$, то после одной из таких замен знаменатель не увеличится. Слагаемое, для которого $|\tau|\in[k-1;k)$, не превосходит $Ck^{-2\varepsilon}$ и, тем самым, не влияет на сходимость. Таким образом, можно рассмотреть две суммы (4.4): в одной во всех слагаемых заменить $|n+\pi b_1+\xi|^2+\mu_j$ на $(k-1)^2$, а в другой – на k^2. Ограниченность этих сумм следует из леммы 4.1. $\square$

Для доказательства теоремы 2.4 нам понадобится также следующий факт.

Лемма 4.3. *Пусть (M,μ) – измеримое пространство с σ-конечной мерой, $V\in L_p(M)$, $1\leqslant p<\infty$. Тогда для любого $\delta>0$ существует постоянная $c(\delta)$ такая, что*

$$\int_M|Vfg|d\mu\leqslant\delta\|f\|_{L_{2p'}(M)}\|g\|_{L_{2p'}(M)}+c(\delta)\|f\|_{L_2(M)}\|g\|_{L_2(M)},$$

$$f,g\in L_{2p'}(M),$$

где p' – сопряженный показатель к p.

Доказательство. Функцию V можно представить в виде

$$V = V_1 + V_2, \quad \text{где} \quad \|V_1\|_{L_p(M)} \leqslant \delta, \quad V_2 \in L_\infty(M).$$

По неравенству Гельдера

$$\int\limits_M |Vfg|d\mu \leqslant \delta\|f\|_{L_{2p'}(M)}\|g\|_{L_{2p'}(M)} + \|V_2\|_{L_\infty(M)}\|f\|_{L_2(M)}\|g\|_{L_2(M)}. \quad \square$$

Теорема 4.4. *Пусть для многообразия M выполняется условие $A(q)$ при некотором $q \in (2, 2d/(d-2))$. Пусть $V \in L_p(M \times \Omega)$, где $p = q/(q-2)$. Тогда оператор $\big(H(\tau) - \lambda I\big)$ обратим при $|\tau| > \tau_0$ и $\Big\|\big(H(\tau) - \lambda I\big)^{-1}\Big\| \leqslant C|\tau|^{-1}$.*

Доказательство. Требование к потенциалу V инвариантно относительно прибавления к нему константы. Это позволяет, не умаляя общности, считать $\lambda = 0$. Удобно доказывать утверждение теоремы в следующем виде: для любой $u \in \mathrm{Dom}(H(\tau))$, $\|u\|_{L_2(M)} = 1$, существует такая $v \in \mathrm{Dom}(H(\tau))$, $\|v\|_{L_2(M)} = 1$, что

$$|(H(\tau)u, v)| \geqslant C|\tau|, \quad |\tau| > \tau_0.$$

Пусть $H_0(\tau) = \Phi_0(\tau)|H_0(\tau)|$ – полярное разложение оператора $H_0(\tau)$. Положим

$$v = \Phi_0(\tau)u. \tag{4.5}$$

Тогда

$$(H_0(\tau)u, v) = (|H_0(\tau)|u, u) \geqslant 2\pi|\tau| \tag{4.6}$$

в силу (4,1) и

$$(H_0(\tau)u, v) = \||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(M)} = \||H_0(\tau)|^{1/2}v\|^2_{L_2(M)}.$$

Оценим слагаемое (Vu, v) с помощью леммы 4.3 и теоремы 4.2:

$$\begin{aligned} |(Vu, v)| &\leqslant \delta\|u\|_{L_q(M)}\|v\|_{L_q(M)} + c(\delta) \\ &\leqslant C\delta\||H_0(\tau)|^{1/2}v\|_{L_2(M)}\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|_{L_2(M)} + c(\delta) \\ &= C\delta(H_0(\tau)u, v) + c(\delta). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Следовательно,

$$|(H(\tau)u,v)| \geqslant (1-C\delta)(H_0(\tau)u,v) - c(\delta) \geqslant 2\pi(1-C\delta)|\tau| - c(\delta) \geqslant C_1|\tau| \quad \text{при } |\tau|>\tau_0,\ \delta<1/C. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2.4. Случай многообразия без края.

При $\partial M = \varnothing$ следствие 3.2 обеспечивает выполнение условия $A(q)$ при всех $q < 2d/(d-2)$. Из теоремы 4.4 вытекает оценка (2.6) при любом $p > d/2$. $\square$

Доказательство теоремы 2.4. Случай краевых условий Дирихле или Неймана.

Если $k=1$ (M – отрезок), то теорема 3.3 обеспечивает выполнение условия $A(q)$ при всех $q < 2d/(d-2)$. Снова подходят все $p > d/2$.

Если $d=3$, то по теореме 3.4 условие $A(q)$ выполнено при $q<6$, соответственно подходят все $p>3/2$.

Если $d \geqslant 4$, то по теореме 3.4 условие $A(q)$ выполнено при $q < (2d-4)/(d-3)$, и условие на потенциал принимает вид $V \in L_p(M\times\Omega)$, где $p > d-2$. $\square$

Для рассмотрения краевого условия третьего типа воспользуемся следующим результатом из [10].

Теорема 4.5. *Пусть $k=1$, $M=[0,a]$ и функция σ удовлетворяет (2.4). Тогда*

$$\int\limits_\Omega |\sigma(0,y)| \left|\big(|H_0(\tau)|^{-1/2}u\big)(0,y)\right|^2 dy + \int\limits_\Omega |\sigma(a,y)| \left|\big(|H_0(\tau)|^{-1/2}u\big)(a,y)\right|^2 dy \leqslant \tilde c(\tau)\|u\|^2_{L_2((0,a)\times\Omega)},$$

где $\lim\limits_{|\tau|\to\infty} \tilde c(\tau)=0$ равномерно по ξ' и $u\in L_2((0,a)\times\Omega)$.

Доказательство теоремы 2.4. Случай третьего краевого условия.

Пусть $p>d/2$, $q=2p' < 2d/(d-2)$. Теорема 3.3 гарантирует выполнение условия $A(q)$. Пусть $V \in L_p((0,a)\times\Omega)$.

Для произвольного $u \in \mathrm{Dom}(H_\sigma)$, $\|u\|_{L_2(M)} = 1$ определим v формулой (4.5). Тогда

$$(H_\sigma(\tau)u, v) = (H_0(\tau)u, v) + (Vu, v) \\ + \int\limits_\Omega \sigma(a,y)u(a,y)\overline{v}(a,y)\,dy - \int\limits_\Omega \sigma(0,y)u(0,y)\overline{v}(0,y)\,dy.$$

Оценки для первых двух слагаемых получены в формулах (4.7) и (4.6). Оценим последнее слагаемое (предпоследнее оценивается точно так же) по теореме 4.5:

$$\left|\int\limits_\Omega \sigma(0,y)u(0,y)\overline{v}(0,y)\,dy\right| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |\sigma(0,y)|\left(|u(0,y)|^2 + |v(0,y)|^2\right)\,dy$$

$$\leqslant \frac{\tilde{c}(\tau)}{2}\Big(\big\||H_0(\tau)|^{1/2}u\big\|^2_{L_2([0,a]\times\Omega)} + \big\||H_0(\tau)|^{1/2}v\big\|^2_{L_2([0,a]\times\Omega)}\Big) \\ = \tilde{c}(\tau)\big(H_0(\tau)u, v\big).$$

Таким образом,

$$\big|(H_\sigma(\tau)u, v)\big| \geqslant (H_0(\tau)u, v)\big(1 - C\delta - 2\tilde{c}(\tau)\big) - c(\delta) \\ \geqslant 2\pi\big(1 - C\delta - 2\tilde{c}(\tau)\big)|\tau| - c(\delta), \quad |\tau| > \tau_0,$$

где δ и τ_0 выбраны так, что $C\delta + 2\tilde{c}(\tau) < 1$, $|\tau| > \tau_0$. Из последней оценки вытекает (2.6). □

Литература

1. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Абсолютная непрерывность двумерного периодического магнитного гамильтониана с разрывным векторным потенциалом.* — Алгебра и Анализ **10** (1998), вып. 4, 1–36.
2. М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, *Периодический магнитный гамильтониан с переменной метрикой. Проблема абсолютной непрерывности.* — Алгебра и Анализ **11** (1999), вып. 2, 1–40.
3. L. I. Danilov, *On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator.* — J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), 275204.
4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
5. И. В. Качковский, Н. Д. Филонов, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шредингера в многомерном цилиндре.* — Алгебра и Анализ **21** (2009), вып. 1, 133–152.

6. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 4 Анализ операторов. Мир, М., 1982.
7. H. F. Smith, C. D. Sogge, *On the L_p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary.* — Acta Mathematica **198** (2007) no. 1, 107–153.
8. A. V. Sobolev, E. Shargorodsky, *Quasiconformal mappings and periodic spectral problems in dimension two.* — J. Anal. Math. **91** (2003), 67–103.
9. C. D. Sogge, *Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds.* — J. Funct. Anal. **77** (1988) no. 1, 123–138.
10. T. A. Suslina, *On the absence of eigenvalues of a periodic matrix Schrödinger operator in a layer.* — Russian J. Math. Phys. **8** (2001), no. 4, 463–486.
11. Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра оператора Шредингера с потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей.* — Алгебра и Анализ **13** (2001), вып. 5, 197–240.
12. Т. А. Суслина, Р. Г. Штеренберг, *Абсолютная непрерывность спектра магнитного оператора Шредингера с метрикой в двумерном периодическом волноводе.* — Алгебра и Анализ **14** (2002), вып. 2, 159–206.
13. L. Thomas, *Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal.* — Commun. Math. Phys. **33** (1973), 335–343.
14. Z. Shen, *On absolute continuity of the periodic Schrödinger operators.* — Intern. Math. Res. Notes (2001), no. 1, 1–31.

Kachkovskii I., Filonov N. Absolute continuity of the spectrum of the periodic Scrödinger operator in a layer and in a smooth sylinder.

The Schrödinger operator $= \Delta + V$ in a layer or in a d-dimensional cylinder is considered. The function V is suppored to be periodic with respect to some lattice. The absolute continuity of the spectrum of H is established under the following conditions: $V \in L_{p,\mathrm{loc})}$ where $p > d/2$ in the case of a layer, and $p >> \max(d/2, d-2)$ in the case of a cylinder.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: kachkovskiy@pdmi.ras.ru
filonov@pdmi.ras.ru

Поступило 3 сентября 2010 г.