Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

Б. П. Харламов

О ТОЧКАХ ЗАДЕРЖКИ И АСИММЕТРИИ ОДНОМЕРНОГО ПОЛУМАРКОВСКОГО ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА

Краткий обзор статьи

Изучение отражения с замедлением от границы области значений диффузионного процесса в рамках теории непрерывных полумарковских процессов [4] привело к проблеме задерживающих точек процесса внутри области. Внимательное исследование обеих проблем показало, что новый подход к проблемам связан с распространением на точки границы и изолированные точки внутри области специфического свойства полумарковских процессов – задания процесса с помощью так называемых полумарковских переходных функций. Семейство таких функций маркировано всеми открытыми подмножествами данного множества и представляет собой структуру, определяемую марковским свойством процесса относительно моментов первого выхода из открытых множеств. В данной статье явление замедления рассматривается как следствие одного из возможных продолжений полугруппы операторов решений задачи Дирихле дифференциального уравнения эллиптического типа. В первой главе определяется полугруппа операторов решений задачи Дирихле и ставится задача продолжения этой полугруппы на области, содержащие некоторую изолированную точку. Во второй главе задача о продолжении полугруппы операторов сводится к решению двух дифференциальных уравнений первого порядка. Две произвольные постоянные, с точностью до которых определены решения этих уравнений, связаны со скачками в данной точке первых производных продолженных решений задачи Дирихле. В третьей главе исследуется процесс, который всюду в области за исключением изолированной точки ведёт себя как

Ключевые слова: диффузионный процесс, полумарковский процесс, дифференциальное уравнение, задача Дирихле, полугруппа операторов, отражение, задержка, асимметрия, стационарное распределение.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-4472.2010.1.

марковский диффузионный процесс. В изолированной точке определяется полумарковская переходная функция процесса так, чтобы её преобразование Лапласа по времени (переходная производящая функция) вместе с остальными переходными производящими функциями составляла полугруппу операторов задачи Дирихле. В согласии с результатом второй главы эта функция задаётся с точностью до двух постоянных, которые не произвольны только в том отношении, что должны обеспечивать существование полумарковского процесса в расширенной области значений. Для эргодического варианта построенного процесса исследуется одномерное стационарное распределение, которое обнаруживает в общем случае замедление процесса в данной точке и различие в средней скорости прохождения этой точки слева направо и справа налево, что даёт повод определить такую точку словами “замедление” и “асимметрия”. В последней главе выводятся формулы одномерного стационарного распределения процесса с кусочно постоянными коэффициентами соответствующего дифференциального уравнения. Вычисляется величина скачка функции распределения в данной точке и плотности распределений на областях слева и справа от этой точки. По этим формулам видно, что скачок функции распределения и ненулевая разность плотностей слева и справа от данной точки могут быть и в том случае, когда коэффициенты уравнения не имеют скачка в этой точке.

1. Постановка задачи

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение эллиптического типа в некоторой области $S \subset R^n$ $(n \geqslant 0)$ с коэффициентами, обеспечивающими существование и единственность решения задачи Дирихле в любой области $\Delta \subset S$ при любой непрерывной функции ϕ, определённой на границе $\partial\Delta$ этой области. Обозначим $f_\Delta(\phi) \equiv f_\Delta(\phi\,|\cdot)$ это решение. Таким образом, $f_\Delta(\phi)$ удовлетворяет этому уравнению внутри области Δ и $f_\Delta(\phi\,|y) \to \phi(x)$ при $y \to x$, где $x \in \partial\Delta$, $y \in \Delta$. Пусть функция ϕ определена на всей области S. Если рассмотреть продолжение функции $f_\Delta(\phi)$ на всё множество S вида $f_\Delta(\phi\,|x) = \phi(x)$ $(x \in S \setminus \Delta)$, то f_Δ можно рассматривать как оператор на множестве всех непрерывных функций, заданных на S. Множество таких операторов обладает очевидным свойством (так называемое обобщённое полугрупповое свойство семейства операторов)

$$f_{\Delta_2}(\phi) = f_{\Delta_1}(f_{\Delta_2}(\phi)) \quad (\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset S), \tag{1}$$

которое легко следует из единственности решения задачи Дирихле (см., например, [2, с. 198]).

Название “обобщённая полугруппа” вытекает из вероятностной интерпретации решения. Известно, что для диффузионного марковского процесса (X_t) с семейством мер (P_x) для семейства функций вида

$$f_\tau(\phi\,|\,x) \equiv E_x(\phi(X_\tau);\, \tau < \infty),$$

где τ – марковский момент относительно натуральной фильтрации, выполняется свойство $(f_\tau(\phi) \equiv f_\tau(\phi\,|\,\cdot))$

$$f_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(\phi\,|\,x) = f_{\tau_1}(f_{\tau_2}(\phi)\,|\,x),$$

где $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$ (τ_1, τ_2 – марковские моменты, θ_t – оператор сдвига), что по-существу является уравнением Колмогорова–Чепмена для случайных моментов времени и является прямым обобщением феллеровской полугруппы операторов. Применив это свойство к моментам первого выхода из открытых множеств Δ, обозначаемых σ_Δ, и используя свойство

$$\sigma_{\Delta_2} = \sigma_{\Delta_1} \dot{+} \sigma_{\Delta_2} \quad (\Delta_1 \subset \Delta_2),$$

мы получаем для функционалов соотношение

$$f_{\sigma_{\Delta_2}}(\phi) = f_{\sigma_{\Delta_1}}(f_{\sigma_{\Delta_2}}(\phi)),$$

которое в несколько упрощённой форме переносится на соответствующие решения задачи Дирихле.

Мы будем рассматривать одномерный вариант уравнения

$$\frac{1}{2} f'' + Af' - Bf = 0, \tag{2}$$

где A, B – непрерывные функции на интервале S и $B \geqslant 0$. Для каждого интервала $(a, b) \subset S$ определена фундаментальная система двух решений этого уравнения $g_{(a,b)}$ и $h_{(a,b)}$, где $g_{(a,b)}(a+) = h_{(a,b)}(b-) = 1$, $g_{(a,b)}(b-) = h_{(a,b)}(a+) = 0$. Из условия непрерывности определим значения функций $g_{(a,b)}$ и $h_{(a,b)}$ в точках a и b. Решение задачи Дирихле для этого уравнения при $x \in \Delta = (a, b)$ представляется в виде $f_\Delta(\phi\,|\,x) = g_{(a,b)}(x)\phi(a) + h_{(a,b)}(x)\phi(b)$. Полугрупповое свойство для одномерного случая переходит в систему двух уравнений для этих функций. При $x \in (c,d) \subset (a,b)$ имеем

$$g_{(a,b)}(x) = g_{(c,d)}(x)g_{(a,b)}(c) + h_{(c,d)}(x)g_{(a,b)}(d), \tag{3}$$
$$h_{(a,b)}(x) = g_{(c,d)}(x)h_{(a,b)}(c) + h_{(c,d)}(x)h_{(a,b)}(d). \tag{4}$$

Это свойство мы положим в основу определения решения задачи Дирихле дифференциального уравнения (2) на интервале (a,b) в предположении, что известны полугруппа решений задачи Дирихле на каждом из интервалов (a,z) и (z,b). Типичный случай пользы от такого продолжения – определить решение задачи Дирихле в точке разрыва коэффициентов дифференциального уравнения в ситуации, когда слева и справа от точки разрыва известны аналитические решения соответствующих задач.

Пусть на каждом из интервалов (a,z), (z,b) семейства функций g_Δ, h_Δ ($\Delta \subset (a,z)$ или $\Delta \subset (z,b)$) удовлетворяет условиям (3), (4). Будем искать решения на интервалах, содержащих точку z, для совокупности которых выполняется полугрупповое условие. Пусть такое семейство решений существует. Тогда при $a \leqslant c < x < z < d \leqslant b$ имеем

$$g_{(c,d)}(x) = g_{(c,z)}(x) + h_{(c,z)}(x)g_{(c,d)}(z),\ h_{(c,d)}(x) = h_{(c,z)}(x)h_{(c,d)}(z), \tag{5}$$

а при $a \leqslant c < z < x < d \leqslant b$

$$g_{(c,d)(x)} = g_{(z,d)}(x)g_{(c,d)}(z),\ h_{(c,d)}(x) = g_{(z,d)}(x)h_{(c,d)}(z) + h_{(z,d)}(z). \tag{6}$$

Отсюда следует, что функции g и h продолженного решения должны быть непрерывны в точке разрыва коэффициентов. Однако непрерывность их производных в точке разрыва не является необходимым условием и является независимым предположением, как это будет показано ниже. Таким образом, подлежат определению функции $g_{(c,d)}(z)$ и $h_{(c,d)}(z)$. Остальные компоненты определены как решения уравнения (2) на смежных интервалах. При построении полугруппы решений уравнения (2) на всём интервале (a,b) формулы (5) и (6) будем рассматривать как определение решений на интервалах, содержащих точку z.

2. Решение

Найдём общий вид функций $g_{(c,d)}(z)$ и $h_{(c,d)}(z)$, исходя из полугруппового свойства семейства решений. В дальнейшем будем предполагать, что на интервале (a,z) коэффициент B непрерывен, а коэффициент A имеет ограниченные производные. То же относится к интервалу (z,b).

Имеем при $a \leqslant x < z < y \leqslant b$

$$g_{(x,y)}(z) = g_{(x+\epsilon,y)}(z)(g_{(x,z)}(x+\epsilon) + h_{(x,z)}(x+\epsilon)g_{(x,y)}(z)).$$

Используя представления

$$g_{(x,z)}(x+\epsilon) = 1+\epsilon g'_{(x,z)}(x)+o(\epsilon),\ h_{(x,z)}(x+\epsilon) = \epsilon h'_{(x,z)}(x)+o(\epsilon)\ (\epsilon\to 0),$$

при фиксированном $y > z$ получаем уравнение относительно функции $K_1(x) \equiv g_{(x,y)}(z)$

$$K_1' + g'_{(x,z)}(x)K_1 + h'_{(x,z)}(x)K_1^2 = 0. \tag{7}$$

Это – уравнение Бернулли, каноническое решение которого имеет вид

$$K_1(x) = \frac{\exp\int\limits_a^x(-g'_{(s,z)}(s))\,ds}{C_1 + \int_a^x h'(t,z)(t)\left(\exp\int\limits_a^t(-g'_{(s,z)}(s))\,ds\right)dt}$$

(см., например, [1, с. 38]), где C_1 – произвольная постоянная по x. Однако в данном случае существует более удобная форма решения

Лемма 1. *Общим решением уравнения* (7) *является функция*

$$K_1(x) = \frac{-g'_{(x,z)}(z)}{L_1 + h'_{(x,z)}(z)}, \tag{8}$$

где $L_1 = L_1(y)$ – произвольная постоянная по x, которая может зависеть от y.

Доказательство. Достаточно проверить, что эта функция удовлетворяет функциональному уравнению

$$K_1(a) = K_1(x)(g_{(a,z)}(x) + h_{(a,z)}(x)K_1(a)) \quad (a < x < z < y),$$

так как из этого уравнения следует уравнение (7). Переписываем это уравнение в виде

$$K_1(a) = \frac{K_1(x) g_{(a,z)}(x)}{1 - K_1(x) h_{(a,z)}(x)}.$$

Слева имеем

$$\frac{-g'_{(a,z)}(z)}{L_1 + h'_{(a,z)}(z)},$$

Справа имеем

$$\frac{-\, g_{(a,z)}(x)\, g'_{(x,z)}(z)/(L_1 + h'_{(x,z)}(z))}{1 + h_{(a,z)}(x) g'_{(x,z)}(z)/(L_1 + h'_{(x,z)}(z))}$$
$$= \frac{-\, g_{(a,z)}(x)\, g'_{(x,z)}(z)}{L_1 + h'_{(x,z)}(z) + h_{(a,z)}(x) g'_{(x,z)}(z)}.$$

Для числителей левой и правой сторон уравнения справедливо

$$g_{(a,z)}(z - \epsilon) = g_{(x,z)}(z - \epsilon) g_{(a,z)}(x),$$

откуда следует их равенство. Для знаменателей справедливо

$$h_{(a,z)}(z - \epsilon) = h_{(x,z)}(z - \epsilon) + g_{(x,z)}(z - \epsilon) h_{(a,z)}(x),$$

откуда следует их равенство. □

Проведя при фиксированном $x < z$ аналогичные рассуждения относительно функции $K_2(y) \equiv h_{(x,y)}(z)$, мы убеждаемся, что справедливо уравнение Бернулли

$$K'_2(y) + h'_{(z,y)}(y) K_2(y) + g'_{(z,y)}(y) K_2^2(y) = 0. \tag{9}$$

Лемма 2. *Общим решением уравнения* (9) *является функция*

$$K_2(y) = \frac{h'_{(z,y)}(z)}{L_2 - g'_{(z,y)}(z)}, \tag{10}$$

где $L_2 = L_2(x)$ – произвольная постоянная по y, которая может зависеть от x.

Доказательство. аналогично доказательству леммы 1. □

Можно показать, что

$$-g'_{(x,z)}(z) \to \infty, \quad h'_{(x,z)}(z) \to \infty, \quad \frac{-g'_{(x,z)}(z)}{h'_{(x,z)}(z)} \to 1 \quad (x \uparrow z),$$
$$h'_{(z,y)}(z) \to \infty, \quad -g'_{(z,y)}(z) \to \infty, \quad \frac{h'_{(z,y)}(z)}{-g'_{(z,y)}(z)} \to 1 \quad (y \downarrow z).$$

(см., например, [3]), а также, что $K_1(x)$ имеет производную слева в точке z и $K_2(x)$ имеет производную справа в точке z. При этом

$$K_1(x) \equiv g_{x,y}(z) = \frac{g_{(z-\epsilon,y)}(z)g_{(x,z)}(z-\epsilon)}{1 - g_{(z-\epsilon,y)}(z)h_{(x,z)}(z-\epsilon)} =$$

$$= \frac{-\epsilon g'_{(x,z)}(z) + o(\epsilon)}{1-(1-K_1'(z)\epsilon)(1-h'_{(x,z)}(z)\epsilon)+o(\epsilon)} \to \frac{-g'_{(x,z)}(z)}{K_1'(z)+h'_{(x,z)}(z)} \quad (\epsilon \to 0).$$

Отсюда следует, что произвольная постоянная в решении уравнения Бернулли – это производная слева функции K_1 в точке z: $L_1 = K_1'(z-)$. Аналогично убеждаемся в том, что L_2 равно производной справа функции K_2 в точке z со знаком минус: $L_2 = -K_2'(z-)$.

Оценим производные функций $g_{(c,d)}$ и $h_{(c,d)}$ в точке z. Имеем

$$\begin{aligned} g_{(c,d)}(z-\epsilon) &= g_{(c,z)}(z-\epsilon) + h_{(c,z)}(z-\epsilon)g_{(c,d)}(z) \\ &= -\epsilon g'_{(c,z)}(z) + (1-\epsilon h'_{(c,z)}(z))g_{(c,d)}(z) + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Отсюда левая производная равна

$$g'_{(c,d)}(z-) = g'_{(c,z)}(z) + h'_{(c,z)}(z)\,\frac{-g'_{(c,z)}(z)}{L_1 + h'_{(c,z)}(z)} = -L_1 g_{(c,d)}(z).$$

Имеем далее

$$g_{(c,d)}(z+\epsilon) = g_{(z,d)}(z+\epsilon)g_{(c,d)}(z) = (1+\epsilon g'_{(z,d)}(z))g_{(c,d)}(z) + o(\epsilon).$$

Отсюда правая производная равна $g'_{(c,d)}(z+) = g'_{(z,d)}(z)g_{(c,d)}(z)$. Следовательно, производная функции $g_{(c,d)}$ из полугруппы решений уравнения (2) непрерывна в точке z, если и только если $L_1 = -g'_{(z,d)}(z)$.

Имеем

$$\begin{aligned} h_{(c,d)}(z+\epsilon) &= g_{(z,d)}(z+\epsilon)h_{(c,d)}(z) + h_{(z,d)}(z+\epsilon) \\ &= (1+\epsilon g'_{(z,d)}(z))h_{(c,d)}(z) + \epsilon h'_{(z,d)}(z) + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Отсюда правая производная равна $h'_{(c,d)}(z+) = L_2 h_{(c,d)}(z)$. Имеем далее

$$h_{(c,d)}(z-\epsilon) = h_{(c,z)}(z-\epsilon)h_{(c,d)}(z) = (1-\epsilon h'_{(c,z)}(z))h_{(c,d)}(z) + o(\epsilon).$$

Отсюда левая производная равна $h'_{(c,d)}(z-) = h'_{(c,z)}(z)h_{(c,d)}(z)$. Следовательно, производная функции $h_{(c,d)}$ из полугруппы решений уравнения (2) непрерывна в точке z, если и только если $L_2 = h'_{(c,z)}(z+)$. Итак, если существует полугруппа расширенных решений на множестве всех интервалов $(c,d) \subset (a,b)$ такая, что для интервалов, содержащих точку z, соответствующие решения дифференцируемы в точке z, то эти решения определяются формулами

$$g_{(c,d)}(z) = \frac{-g'_{(c,z)}(z)}{-g'_{(z,d)}(z) + h'_{(c,z)}(z)}, \quad h_{(c,d)}(z) = \frac{h'_{(z,d)}(z)}{-g'_{(z,d)}(z) + h'_{(c,z)}(z)}.$$

Теперь нам следует доказать, что это решение является полугрупповым, т. е. выполняются условия (3) и (4). При выполнении формул (5), (6) достаточно проверить это свойство при $x = z$.

Теорема 1. *Для того, чтобы продолженное семейство решений* $(g_{(c,d)}, h_{(c,d)})$, *определяемое функциями*

$$\begin{aligned} g_{(x,y)}(z) &= \frac{-g'_{(x,z)}(z)}{L_1 + h'_{(x,z)}(z)}, \\ h_{(x,y)}(z) &= \frac{h'_{(z,y)}(z)}{L_2 - g'_{(z,y)}(z)}, \end{aligned}$$

удовлетворяло полугрупповому условию, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие числа C *и* $D > 0$, *при которых*

$$L_1 = C - D\, g'_{(z,y)}(z), \quad L_2 = \frac{1}{D}\,(C + h'_{(x,z)}(z)). \tag{11}$$

Доказательство. *Достаточность.* При $u < x < z < y < v$ проверим выполнение формулы

$$g_{(u,v)}(z)=g_{(x,y)}(z)(g_{(u,z)}(x)+h_{(u,z)}(x)g_{(u,v)}(z))+h_{(x,y)}(z)g_{(z,y)}(y)g_{(u,v)}(z),$$

которую можно переписать в виде

$$g_{(u,v)}(z) = \frac{g_{(x,y)}(z)g_{(u,z)}(x)}{1 - g_{(x,y)}(z)h_{(u,z)}(x) - h_{(x,y)}(z)g_{(z,y)}(y)}. \tag{12}$$

Левая часть этого равенства равна

$$\frac{-g'_{(u,z)}(z)}{C - D\, g'_{(z,y)}(z) + h'_{(u,z)}(z)}.$$

Правая часть равна

$$\frac{-g'_{(x,z)}(z)g_{(u,z)}(x)}{C - D\, g'_{(z,y)}(z) + h'_{(x,z)}(z) + g'_{(x,z)}(z)h_{(u,z)}(x) - W\, h'_{(z,y)}(z)g_{(z,y)}(y)},$$

где

$$W \equiv \frac{C - D\, g'_{(z,y)}(z) + h'_{(x,z)}(z)}{(C + h'_{(x,z)}(z))/D - g'_{(z,y)}(z)} = D.$$

Из формулы $g_{(u,z)}(z - \epsilon) = g_{(x,z)}(z - \epsilon)g_{(u,z)}(x)$ следует равенство числителей этих двух выражений. Из формул $g_{(z,y)}(z + \epsilon) = g_{(z,y)}(z + \epsilon) + h_{(z,y)}(z + \epsilon)g_{(z,y)}(y)$ и $h_{(u,z)}(z - \epsilon) = h_{(x,z)}(z - \epsilon) + g_{(x,z)}(z - \epsilon)h_{(u,z)}(x)$ следует равенство знаменателей этих выражений. Аналогично проверяется выполнение равенства $h_{(u,v)}(z) = g_{(x,y)}(z)h_{(u,v)}(x) + h_{(x,y)}(z)h_{(u,v)}(y)$, которое можно переписать в виде

$$h_{(u,v)}(z) = \frac{h_{(x,y)}(z)h_{(z,y)}(y)}{1 - h_{(x,y)}(z)g_{(z,y)}(y) - g_{(x,y)}(z)h_{(u,z)}(x)}. \tag{13}$$

Необходимость. Предположим, что формула (12) верна. Левая часть её равна дроби

$$\frac{-g'_{(u,z)}(z)}{L_1(v) + h'_{(u,z)}(z)}.$$

Правую часть можно записать в виде дроби

$$\frac{g_{(u,z)}(x)(-g'_{(x,z)}(z))}{L_1(y) + h'_{(x,z)}(z) - h_{(u,z)}(x)(-g'_{(x,z)}(z)) - D\, g_{(z,v)}(y) h'_{(z,y)}(z)},$$

где

$$D = \frac{L_1(y) + h'_{(x,z)}(z)}{L_2(x) - g'_{(z,y)}(z)}.$$

Учитывая предыдущие представления в числителях и знаменателях этих выражений, получаем уравнение

$$L_1(v) = L_1(y) - D\, g_{(z,v)}(y) h'_{(z,y)}(z),$$

откуда следует, что D не зависит от x. Предположим, что формула (13) верна. Проведя такие же преобразования, получаем уравнение

$$L_2(u) = L_2(x) + \frac{1}{D}\, h_{(u,z)}(x) g'_{(x,z)}(z),$$

откуда следует, что D не зависит от y. Следовательно, D – постоянная величина. Очевидно, что она положительна. Из равенства $L_1(y) + h'_{(x,z)}(z) = D(L_2(x) - g'_{(z,y)}(z))$ выводим равенство двух функций, зависящих от разных аргументов:

$$L_1(y) + D\, g'_{(z,y)}(z) = D L_2(x) - h'_{(x,z)}(z),$$

откуда следует, что существует некоторая константа C, которой обе эти функции равны. □

Итак мы доказали, что

$$g_{(x,y)}(z) = \frac{-g'_{(x,z)}(z)}{C - D\, g'_{(z,y)}(z) + h'_{(x,z)}(z)}, \tag{14}$$

$$h_{(x,y)}(z) = \frac{D\, h'_{(z,y)}(z)}{C - D\, g'_{(z,y)}(z) + h'_{(x,z)}(z)} \tag{15}$$

– общий вид непрерывных решений в точке z, допускающий разрыв производных от этих функций в этой точке. Положив $C = 0$ и $D = 1$, мы получаем представления решений с непрерывными производными в точке z. При $D = 0$ мы получаем условие, которое в статье [3] интерпретировано как отражение некоторого непрерывного процесса от точки z (правой границы интервала (x, z)) при подходе к ней слева, и как безвозвратное прохождение через точку z (левую границу интервала (z, y)) при подходе к ней справа. Ситуация меняется на противоположную при $D = \infty$. Это даёт повод назвать множитель D коэффициентом асимметрии.

Заметим, что представления (14), (15) не связаны с разрывом коэффициентов, но их наиболее естественная цель – дать решения в точке разрыва. Решения с произвольными постоянными C и D могут быть определены для любой точки интервала с помощью предписанных значений скачков производных в выбранной точке. Пусть ϵ_g, ϵ_h – скачки производных в точке z функций $g_{(a,b)}$, $h_(a, b)$ соответственно. Тогда, как не трудно вывести,

$$D = \frac{(h'_{(z,b)}(z) - \epsilon_h) g'_{(a,z)}(z)}{(g'_{(a,z)}(z) - \epsilon_g) h'_{(z,b)}(z)},$$

$$C = \frac{\epsilon_g h'_{(a,z)}(z) h'_{(z,b)}(z) - \epsilon_h g'_{(a,z)}(z) g'_{(z,b)}(z)}{(g'_{(a,z)}(z) - \epsilon_g) h'_{(z,b)}(z)}.$$

3. Точка задержки и асимметрии локально марковского диффузионного процесса

Рассмотрим одномерный непрерывный полумарковский процесс (X_t), задаваемый семейством переходных производящих функций (преобразований Лапласа) $(g_{(u,v)}(\lambda, x),\ h_{(u,v)}(\lambda, x))$ $(u < x < v,\ \lambda \geqslant 0)$, где

$$g_{(u,v)}(\lambda, x) = E_x(\exp(-\lambda \sigma_{(u,v)});\ \sigma_{(u,v)} < \infty,\ X_{\sigma_{(u,v)}} = u),$$

$$h_{(u,v)}(\lambda, x) = E_x(\exp(-\lambda \sigma_{(u,v)});\ \sigma_{(u,v)} < \infty,\ X_{\sigma_{(u,v)}} = v),$$

(P_x) – согласованное семейство мер процесса $(P_x(X_0 = x) = 1)$. Процесс называется полумарковским, если он обладает марковским свойством относительно момента первого выхода из любого интервала. Такой процесс называется локально марковским диффузионным процессом на интервале (u, v), если на этом интервале при любом $\lambda \geqslant 0$ функции $(g_{(u,v)}(\lambda, x),\ h_{(u,v)}(\lambda, x))$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{2} f'' + A f' - B \lambda f = 0, \tag{16}$$

с краевыми условиями

$$g_{(u,v)}(\lambda, u+) = h_{(u,v)}(\lambda, v-) = 1, \quad g_{(u,v)}(\lambda, v-) = h_{(u,v)}(\lambda, u+) = 0.$$

Таким образом, при фиксированном λ пара функций $(g_{(u,v)}(\lambda, x), h_{(u,v)}(\lambda, x))$ удовлетворяет полугрупповому условию (5), (6).

Предположим теперь, что существует точка z, в которой коэффициенты $A(x)$ или $B(x)$ могут иметь разрыв по x первого рода. Тогда, как доказано выше, существует продолжение в точку z решений уравнения (3), отдельно полученных на интервалах до z и после z. Отсюда переходные производящие функции в точке z имеют вид

$$g_{(u,v)}(\lambda, z) = \frac{-g'_{(a,z)}(\lambda, z)}{C - Dg'_{(z,b)}(\lambda, z) + h'_{(a,z)}(\lambda, z)}, \tag{18}$$

$$h_{(u,v)}(\lambda, z) = \frac{Dh'_{(z,b)}(\lambda, z)}{C - Dg'_{(z,b)}(\lambda, z) + h'_{(a,z)}(\lambda, z)}. \tag{19}$$

Для того, чтобы существовал полумарковский процесс с такими переходными производящими функциями, достаточно, чтобы слагаемое $C = C(\lambda)$ в знаменателях этих выражений было неотрицательным, причем $C(0) = 0$ и функция $C'(\lambda)$ была вполне монотонной (см., например, [4]), а множитель D был положительным. Пусть $C(\lambda)$ – такая функция, у которой $C'(0) = \gamma > 0$. Покажем, что для непрерывного локально марковского диффузионного процесса точка z является задерживающей точкой, и при $D \neq 1$ – это точка асимметрии. Мы покажем это на примере непрерывного процесса со значениями из замкнутого отрезка $[a, b]$ с мгновенным отражением от границ отрезка. На каждом из интервалов (a, z), (z, b) этот процесс совпадает с диффузионным процессом с параметрами $(A_1(x), B_1(x))$ и $(A_2(x), B_2(x))$ соответственно, непрерывными и ограниченными по x на соответствующих интервалах. Такой процесс является эргодическим. Для него функция одномерного стационарного распределения $Q(y)$ $(a \leqslant y \leqslant b)$ может быть выведена с помощью метода теории восстановления, использованного в работе [4]. В работе [3] доказано, что для $y \neq z$

$$Q(y) = \frac{\nu_{(a,y)}(y)}{\nu_{(a,y)}(y) + \nu_{(y,b)}(y)},$$

где

$$\nu_{(a,y)}(y) = -m'_{(a,y)}(y) + \frac{H'_{(a,y)}(y)}{H'_{(a,y)}(a)} m'_{(a,y)}(a),$$
$$\nu_{(y,b)}(y) = m'_{(y,b)}(y) - \frac{H'_{(y,b)}(y)}{H'_{(y,b)}(b)} m'_{(y,b)}(b),$$

$m_{(c,d)}(x)$ – математическое ожидание времени первого выхода процесса из интервала (c,d) при начальной точке процесса x; $H_{(c,d)}(x) = h_{(c,d)}(0,x)$.

Пусть $a < y < z$. Пользуясь представлением

$$m_{(c,d)}(x) = m^{(g)}_{(c,d)}(x) + m^{(h)}_{(c,d)}(x),$$

где

$$m^{(g)}_{(c,d)}(x) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} g_{(c,d)}(\lambda,x)\right|_{\lambda=0},$$
$$m^{(h)}_{(c,d)}(x) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} h_{(c,d)}(\lambda,x)\right|_{\lambda=0},$$

вычислим компоненты $Q(y)$. Интервал (a,y) не содержит точек разрыва коэффициентов. Поэтому $\nu_{(a,y)}(y)$ вычисляется стандартным образом. Для вычисления $m'_{(y,b)}(x)$ и $H'_{(y,b)}(x)$ возьмём сначала $y < x < z$. Из формулы

$$g_{(y,b)}(\lambda,x) = g_{(y,z)}(\lambda,x) + h_{(y,z)}(\lambda,x) g_{(y,b)}(\lambda,z)$$

следует

$$m^{(g)}_{(y,b)}(x) = m^{(g)}_{(y,z)}(x) + m^{(h)}_{(y,z)}(x) G_{(y,b)}(z) + H_{(y,z)}(x) m^{(g)}_{(y,b)}(z),$$

где $G_{(c,d)}(x) \equiv g_{(c,d)}(0,x)$. Очевидно, что $G_{(c,d)}(x) + H_{(c,d)}(x) = 1$. Из формулы

$$h_{(y,b)}(\lambda,x) = h_{(y,z)}(\lambda,x) h_{(y,b)}(\lambda,z)$$

следует

$$m^{(h)}_{(y,b)}(x) = m^{(h)}_{(y,z)}(x) H_{(y,b)}(z) + H_{(y,z)}(x) m^{(h)}_{(y,b)}(z).$$

Отсюда
$$m_{(y,b)}(x) = m_{(y,z)}(x) + H_{(y,z)}(x) m_{(y,b)}(z).$$

Пользуясь формулами (17), (18), получаем

$$m^{(g)}_{(y,b)}(z) \equiv -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} g_{(y,b)}(\lambda, z)\right|_{\lambda=0}$$
$$= \frac{-(m^{(g)}_{(y,z)})'(z)(DH'_{(z,b)}(z)+H'_{(y,z)}(z))+H'_{(y,z)}(z)(\gamma+D(m^{(g)}_{(z,b)})'(z)-(m^{(h)}_{(y,z)})'(z))}{(DH'_{(z,b)}(z)+H'_{(y,z)}(z))^2},$$
$$m^{(h)}_{(y,b)}(z) = -\left.\frac{\partial}{\partial\lambda} h_{(y,b)}(\lambda, z)\right|_{\lambda=0}$$
$$= \frac{D(m^{(h)}_{(z,b)})'(z)(DH'_{(z,b)}(z)+H'_{(y,z)}(z))+DH'_{(z,b)}(z)(\gamma+D(m^{(g)}_{(z,b)})'(z)-(m^{(h)}_{(y,z)})'(z))}{(DH'_{(z,b)}(z)+H'_{(y,z)}(z))^2},$$

откуда
$$m_{(y,b)}(z) = \frac{\gamma + Dm'_{(z,b)}(z) - m'_{(y,z)}(z)}{DH'_{(z,b)}(z) + H'_{(y,z)}(z)},$$

а также

$$m'_{(y,b)}(y) = m'_{(y,z)}(y) + H'_{(y,z)}(y)\frac{\gamma + Dm'_{(z,b)}(z) - m'_{(y,z)}(z)}{DH'_{(z,b)}(z) + H'_{(y,z)}(z)}.$$

Кроме того

$$H_{(y,b)}(x) = H_{(y,z)}(x) H_{(y,b)}(z),$$
$$H_{(y,b)}(z) = \frac{DH'_{(z,b)}(z)}{DH'_{(z,b)}(z) + H'_{(y,z)}(z)}.$$

Отсюда
$$H_{(y,b)}(y) = H_{(y,z)}(y)\frac{DH'_{(z,b)}(z)}{DH'_{(z,b)}(z) + H'_{(y,z)}(z)}.$$

Пусть теперь $z < x < b$. Из формулы

$$g_{(y,b)}(\lambda, x) = g_{(z,b)}(\lambda, x) g_{(y,b)}(\lambda, z)$$

следует

$$m^{(g)}_{(y,b)}(x) = m^{(g)}_{(z,b)}(x) G_{(y,b)}(z) + G_{(z,b)}(x) m^{(g)}_{(y,b)}(z).$$

Из формулы

$$h_{(y,b)}(\lambda,x) = h_{(z,b)}(\lambda,x) + g_{(z,b)}(\lambda,x)h_{(y,b)}(\lambda,z)$$

следует

$$m^{(h)}_{(y,b)}(x) = m^{(h)}_{(z,b)}(x) + m^{(g)}_{(z,b)}(x)H_{(y,b)}(z) + G_{(z,b)}(x)m^{(h)}_{(y,b)}(z).$$

Отсюда

$$m_{(y,b)}(x) = m_{(z,b)}(x) + G_{(z,b)}(x)m_{(y,b)}(z),$$

а также

$$\begin{aligned} m'_{(y,b)}(b) &= m'_{(z,b)}(b) + G'_{(z,b)}(b)m_{(y,b)}(z) \\ &= m'_{(z,b)}(b) - H'_{(z,b)}(b)\frac{\gamma + Dm'_{(z,b)}(z) - m'_{(y,z)}(z)}{DH'_{(z,b)}(z) + H'_{(y,z)}(z)}. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем

$$H_{(y,b)}(x) = H_{(z,b)}(x) + G_{(z,b)}(x)H_{(y,b)}(z),$$

$$H_{(y,b)}(z) = \frac{DH'_{(z,b)}(z)}{DH'_{(z,b)}(z) + H'_{y,z}(z)}, \quad G_{(y,b)}(z) = 1 - H_{(y,b)}(z).$$

Отсюда

$$H'_{(y,b)}(b) = H'_{(z,b)}(b)\frac{H'_{(y,z)}(z)}{DH'_{(z,b)}(z) + H'_{y,z}(z)}.$$

Окончательно получаем

$$\nu_{(y,b)}(y) = \nu_{(y,z)}(y) + \frac{H'_{(y,z)}(y)}{H'_{(y,z)}(z)}(\gamma + D\nu_{(z,b)}(z)),$$

где

$$\begin{aligned} \nu_{(y,z)}(y) &= m'_{(y,z)}(y) + \frac{H'_{(y,z)}(y)}{H'_{(y,z)}(z)}(-m'_{(y,z)}(z)), \\ \nu_{(z,b)}(z) &= m'_{(z,b)}(z) + \frac{H'_{(z,b)}(z)}{H'_{(z,b)}(b)}(-m'_{(z,b)}(b)). \end{aligned}$$

Таким образом, при $y < z$ имеем

$$Q(y) = \frac{\nu_{(a,y)}(y)}{\nu_{(a,y)}(y) + \nu_{(y,z)}(y) + (\gamma + D\nu_{(z,b)}(z))H'_{(y,z)}(y)/H'_{(y,z)}(z)}. \quad (19)$$

Проделав аналогичные преобразования, получаем формулу для $y > z$

$$Q(y) = \frac{\nu_{(z,y)}(y) + (\gamma + \nu_{(a,z)}(z))H'_{(z,y)}(y)/(DH'_{(z,y)}(z))}{\nu_{(y,b)}(y) + \nu_{(z,y)}(y) + (\gamma + \nu_{(a,z)}(z))H'_{(z,y)}(y)/(DH'_{(z,y)}(z))}. \quad (20)$$

При $y \to z$ $(y < z)$ используя пределы $\lim \nu_{(y,z)}(y) = 0$ и $\lim H'_{(y,z)}(y)/H'_{(y,z)}(z) = 1$ и непрерывность прочих функций в точке z, получаем

$$Q(z-) = \frac{\nu_{(a,z)}(z)}{\gamma + \nu_{(a,z)}(z) + D\nu_{(z,b)}(z))}.$$

Аналогично, при $y \to z$ $(y > z)$ получаем

$$Q(z+) = \frac{(\gamma + \nu_{(a,z)}(z))/D}{\nu_{(z,b)}(z) + (\gamma + \nu_{(a,z)}(z))/D} = \frac{\gamma + \nu_{(a,z)}(z)}{\gamma + \nu_{(a,z)}(z) + D\nu_{(z,b)}(z))}.$$

Отсюда

$$Q(z+) - Q(z-) = \frac{\gamma}{\gamma + \nu_{(a,z)}(z) + D\nu_{(z,b)}(z))}.$$

Наличие скачка функции распределения говорит о положительном относительном времени пребывания стационарного процесса в точке z. Определяет это время задержки параметр γ, то есть производная функции $C(\lambda)$ в нуле.

Полагая $D = 0$ и $\gamma = 0$, мы получаем $Q(z+) = 1$ и при $y < z$

$$Q(y) = \frac{\nu_{(a,y)}(y)}{\nu_{(a,y)}(y) + \nu_{(y,z)}(y)},$$

что соответствует стационарному распределению, сосредоточенному на интервале (a, z). При $D = \infty$ и $\gamma = 0$ мы имеем $Q(z-) = 0$ и при $y > z$

$$Q(y) = \frac{\nu_{(z,y)}(y)}{\nu_{(y,b)}(y) + \nu_{(z,y)}(y)},$$

что соответствует стационарному распределению, сосредоточенному на интервале (z, b). Естественно назвать параметр D показателем асимметрии точки z.

В общем случае наличие задерживающей точки приводит к потере марковости процесса. Однако, если на левом и правом открытых интервалах процесс является локально марковским и $C(\lambda) = \lambda\gamma$, то глобальная марковость процесса сохраняется несмотря на задержку в точке z [4].

4. Пример

Мы дадим пример вычисления приращения функции $Q(y)$ для процессов, определяемых уравнениями вида (16) с постоянными по x коэффициентами A и B на каждом из интервалов (a, z) и (z, b) и с мгновенным отражением от границ интервала.

Рассмотрим уравнение (16) с постоянными коэффициентами на интервале (c, d). Решения уравнения в этом случае имеют вид

$$g_{(c,d)}(\lambda, x) = e^{-A(x-c)} \frac{\sinh((d-x)\sqrt{A^2+2B\lambda})}{\sinh((d-c)\sqrt{A^2+2B\lambda})},$$
$$h_{(c,d)}(\lambda, x) = e^{A(d-x)} \frac{\sinh((x-c)\sqrt{A^2+2B\lambda})}{\sinh((d-c)\sqrt{A^2+2B\lambda})}$$

где $c < x < d$. При $A \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} m_{(c,d)}(x) = {} & \frac{B\ \cosh((d-c)A)}{A \sinh((d-c)A)} \\ & \times \left(e^{-A(x-c)} \left((d-c)\, \frac{\sinh((d-x)A)}{\sinh((d-c)A)} - (d-x)\, \frac{\cosh((d-x)A)}{\cosh((d-c)A)} \right) + \right. \\ & \left. + \ e^{A(d-x)} \left((d-c)\, \frac{\sinh((x-c)A)}{\sinh((d-c)A)} - (x-c)\, \frac{\cosh((x-c)A)}{\cosh((d-c)A)} \right) \right), \end{aligned}$$

а при $A = 0$

$$m_{(c,d)}(x) = \frac{B\ \left((d-c)^3 - (d-x)^3 - (x-c)^3\right)}{3(d-c)}.$$

Отсюда $m_{(c,d)}(c) = m_{(c,d)}(d) = 0$. Нетрудно доказать также, что в этих формулах $m_{(c,d)}(x) > 0$. Имеем также

$$H_{(c,d)}(x) = \begin{cases} e^{A(d-x)} \frac{\sinh((x-c)A)}{\sinh((d-c)A)}, & A \neq 0 \\ \frac{x-c}{d-c}, & A = 0, \end{cases}$$

Производные на краях интервала при $A \neq 0$

$$m'_{(c,d)}(c) = \frac{B\,(d-c)}{\sinh^2((d-c)A)} \left(\frac{\cosh((d-c)A)\,\sinh((d-c)A)}{(d-c)A} - 1 \right.$$
$$\left. + e^{A(d-c)} \left(\cosh((d-c)A) - \frac{\sinh((d-c)A)}{(d-c)A} \right) \right) > 0,$$
$$m'_{(c,d)}(d) = \frac{B\,(d-c)}{\sinh^2((d-c)A)} \left(-\frac{\cosh((d-c)A)\,\sinh((d-c)A)}{(d-c)A} + 1 \right.$$
$$\left. - e^{-A(d-c)} \left(\cosh((d-c)A) - \frac{\sinh((d-c)A)}{(d-c)A} \right) \right) < 0,$$

а при $A = 0$

$$m'_{(c,d)}(c) = -m'_{(c,d)}(d) = B(d-c).$$

Из этих выражений следует, что производные на концах интервала стремятся к нулю при $d - c \to 0$. Далее, при $A \neq 0$

$$H'_{(c.d)}(c) = \frac{Ae^{A(d-c)}}{\sinh((d-c)A)}, \quad H'_{(c.d)}(d) = \frac{A\cosh((d-c)A)}{\sinh((d-c)A)} - A$$

и, следовательно, $H'_{(c.d)}(d)/H'_{(c.d)}(c) \to 1 \quad (d-c \to 0)$.

Из приведённых формул следует выражение для приращения и плотностей для случая, когда (A_1, B_1) и (A_2, B_2) – постоянные параметры диффузионных процессов на левой и правой частях интервала соответственно. Чтобы избежать громоздких формул, мы приведём выражения для случая $A_1 = A_2 = 0$. Итак

$$Q(z+) - Q(z-) = \frac{\gamma}{\gamma + 2B_1(z-a) + 2DB_2(b-z)},$$
$$Q'(y) = \frac{2B_1}{\gamma + 2B_1(z-a) + 2DB_2(b-z)} \quad (y < z),$$
$$Q'(y) = \frac{2DB_2}{\gamma + 2B_1(z-a) + 2DB_2(b-z)} \quad (y > z).$$

Последние две формулы показывают распределение стационарной вероятности между двумя смежными интервалами в зависимости от коэффициента асимметрии D. Два крайних значения этой произвольной постоянной 0 и ∞ определяют отражение процесса при подходе к точке z слева и справа соответственно.

Литература

1. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Наука, М. (1971).
2. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* Наука (2001).
3. Б. П. Харламов, *Диффузионный процесс с задержкой на краях отрезка.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **351** (2007), 284–297.
4. Б. П. Харламов, *О марковском диффузионном процессе с замедленным отражением на границе отрезка.* Зап. научн. семин. ПОМИ, **368** (2009), 231–255.

Harlamov B. P. On delay and asymmetry points of one-dimensional semi-Markov diffusion processes.

A homogeneous linear differential equation of the second order is considered. For an open interval where the equation is treated a family of operators of the Dirichlet problem on the set of all subintervals is said to be a generalized semi-group due to its special property. Let the equation has meaning on each of two disjoint intervals with a common boundary point z. The extension of the corresponding two semi-groups of operators to a semi-group of operators corresponding to the union of these intervals and the point z is shown to be not unique. It is determined by two arbitrary constants. In order to interpret these arbitrary constants we use a one-dimensional locally Markov diffusion process with special properties of passage of the point z. One of these arbitrary constants determines a delay of the process at the point z, and the second one induces an asymmetry of the process with respect to z. The two extremal meanings of the latter constant, 0 and ∞, determine reflection of the process from the point z while going to the point from the left and from the right, respectively.

Институт проблем машиноведения РАН,
Большой проспект В.О., д. 61,
199178, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 9 ноября 2010 г.