Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Введение

Рассмотрим эволюционное уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u, \tag{1}$$

где $\mathcal{A}$ – некоторый линейный оператор. Напомним, что операторной экспонентой $e^{t\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}$ называется семейство линейных операторов, таких, что при любом $t > 0$ оператор $e^{t\mathcal{A}}$ переводит функцию $\varphi(x)$ в решение $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием $u(0,x) = \varphi(x)$.

Хорошо известно (см. [8]), что для ряда псевдодифференциальных операторов, а также оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ операторная экспонента допускает удобное вероятностное представление. Именно, для оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ мы имеем

$$e^{t\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}}\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x + w(t)),$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс, выходящий из нуля, а для псевдодифференциального оператора $\mathcal{A}$, действующего как

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi(x+y) - \varphi(x))\Lambda(dy),$$

если мера Λ удовлетворяет условию $\int \min(|x|, 1)\Lambda(dx) < \infty$, и как

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\varphi'(x)\mathbf{1}_{[-1,1]}(y))\Lambda(dy), \tag{2}$$

Ключевые слова: случайная мера, псевдопроцесс, эволюционное уравнение, обобщенная функция.

Работа первого автора выполнена при поддержке грантов DFG 436 RUS 113/823 и НШ4472.2010.1. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта РФФИ 09-01-00515а.

если мера Λ удовлетворяет условию $\int \min(|x|^2, 1)\Lambda(dx) < \infty$, мы имеем

$$e^{t\mathcal{A}}\varphi(x) = \mathbb{E}\varphi(x + \xi(t)), \tag{3}$$

где $\xi(t)$ – выходящий из нуля скачкообразный процесс Леви с мерой Леви Λ. В случае, когда операторная экспонента допускает представление вида (3), фундаментальное решение $q(t, x, y)$ уравнения (1) при всех $t > 0$ совпадает с одномерным распределением процесса $x + \xi(t)$.

Следует отметить, что представление (3) не допускает прямого обобщения на дифференциальные операторы порядка больше двух, или на операторы аналогичные (2), но содержащие старшие производные функции φ. Простейшее объяснение этого факта опирается на принцип максимума (см. [1]). Именно, из справедливости представления (3) вытекает, что оператор $\mathcal{A}$ обладает следующим свойством: если в точке x функция φ достигает максимума, то обязательно $\mathcal{A}\varphi(x) \leqslant 0$. Ясно, что дифференциальные операторы порядка старше двух, равно как и операторы аналогичные (2), но содержащие старшие производные функции φ, этим свойством не обладают.

Рядом авторов делались попытки получения аналогов представления (3), но уже не на основе обычных случайных процессов, а на основе так называемых псевдопроцессов. Само понятие псевдопроцесса впервые появилось в работах Ю. Л. Далецкого (см. [3]). Важно отметить, что псевдопроцессы не являются настоящими вероятностными процессами и фактически определяются через построение знакопеременной меры на основе фундаментального решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n}.$$

Нетрудно показать, что псевдопроцессы существуют только в смысле конечномерных распределений и не порождают меру в пространстве траекторий. Тем не менее последнее время появилось множество работ (см, например, [4, 6, 7]), посвященных изучению свойств псевдопроцессов и различных функционалов от них. Рядом авторов было показано, что корректно определены (то есть порождают обычную, хотя и знакопеременную меру на числовой прямой) различные функционалы от псевдопроцессов, такие как, например, супремум или время, проведенное процессом на положительной полуоси.

Отметим еще, что хотя результаты, относящиеся к свойствам распределений функционалов от псевдопроцессов, вполне аналогичны результатам, полученным для обычных вероятностных процессов, у этих результатов отсутствует какая-либо вероятностная интерпретация.

В работе авторов [9] изучались устойчивые распределения с показателем устойчивости больше двух. Было показано, что хотя соответствующие меры являются знакопеременными, они могут быть получены как пределы в определенном смысле скорректированной последовательности распределений сумм независимых случайных величин. Более того, соответствующие предельные теоремы дают информацию о больших уклонениях сумм независимых случайных величин. Настоящая работа реализует дальнейшее развитие этого подхода. Мы рассмотрим соответствующие процессы с независимыми приращениями. Отметим еще, что, кроме всего прочего, этот подход дает возможность вероятностной интерпретации псевдопроцессов, введенных Далецким.

Основная цель настоящей работы – построение вероятностного представления решений уравнений вида (1), где $\mathcal{A}$ – некоторый линейный псевдодифференциальный оператор.

Опишем прежде всего класс операторов, которые мы будем рассматривать.

Пусть g – обобщенная функция на $\mathbb{R}$ (см. [2]), такая, что для каждого $\varepsilon > 0$ сужение g на $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus (-\varepsilon, \varepsilon)$ является регулярным функционалом с суммируемой плотностью, то есть

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} |g(x)| dx < \infty,$$

а в нуле у функции g возможно наличие сингулярности конечного порядка. Предположим, что для любого $a > 0$ и некоторого $r \in \mathbb{N}$ обобщенная функция g непрерывна в норме $\|\cdot\|_{a,r}$, то есть

$$|(g, \varphi)| \leqslant C_{a,r} \|\varphi\|_{a,r}, \tag{4}$$

где

$$\|\varphi\|_{a,r} = \sup_{|x|>a} |\varphi(x)| + \max_{0\leqslant j\leqslant r} \sup_{|x|\leqslant a} |\varphi^{(j)}(x)|.$$

Кроме того, мы предположим, что обобщенная функция g удовлетворяет условию

$$(g, \mathbf{1}) = 0, \tag{5}$$

где через $\mathbf{1}$ обозначена функция, тождественно равная единице.

Примерами таких функций могут служить любые производные дельта-функции, а также обобщенные функции, полученные регуляризацией обычных функций, удовлетворяющих для некоторого $r > 0$ условию

$$\int_{\mathbb{R}} \min(|x|^r, 1)|g(x)|dx < \infty.$$

Ясно также, что в качестве g может выступать любая линейная комбинация вышеуказанных обобщенных функций. Отметим еще, что если $\operatorname{supp} g = \{0\}$ (то есть обобщенная функция g есть линейная комбинация дельта-функции и ее производных порядка не выше r), то справедлива оценка

$$|(g, \varphi)| \leqslant C_r \max_{0 \leqslant j \leqslant r} |\varphi^{(j)}(0)|.$$

Нам будет удобно в качестве пространства основных функций рассматривать пространство всех ограниченных бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка. Сходящимися мы будем считать такие последовательности основных функций, которые сходятся равномерно на любом компактном подмножестве вещественной оси к предельной функции вместе со всеми своими производными и, кроме того, равномерно (также со всеми производными) ограничены на оси: $K_n \equiv \sup_{x \in \mathbb{R},\ m \in \mathbb{N}} |f_m^{(n)}(x)| < \infty$.

Класс операторов $\mathcal{A}$, которые мы будем рассматривать, это операторы типа антисвертки с обобщенной функцией g. Обобщенной функции g мы сопоставим оператор $\mathcal{A}_g$, полагая

$$\mathcal{A}_g f(x) = (g_y, f(x + y)), \tag{6}$$

где g_y обозначает применение обобщенной функции g по переменной y.

Кроме операторов вида (5) мы будем также рассматривать операторы вида

$$\mathcal{A}_g^c f(x) = (g_y, f(x + cy)),$$

где c – некоторая константа.

Построение вероятностного представления решения уравнения вида (1) мы будем осуществлять в два этапа. Мы будем параллельно рассматривать два объекта – вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P_g)$ и его подмножество $\Omega^0 \subset \Omega$ (во всех интересных случаях $P_g(\Omega^0) = 0$), на котором вместо меры P_g будет задана обобщенная функция L_g. Как вероятностная мера P_g, так и обобщенная функция L_g однозначно задаются выбором обобщенной функции g. Исходно все случайные процессы будут заданы на Ω^0, а в классическом представлении решения уравнения типа (1) в виде математического ожидания некоторого функционала от процесса, операция взятия математического ожидания заменится на вычисление обобщенной функции L_g (от того же самого функционала). На втором этапе мы исследуем связь между вероятностной мерой P_g и обобщенной функцией L_g.

2. Пространство $(\Omega^0, \mathcal{G}, L_g)$

Зафиксируем $T > 0$ и через Ω^0 обозначим пространство всех дискретных зарядов на $[0, T]$ с конечным спектром (с конечным числом атомов). Каждый элемент ν этого пространства представляется в виде $\nu = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \delta_{t_k}$, где через δ_{t_k} обозначена единичная масса в точке t_k, а $x_k \in \mathbb{R}$. Соответствующее представление будет однозначным, если мы условимся, что в данном представлении для всех k $|x_k| > 0$ и все точки t_k различны. Это соответствует тому, что точки, заряд в которых равен нулю, удаляются из спектра, а если в одной точке находятся сразу несколько зарядов, то они просто складываются. Пространство Ω^0 представляется в виде счетного объединения

$$\Omega^0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega^0_k,$$

где Ω^0_k – множество конечных зарядов, содержащее ровно k атомов. Пространство Ω^0 (как подпространство пространства зарядов) является, естественным образом, линейным пространством – умножение на число понимается как умножение заряда на число, а сложение тоже понимается как сложение зарядов, при этом заряды, соответствующие одним и тем же точкам спектра, складываются.

Введем теперь на Ω^0 топологию. Для этого сначала мы рассмотрим пространство $\mathcal{Y}^0$, где

$$\mathcal{Y}^0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} \big([0, T] \times \mathbb{R}\big)^k.$$

Топология на на пространстве $\mathcal{Y}^0$ вводится естественным образом. При каждом фиксированном k мы рассматриваем топологию на

$\big([0,T]\times\mathbb{R}\big)^k$ как топологию подмножества $\mathbb{R}^{2k}$, а в объединении по k рассматриваем топологию несвязного объединения.

В свою очередь, топологию на Ω^0 мы введем как образ топологии на $\mathcal{Y}^0$ под действием отображения $\mathcal{Y}^0\to\Omega^0$ вида

$$\big((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)\big)\mapsto\sum_{j=0}^k x_j\delta_{t_j}. \tag{7}$$

Далее, пусть $f:\Omega^0\to\mathbb{R}$ – измеримая (по Борелю) функция на Ω^0, а f_k – ее сужение на Ω^0_k. В силу (7) мы можем рассматривать f_k как симметричную функцию k переменных, и более того, при различных k функции f_k связаны соотношениями

$$f_{k+1}((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k),(t_{k+1},0))=f_k((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)) \tag{8}$$

и

$$f_{k+1}((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k),(t_k,y_k))=f_k((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k+y_k)). \tag{9}$$

Используя обобщенную функцию g, определим обобщенную функцию L_g на Ω^0. Для этого сначала для каждого $k\geqslant1$, $r\geqslant1$, $a>0$ на множестве функций $h:\big([0,T]\times\mathbb{R}\big)^k\to\mathbb{R}$ определим норму $\|\cdot\|_{k,r,a}$, полагая

$$\|h\|_{k,r,a}=\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}}\sup_{t_1,\dots,t_k}\max_{p,p_i\leqslant r}\sup_{\substack{|x_i|\leqslant a,\\ i\in I}}\sup_{\substack{|x_i|>a,\\ i\notin I}}|\mathcal{D}_{I,p}h|, \tag{10}$$

где для $I\subset\{1,\dots,r\}$, $p=(p_1,\dots,p_k)$ через $\mathcal{D}_{I,p}$ обозначен дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{D}_{I,p}=\prod_{i\in I}\frac{\partial^{p_i}}{\partial x^{p_i}}, \tag{11}$$

причем мы всюду в (10) предполагаем, что операторы $\mathcal{D}_{I,p}$ действуют только по переменным x_i.

Отметим, что в случае, когда $\operatorname{supp} g=\{0\}$, мы вместо (10) будем использовать более простую норму, именно

$$\|h\|_{k,r}=\sup_{t_1,\dots,t_k}\max_{p,p_i\leqslant r}|\mathcal{D}_{\{1,\dots,k\},p}h((t_1,0),\dots,(t_k,0))|. \tag{12}$$

В качестве пространства основных функций мы выберем множество $\mathcal{G}$ измеримых (по Борелю) функций на Ω^0, таких, что для каждого k функция $f_k = f_k((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k))$ бесконечно дифференцируема по переменным x_i, и, кроме того, для каждых $r>0$, $a>0$, $M>0$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k \|f_k\|_{k,r,a}}{k!} < \infty \tag{13}$$

или ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k \|f_k\|_{k,r}}{k!} < \infty, \tag{14}$$

в случае, когда $\operatorname{supp} g = \{0\}$ (в последнем случае соответствующий класс мы будем обозначать через $\mathcal{G}_0$). Мы будем говорить, что последовательность основных функций $f^{(n)}$ сходится к основной функции f, если $f_k^{(n)}((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_k((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k))$ при всех k равномерно по $t_i \in [0,T]$ и $x_i \in \mathbb{R}$ вместе со всеми производными по переменным x_i и, кроме того, если величины

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k \|f_k^{(n)}\|_{k,r,a}}{k!}$$

ограничены в совокупности по n при всех $r>0, a>0, M>0$.

Над классом $\mathcal{G}$ (или $\mathcal{G}_0$, если $\operatorname{supp} g = \{0\}$) основных функций определим обобщенную функцию L_g, полагая для $f \in \mathcal{G}$

$$(L_g, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{[0,T]^k} (g^{\otimes k}, f_k)\, dm^k. \tag{15}$$

В последней формуле предполагается, что обобщенная функция $g^{\otimes k}$ действует по переменным $x_1,\dots,x_k$, то есть

$$(g^{\otimes k}, f_k)(t_1,\dots,t_k) = (g_{x_1} \times \dots \times g_{x_k}, f_k((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k))),$$

через m^k обозначена мера Лебега на $[0,T]^k$, а интегрирование в (15) проводится по переменным $(t_1,\dots,t_k)$. Из (4) следует, что для некоторой константы C (зависящей от a и r) всех $k>0$ справедливо неравенство

$$\sup_{(t_1,\dots,t_k)} |(g^{\otimes k}, f_k)(t_1,\dots,t_k)| \leqslant C^k \|f_k\|_{k,r,a}. \tag{16}$$

Сходимость ряда (15) следует из (16) и (14). Всюду далее вместо (L_g, f) мы будем писать $L_g f$. Заметим еще, что в силу (5) $L_g \mathbf{1} = 1$.

3. Обобщенные случайные процессы на Ω^0, связь с эволюционными уравнениями

В этом параграфе мы введем понятие обобщенного случайного процесса (слово "обобщенный" мы обычно будем опускать). Для задания обобщенного случайного процесса вместо классического вероятностного пространства мы используем другой объект – пространство Ω^0, при этом вместо вероятностной меры мы используем обобщенную функцию L_g.

Условимся сначала об обозначениях. Произвольный элемент Ω^0 мы будем обозначать через ν. По определению ν есть конечный заряд (с конечным числом атомов) на $[0,T]$ вида

$$\nu = \sum_{j=1}^{k} x_j \delta_{t_j} \in \Omega^0. \tag{17}$$

Далее, через $D^0[0,T]$ мы обозначим пространство всех непрерывных справа ступенчатых функций на $[0,T]$, имеющих конечное число скачков. Это пространство естественным образом изоморфно прямому произведению $\mathbb{R} \times \Omega^0$. Именно, каждому $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \Omega^0$ мы сопоставим функцию $f \in D^0[0,T]$, полагая для $t \in T$ $f(t) = x+\nu[0,t]$, где $\nu[0,t]$ – заряд интервала $[0,t]$. На $D^0[0,T]$ мы рассмотрим топологию (и соответствующую борелевскую σ-алгебру) как образ топологии на $\mathbb{R} \times \Omega^0$, под действием данного изоморфизма.

Условимся обобщенным процессом (или просто процессом) называть любое измеримое отображение из Ω^0 в $D^0[0,T]$. Разумеется, обобщенный процесс не является в буквальном смысле случайным процессом, так как Ω^0, вообще говоря, не является вероятностным пространством – вместо вероятностной меры на Ω^0 задана только обобщенная функция L_g. Соответственно, мы не можем говорить о распределениях каких-либо функционалов от траекторий процесса. Вместо этого мы будем говорить об обобщенных распределениях, то есть об образах линейного функционала (обобщенной функции) L_g под действием различных отображений.

3.1. Обобщенные процессы с независимыми приращениями

Для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим на Ω^0 процесс $\xi_x(t) = \xi_x(t,\nu)$, полагая

$$\xi_x(t) = x + \nu[0,t]. \tag{18}$$

Посмотрим как выглядят одномерные распределения (обобщенные) процесса $\xi_x(t)$. По определению, одномерное распределение есть образ $\xi_x(t)L_g$ обобщенной функции L_g под действием отображения $\xi_x(t)$, то есть обобщенная функция на $\mathbb{R}$, определенная соотношением

$$(\xi_x(t)L_g, \varphi) = L_g\varphi(\xi_x(t)). \tag{19}$$

Формально область определения (множество основных функций) обобщенной функции $\xi_x(t)L_g$ есть множество функций φ, таких, что функция $\nu \mapsto \varphi(\xi_x(t,\nu))$ принадлежит $\mathcal{G}$. Нам будет удобно рассматривать несколько более узкий класс основных функций.

В общем случае (когда носитель обобщенной функции g не состоит из одной точки 0) в качестве области определения обобщенной функции $\xi_x(t)L_g$ мы выберем множество $\mathcal{H}_f$ функций φ, каждая из которых является обратным преобразованием Фурье конечного заряда с финитным носителем. Из определения класса $\mathcal{H}_f$ вытекает, что для каждого $\varphi \in \mathcal{H}_f$ существует $M > 0$ такое, что для всех натуральных k справедливо неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)| \leqslant M^k. \tag{20}$$

Из (16) и (20) следует что существует такое $M_0 > 0$, что для всех $k > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |(g^{\otimes k}, \varphi(x + x_1 + \cdots + x_k))| \leqslant M_0^k. \tag{21}$$

Из последнего неравенства вытекает, что для всякой функции $\varphi \in \mathcal{H}_f$ функция $\varphi(\xi_x(t))$ принадлежит $\mathcal{G}$.

В случае же, когда $\operatorname{supp} g = \{0\}$ в качестве области определения обобщенной функции $\xi_x(t)L_g$ мы выберем множество $\mathcal{H}_0$ целых функций. Нетрудно показать, что для всякой функции $\varphi \in \mathcal{H}_0$ функция $\varphi(\xi_x(t))$ принадлежит $\mathcal{G}_0$.

Для $t \in [0,\infty)$ определим линейный оператор P^t, полагая для $\varphi \in \mathcal{H}_f$

$$P^t\varphi(x) = L_g\varphi(\xi_x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\bigl(g^{\otimes k}, \varphi(x + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)\bigr)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\bigl(g_{x_1} \times g_{x_2} \times \cdots \times g_{x_k}, \varphi(x + x_1 + x_2 + \cdots + x_k)\bigr). \tag{22}$$

Нетрудно показать, что семейство операторов P^t образует полугруппу, именно, $P^{t+s} = P^t P^s$ и $P^t \mathbf{1} = \mathbf{1}$.

Далее, определим функцию $u = u(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, полагая

$$u(t,x) = P^t \varphi(x) = L_g \varphi(\xi_x(t)). \tag{23}$$

Учитывая (22), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \big(g_{x_1} \times g_{x_2} \times \dots \times g_{x_k}, \varphi(x + x_1 + x_2 + \dots + x_k)\big)$$

$$= \left(g_{x_1}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \big(g_{x_2} \times g_{x_3} \times \dots \times g_{x_k}, \varphi(x + x_1 + x_2 + \dots + x_k)\big)\right).$$

Обозначим переменную x_1 через y, индекс $k-1$ заменим на k, а переменные $x_2, x_3, \dots$ будут нами обозначены как $x_1, x_2, \dots$. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(g_y, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(g_{x_1} \times g_{x_2} \times \dots \times g_{x_k}, \varphi(x + y + x_1 + \dots + x_k)\big)\right)$$

$$= \big(g_y, u(t, x+y)\big) = \mathcal{A}_g u. \tag{24}$$

Таким образом, мы показали, что функция $u(t,x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_g u, \quad u(0,x) = \varphi(x). \tag{25}$$

Последнее означает, что обобщенная функция $\mathcal{P}_{t,x} = \xi_x(t) L_g$ (то есть образ обобщенной функции L_g под действием отображения $\xi_x(t)$) является фундаментальным решением (в смысле обобщенных функций) уравнения (25). Для того, чтобы установить свойства данного решения, вычислим его преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{P}_{t,x}}$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{P}_{t,x}}(p) = L_g e^{ip\xi_x(t)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(g^{\otimes k}, e^{ip(x + x_1 + x_2 + \dots + x_k)}\big) \\ &= e^{ipx} \exp(t(g_y, e^{ipy})). \end{aligned} \tag{26}$$

Фурье-образ $\widehat{P^t}$ оператора P^t есть оператор умножения на функцию

$$h_t(p) = \exp(t(g_y, e^{-ipy})). \tag{27}$$

Действительно, при фиксированном p

$$P^t e^{-ipx} = L_g e^{-ip\xi_x(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(g^{\otimes k}, e^{-ip(x+x_1+x_2+\cdots+x_k)}\big) \\ = e^{-ipx} \exp(t(g_y, e^{-ipy})). \tag{28}$$

Рассмотрим теперь частные случаи рассмотренной выше конструкции.

Пример 1. Пусть $g = -\delta^{(1)}$. Тогда для $\varphi \in \mathcal{H}_f$ мы имеем

$$L_{-\delta^{(1)}} \varphi(\xi_x(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} ((-\delta^{(1)})^{\otimes k}, \varphi(x+x_1+\cdots+x_k)) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \varphi^{(k)}(x) = \varphi(x+t). \tag{29}$$

Последняя формула означает, что для всех $t \geqslant 0$ оператор P^t действует как оператор сдвига аргумента на t, что соответствует хорошо известному факту, что фундаментальное решение $\mathcal{P}_{t,x}$ уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}$ есть единичная мера, сосредоточенная в точке $x+t$.

Пример 2. Пусть $g = \frac{\delta^{(2)}}{2}$. Тогда, в силу (27) оператор $\widehat{P^t}$ есть оператор умножения на функцию

$$h_t(p) = \exp\left(t\left(\frac{\delta_y^{(2)}}{2}, e^{-ipy}\right)\right) = \exp\left(-\frac{tp^2}{2}\right),$$

преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{P}_{t,x}}$ фундаментального решения уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ выражается формулой

$$\widehat{\mathcal{P}_{t,x}}(p) = e^{ipx - \frac{tp^2}{2}}$$

и, значит, для $\varphi \in \mathcal{H}_f$

$$P^t \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+y) e^{-\frac{y^2}{2t}} dy.$$

Следующие примеры принципиально отличаются от предыдущих тем, что соответствующее фундаментальное решение при фиксированном t уже, вообще говоря, не является вероятностным распределением.

Пример 3. Пусть $\alpha \in (4m, 4m+2)$ для некоторого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а обобщенная функция g задается формулой $g(x) = |x|^{-\alpha-1}$. Тогда (см. [2])для каждой $\varphi \in \mathcal{H}_f$ мы имеем

$$(g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi(x) - \varphi(0) - \frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!} x^2 - \cdots - \frac{\varphi^{(4m)}(0)}{(4m)!} x^{4m} \right) \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (30)$$

При $\alpha = 4m+1$ интеграл (30) понимается в смысле главного значения, а случай $\alpha = 1$, как нетрудно понять, соответствует процессу Коши. В силу (27) оператор $\widehat{P^t}$ есть оператор умножения на функцию

$$\begin{aligned} h_t(p) &= \exp\left(t \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-ipy} - 1 - \frac{(-ip)^2}{2!} y^2 - \cdots - \frac{(-ip)^{4m}}{(4m)!} y^{4m}\right) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}} \right) \\ &= \exp(-ct|p|^{\alpha}), \end{aligned}$$

где

$$c = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} > 0.$$

Таким образом, фундаментальное решение $\mathcal{P}_{t,x}$ уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_{\mathbb{R}} \Bigg(u(t, x+y) - u(t,x) - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) y^2 \\ - \cdots - \frac{1}{(4m)!} \frac{\partial^{4m} u}{\partial x^{4m}}(t,x) y^{4m} \Bigg) \frac{dy}{|y|^{1+\alpha}} \end{aligned}$$

представляет из себя функцию $\mathcal{P}_{t,x}(y) = q_t(y-x)$, где q_t есть обратное преобразование Фурье функции h_t. Соответствующее решение является вероятностным распределением только при $\alpha \in (0,2)$.

Пример 4. Рассмотрим теперь ту же самую обобщенную функцию $g(x) = |x|^{-\alpha-1}$, но уже при $\alpha \in (4m-2, 4m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. В этом случае

$$(g,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\biggl(\varphi(x)-\varphi(0)-\frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!}x^2 - \dots - \frac{\varphi^{(4m-2)}(0)}{(4m-2)!}x^{4m-2}\biggr)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}, \tag{31}$$

оператор $\widehat{P^t}$ есть оператор умножения на функцию $\exp(ct|p|^\alpha)$, но в данном случае $c>0$, что означает, что фундаментальное решение соответствующего уравнения уже не является обобщенной функцией умеренного роста и, тем более, регулярным функционалом.

Заметим, что если мы вместо обобщенной функции (31) рассмотрим обобщенную функцию

$$(g,\varphi)=\int\limits_{\mathbb{R}}\biggl(\varphi(x)-\varphi(0)-\frac{\varphi^{(2)}(0)}{2!}x^2 - \dots - \frac{\varphi^{(4m-2)}(0)}{(4m-2)!}x^{4m-2}-\frac{\varphi^{(4m)}(0)}{(4m)!}x^{4m}\mathbf{1}_{[-A,A]}(x)\biggr)\frac{dx}{|x|^{1+\alpha}}, \tag{32}$$

где A – произвольное положительное число), то эта проблема исчезнет. Именно, фундаментальное решение $\mathcal{P}_{t,x}$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}}\biggl(u(t,x+y)-u(t,x)-\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)y^2 - \dots - \frac{1}{(4m-2)!}\frac{\partial^{4m-2}u}{\partial x^{4m-2}}(t,x)y^{4m}\biggr)\frac{dy}{|y|^{1+\alpha}}-\varepsilon\varphi^{(4m)}(x)$$

(здесь $\varepsilon>0$ – константа, которую можно сделать сколь угодно малой подходящим выбором A) представляет из себя функцию $\mathcal{P}_{t,x}(y)=q_t(y-x)$, где q_t есть обратное преобразование Фурье функции

$$h_t(p)=\exp(t(c|p|^\alpha-\varepsilon_1 p^{4m})).$$

Пример 5. Случаю псевдопроцесса четного порядка, в нашей схеме соответствует обобщенная функция

$$g=(-1)^{m+1}\frac{\delta^{(2m)}}{(2m)!}.$$

В силу (27) оператор $\widehat{P^t}$ в данном случае есть оператор умножения на функцию

$$h_t(p) = \exp\left(t\left((-1)^{m+1}\frac{\delta^{(2m)}}{(2m)!}, e^{-ipy}\right)\right) = \exp\left(-\frac{tp^{2m}}{(2m)!}\right),$$

и, значит, фундаментальное решение $\mathcal{P}_{t,x}$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(-1)^{m+1}}{(2m)!}\,\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}$$

представляет из себя функцию $\mathcal{P}_{t,x}(y) = q_t(y-x)$, где q_t есть обратное преобразование Фурье функции

$$h_t(p) = \exp\left(-\frac{tp^{2m}}{(2m)!}\right).$$

Пример 6. Для каждого $x \in \mathbb{R}$ определим теперь на Ω^0 процесс $\xi_x^c(t) = \xi_x^c(t,\nu)$, полагая

$$\xi_x^c(t) = x + c\nu([0,t]), \tag{33}$$

где c – некоторая (комплексная) константа и посмотрим на одномерные распределения процесса $\xi_x^c(t)$. По определению, одномерное распределение есть обобщенная функция, определенная соотношением

$$(\xi_x^c(t)L_g, \varphi) = L_g\varphi(\xi_x^c(t)).$$

Как и ранее, для $\varphi \in \mathcal{H}_f$ (или для $\varphi \in \mathcal{H}_0$, если $\operatorname{supp} g = \{0\}$) определим функцию $u = u(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$, полагая

$$u(t,x) = L_g\varphi(\xi_x^c(t)). \tag{34}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что функция u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}_g^c u, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{35}$$

где линейный оператор $\mathcal{A}_g^c$ определяется как

$$\mathcal{A}_g^c f(x) = \big(g_y, f(x+cy)\big). \tag{36}$$

В частном случае, когда $g = \frac{\delta^{(2)}}{2}$, мы имеем $\mathcal{A}_g^c f(x) = \frac{c^2}{2} f^{(2)}(x)$. Соответственно, выбирая $c = e^{\frac{-i\pi}{4}}$, получаем, что одномерные распределения обобщенного процесса

$$\xi_x(t) = x + e^{\frac{-i\pi}{4}} \nu[0,t] \tag{37}$$

дают нам фундаментальное решение уравнения Шредингера

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Далее, если $g = \frac{\delta^{(4m)}}{(4m)!}$ (заметим, что в примере 5 этот случай не рассматривался, там рассматривался случай $g = -\frac{\delta^{(4m)}}{(4m)!}$), то мы имеем $\mathcal{A}_g^c f(x) = \frac{c^{4m}}{(4m)!} f^{(4m)}(x)$. Выбирая $c = e^{\frac{i\pi}{4m}}$, получаем, что одномерные распределения обобщенного процесса

$$\xi_x(t) = x + e^{\frac{i\pi}{4m}} \nu[0,t] \tag{38}$$

дают нам фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-1}{(4m)!}\frac{\partial^{4m} u}{\partial x^{4m}}. \tag{39}$$

3.2. Распределение функционалов от обобщенных процессов

Как мы уже выяснили, одномерные распределения обобщенных процессов с независимыми приращениями являются фундаментальными решениями соответствующих эволюционных уравнений. Но возможно рассматривать также и другие функционалы от траекторий обобщенного процесса. Пусть сначала $g = \frac{\delta^{(2)}}{2}$, этот случай соответствует винеровскому процессу. Рассмотрим функционал от процесса, имеющий смысл квадратической вариации процесса. Будем рассматривать процесс, выходящий из нуля, так как квадратическая вариация не зависит от сдвига.

Так как траектории обобщенных случайных процессов устроены совсем просто, как кусочно-постоянная функция с конечным числом скачков, то квадратическая вариация (будем обозначать ее v_2) вычисляется элементарно. Именно, в соответствии с формулами (17) и (18), для произвольной траектории $\xi \in D^0[0,T]$ вида $\xi(t) = \nu[0,t]$, где $\nu = \sum_{j=1}^{k} x_j \delta_{t_j} \in \Omega^0$, мы имеем

$$v_2(\xi) = \sum_{j=1}^{k} x_j^2.$$

Рассмотрим теперь обобщенное распределение $\mathcal{P}_{v_2(\xi)} = v_2(\xi) L_{\frac{\delta^{(2)}}{2}}$, то есть образ обобщенной функции $L_{\frac{\delta^{(2)}}{2}}$ под действием $v_2(\xi)$. Нетрудно показать, что соответствующий образ корректно определен, то есть для любого $\varphi \in \mathcal{H}_0$ функция $\varphi(v_2(\xi))$ принадлежит $\mathcal{G}_0$. Для $\varphi \in \mathcal{H}_0$ имеем

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_{v_2(\xi)}, \varphi) = L_{\frac{\delta^{(2)}}{2}} \varphi(v_2(\xi)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k! 2^k} \big((\delta^{(2)})^{\otimes k}, \varphi(x_1^2 + \dots + x_k^2)\big) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \varphi^{(k)}(0) = \varphi(T).\end{aligned} \tag{40}$$

Последнее равенство означает, что распределение $\mathcal{P}_{v_2(\xi)}$ представляет собой единичную массу, сосредоточенную в точке T, что отражает хорошо известный факт, что квадратическая вариация винеровского процесса неслучайна и равна T.

Заметим, что соответствующее утверждение легко обобщается на случай процесса, задаваемого обобщенной функцией $g = (-1)^{m+1} \frac{\delta^{(2m)}}{(2m)!}$ (пример 6).

В этом случае вместо квадратической вариации естественно рассматривать вариацию v_{2m} порядка $2m$, которая для обобщенных процессов легко считается, именно $v_{2m}(\xi) = \sum_{j=1}^{k} x_j^{2m}$. Для $\varphi \in \mathcal{H}_0$ имеем

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}_{v_{2m}(\xi)}, \varphi) &= L_{\frac{(-1)^{m+1}\delta^{(2m)}}{(2m)!}} \varphi(v_{2m}(\xi)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k ((-1)^{m+1})^k}{k! ((2m)!)^k} \big((\delta^{(2m)})^{\otimes k}, \varphi(x_1^{2m} + \dots + x_k^{2m})\big) \\ &= \varphi((-1)^{m+1} T).\end{aligned} \tag{41}$$

На первый взгляд этот ответ выглядит парадоксально – вариация порядка $2m$ обобщенного процесса $\xi(t)$ – это константа, но для четных m эта константа отрицательна. Причина появления этого эффекта будет полностью ясна чуть позднее. Оказывается, что вероятностный смысл обобщенный процесс имеет не для каждой обобщенной функции g, а только для неотрицательной. Для обобщенной функции g вида $(g,\varphi)=a\varphi^{(k)}(0)$, где a – константа, соответствующая неотрицательность понимается как неотрицательность a. Соответственно для четных m вероятностный смысл имеет только комплексный процесс (38) примера 6, причем совершенно ясно, что вариация порядка $2m$ у него отрицательна.

Следующий объект, который мы хотим определить, это стохастический интеграл по обобщенному процессу от неслучайной функции. Итак, пусть $f:[0,T]\to\mathbb{R}$ – борелевская функция, $\xi(t)=\nu[0,t]$ – обобщенный процесс (для определенности мы считаем, что этот процесс выходит из нуля). Определим стохастический интеграл как отображение из Ω^0 в $\mathbb{R}$, которое для $\nu=\sum\limits_{j=1}^{k}x_j\delta_{t_j}\in\Omega^0$ при $k>0$ задается формулой

$$\int\limits_0^T f(t)d\xi(t)=\int\limits_0^T f(t)d\nu(t)=\sum_{1\leqslant j\leqslant k} f(t_j)x_j,$$

а при $k=0$ определяется нулем. Посмотрим теперь на распределение введенного стохастического интеграла (напомним, что, как обычно, под распределением мы понимаем образ обобщенной функции L_g под действием этого отображения). Для этого проще всего сосчитать преобразование Фурье $F_g(p)$ этого распределения. Имеем

$$\begin{aligned} F_g(p)=L_g e^{ip\int\limits_0^T f(t)d\xi(t)}&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{[0,T]^k}\bigl(g^{\otimes k},e^{ip\sum_{j=1}^{k}f(t_j)x_j}\bigr)dm^k\\ &=\exp\biggl(\int\limits_0^T(g_x,e^{ipf(t)x})dt\biggr). \end{aligned}\tag{42}$$

Посмотрим теперь как выглядит $F_g(p)$ для некоторых конкретных g.

Для $g = \frac{\delta^{(2)}}{2}$ имеем

$$F_g(p) = \exp\left(-\frac{p^2}{2} \int\limits_0^T f^2(t)dt \right),$$

то есть соответствующее распределение является нормальным с параметрами $(0, \int\limits_0^T f^2(t)dt)$, что соответствует распределению стохастического интеграла от винеровского процесса. Для $g = \frac{(-1)^{m+1}\delta^{(2m)}}{(2m)!}$ имеем

$$F_g(p) = \exp\left(-\frac{p^{2m}}{(2m)!} \int\limits_0^T f^{2m}(t)dt \right).$$

Отметим, что при $m > 1$ соответствующее распределение (обратное преобразование Фурье функции F_g) уже не является знакоположительной мерой.

Далее, для обобщенной функции $g(x) = |x|^{-\alpha-1}$, при $\alpha \in (4m, 4m+2)$ для некоторого $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (пример 3), нетрудно показать, что

$$F_g(p) = \exp\left(-c|p|^\alpha \int\limits_0^T |f(t)|^\alpha dt \right)$$

для некоторой положительной константы c. Соответствующее распределение является симметричным устойчивым при $m = 0$ и не является вероятностной мерой при $m > 0$.

Аналогичным же образом могут быть определены кратные стохастические интегралы. Именно, пусть $f : [0,T]^n \to \mathbb{R}$ – симметричная борелевская функция n переменных. Стохастический интеграл $I_n(f)$ кратности n определяется как следующее отображение из Ω^0 в $\mathbb{R}$. Именно, для $\nu = \sum\limits_{j=1}^k x_j \delta_{t_j} \in \Omega^0$ положим $I_n(f) = 0$, если $k < n$ и

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int\limits_{[0,T]^n} f(t_1, \dots, t_n) d\xi(t_1) \dots d\xi(t_n) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{j_1 \neq j_2 \dots \neq j_n} f(t_{j_1}, t_{j_2} \dots t_{j_n}) x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n} \end{aligned}$$

при $k \geqslant n$. В случае, когда $g = \frac{\delta^{(2)}}{2}$, легко проверить справедливость следующих формул. Для всех $n \in \mathbb{N}$

$$L_g I_n(f) = 0, \quad L_g(I_n(f))^2 = \frac{1}{n!}\|f\|^2_{L_2},$$

и для любых $m \neq n$

$$L_g I_n(f) I_m(f_1) = 0.$$

Можно также показать, что в этом случае распределение $I_n(f)L_g$ совпадает с распределением соответствующего кратного интеграла по винеровскому процессу $\int\limits_{[0,T]^n} f(t_1, \dots, t_n) dw(t_1) \dots dw(t_n)$.

Следующий вопрос, который мы рассмотрим, это построение аналога представления (23) но уже не для самого уравнения (25), когда в правой части стоит только оператор антисвертки, а для случая, когда этот оператор возмущен некоторым потенциалом.

Пусть $t \in [0,T]$, $\varphi, f \in \mathcal{H}_f$ (или φ, $f \in \mathcal{H}_0$, если $\operatorname{supp} g = \{0\}$). Определим обобщенный процесс $\xi_{t,x}(u)$, $u \in [t,T]$, полагая

$$\xi_{t,x}(u) = x + \nu[t,u],$$

и рассмотрим функцию

$$v(t,x) = L_g\left[\varphi(\xi_{t,x}(T)) \exp\left(\int\limits_t^T f(\xi_{t,x}(u))du\right)\right]. \tag{43}$$

Нетрудно показать, что при сделанных предположения функция, которая стоит под знаком L_g, принадлежит $\mathcal{G}$ (или $\mathcal{G}_0$).

Посмотрим теперь, какому уравнению удовлетворяет функция $v(t,x)$. Имеем

$$v(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{t \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_k \leqslant T} dm^k$$
$$\left(g^{\otimes k}, \varphi(x + x_1 + \dots + x_k) e^{(f(x)(t_1 - t) + \sum_{j=1}^k f(x + x_1 + \dots + x_j)(t_{j+1} - t_j))}\right)$$

(в последней формуле мы полагаем $t_{k+1} = T$ при всех $k > 0$).

Продифференцируем последнее выражение по t. Так как от t зависят как область интегрирования, так и подинтегральная функция, мы получим

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{t\leqslant t_2<t_3<\cdots<t_k\leqslant T} dm^{k-1}$$

$$\left(g^{\otimes k}, \varphi(x+x_1+\cdots+x_k)e^{(f(x+x_1)(t_2-t)+\sum_{j=2}^{k} f(x+x_1+\cdots+x_j)(t_{j+1}-t_j))}\right)$$

$$-f(x)\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{t\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k\leqslant T} dm^{k}$$

$$\left(g^{\otimes k}, \varphi(x+x_1+\cdots+x_k)e^{(f(x)(t_1-t)+\sum_{j=1}^{k} f(x+x_1+\cdots+x_j)(t_{j+1}-t_j))}\right)$$

$$= -(g_y, v(t,x+y)) - f(x)v(t,x) = -\mathcal{A}_g v(t,x) - f(x)v(t,x).$$

Таким образом, мы показали, что функция v удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\mathcal{A}_g v - fv, \quad v(T,x) = \varphi(x). \tag{44}$$

Важно отметить, что хотя уравнение (43) получено в общем случае (то есть без дополнительных предположений относительно обобщенной функции g), но зато на потенциал f наложены очень сильные ограничения. Эти предположения можно ослабить, если потребовать, чтобы фундаментальное решение невозмущенного уравнения обладало хорошими свойствами, например, являлось достаточно быстро убывающей функцией.

4. Пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P_g)$

В этом параграфе мы дополнительно предположим, что обобщенная функция g либо является стандартной регуляризацией неотрицательной функции g, (ранее мы не предполагали неотрицательности), либо $g = a(-1)^r\delta^{(r)}$ для некоторого $a > 0$.

Рассмотрим сначала первый случай. Итак, пусть $g \geqslant 0$ и для некоторого $r \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\int\limits_{\mathbb{R}} \min(|x|^r, 1)g(x)\,dx < \infty$ (мы будем всегда обозначать одной и той же буквой g и саму функцию, и соответствующую ей обобщенную функцию).

Далее, положим

$$n_0 = \max\{n : \int\limits_{|x|>1} |x|^n g(x)\, dx < \infty\}. \tag{48}$$

Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}(G)$, пространство конфигураций на $G = [0,T] \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Это пространство стандартным образом ([5]) снабжается слабой топологией и, соответственно, борелевской σ-алгеброй. На этом пространстве мы рассмотрим пуассоновскую меру $\mathbb{P}_g$ с интенсивностью $\Pi(dt, dx) = dtg(x)\, dx$. Далее, для $\varepsilon > 0$ через $\mathbb{P}_{g,\varepsilon}$ мы обозначим сужение меры $\mathbb{P}_g$ на пространство $\mathcal{X}(G_\varepsilon)$ конфигураций на $G_\varepsilon = [0,T] \times (\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon])$. Ясно, что при всех ε мера $\mathbb{P}_{g,\varepsilon}$ является пуассоновской мерой с интенсивностью $\Pi\mid_{G_\varepsilon}$. Как и ранее, меру Лебега на $[0,T]$ будем обозначать через m.

В качестве вероятностного пространства мы выберем пространство $\Omega = \Omega([0,T])$ всех дискретных зарядов на $[0,T]$. Каждый элемент этого пространства представляется в виде $\sum_i x_i \delta_{t_i}$ где через δ_{t_i} обозначена единичная масса, сосредоточенная в точке t_i. Заметим, что $\Omega^0 \subset \Omega$. На пространство Ω мы пересадим σ-алгебру и меру из $\mathcal{X}$ при помощи отображения $\Theta : \mathcal{X} \to \Omega$, которое конфигурации $\bigcup_i (t_i, x_i)$ сопоставляет дискретный заряд $\sum_i x_i \delta_{t_i}$. Таким образом, на пространстве Ω возникают вероятностные меры $P_g = \mathbb{P}_g \Theta^{-1}$ и $P_{g,\varepsilon} = \mathbb{P}_{g,\varepsilon} \Theta^{-1}$, которые мы также будем называть пуассоновскими мерами. Заметим, что для всех $\varepsilon > 0$ мы имеем $P_{g,\varepsilon}(\Omega^0) = 1$.

Посмотрим теперь, как связаны между собой обобщенная функция L_g на Ω^0 и мера P_g на Ω. $(g, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) g(x)\, dx$. Для этого введем ряд необходимых обозначений.

Пусть v – C^∞-гладкая функция на $\mathbb{R}$. Через d мы обозначим оператор

$$(dv)(x) = v(0) = \mathrm{Const},$$

а для $k = 1, 2, 3, \dots$ через $d^{(k)}$ мы обозначим линейный оператор, действующий как

$$(d^{(k)} v)(x) = \frac{x^k}{k!} v^{(k)}(0) \tag{49}$$

для $k \leqslant n_0$, и

$$(d^{(k)} v)(x) = \frac{x^k}{k!} \mathbf{1}_{[0,1]}(|x|) v^{(k)}(0) \tag{50}$$

для $k > n_0$. Отметим, что в силу различия между формулами (49) и (50) $d^{(k)}$ зависит также и от g.

Далее, определим определим линейный оператор Δ, полагая

$$\Delta v(x) = v(x) - v(0) = v(x) - dv(x), \tag{51}$$

и последовательность операторов (также зависящих от g) $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{N}$, полагая

$$(\Delta(k)v)(x) = v(x) - dv(x) - d^{(1)}v(x) - \cdots - d^{(k)}v(x).$$

Заметим, что $\Delta + d$ есть тождественный оператор и для каждого $k = 1, 2, \ldots$ мы имеем

$$\Delta(k) = \Delta(k+1) + d^{(k+1)}. \tag{52}$$

В этих обозначениях для $r > 1$ и каждой основной функции φ мы имеем

$$(g, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Delta(r-1)\varphi(x)g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} \Delta(r-1)\varphi(x)g(x)\,dx, \tag{53}$$

где $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$, а для $r = 1$ и каждой основной функции φ мы имеем

$$(g, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Delta\varphi(x)g(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} \Delta\varphi(x)g(x)\ dx.$$

Заметим, что введенные обобщенные функции удовлетворяют (5).

Мы также положим для и $l \leqslant n_0$

$$\tau_l(\varepsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x^l g(x)\,dx, \tag{54}$$

а для $l > n_0$ мы положим

$$\tau_l(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} x^l g(x)\,dx. \tag{55}$$

Отметим еще, что для четной функции g величины $\tau_l(\varepsilon)$ равны нулю для нечетных l.

Рассмотрим сначала случай $r = 1$. Для $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{G}$ имеем

$$\int\limits_{\Omega} f dP_{g,\varepsilon} = e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} f_k d\Pi^k. \tag{56}$$

Через Δ_i, d_i мы будем обозначать действие операторов Δ, d по переменной x_i.

Для каждого конечного подмножества I множества натуральных чисел через $|I|$ мы будем обозначать число элементов множества I. Положим также

$$d_I = \prod_{i \in I} d_i, \quad \Delta_I = \prod_{i \in I} \Delta_i. \tag{57}$$

Если $I = \{1, \ldots, k\}$, то для соответствующего оператора Δ_I мы используем обозначение $\Delta^{\otimes k}$, то есть

$$\Delta^{\otimes k} = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_k.$$

Аналогичные обозначения мы будем также использовать и для операторов $\Delta(m)$, d^m, $m \in \mathbb{N}$, именно

$$d_I^{(m)} = \prod_{i \in I} d_i^{(m)}, \quad \Delta_I(m) = \prod_{i \in I} \Delta_i(m)$$

и

$$\Delta^{\otimes k}(m) = \Delta_1(m)\Delta_2(m) \ldots \Delta_k(m).$$

Для каждого фиксированного k, через CI мы будем обозначать множество $\{1, \ldots, k\} \setminus I$. Заметим, что для любого k функция $d_{CI} f_k$ зависит только от переменных x_i, $i \in I$.

Используя тождество

$$1 = \prod_{i=1}^{k} (d_i + \Delta_i) = \sum_{I \subset \{1, \ldots, k\}} \Delta_I d_{CI},$$

и (56), мы получим

$$\int\limits_{\Omega} f dP_{g,\varepsilon} = e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} \prod_{i=1}^{k} (\Delta_i + d_i) f_k d\Pi^k$$
$$= e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} \sum_{I\subset\{1,\dots,k\}} \Delta_I d_{CI} f_k d\Pi^k$$
$$= e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{I\subset\{1,\dots,k\}} \Pi(G_\varepsilon)^{|CI|} \int\limits_{G_\varepsilon^{|I|}} \Delta_I d_{CI} f_k \prod_{i\in I} \Pi(dx_i)$$
$$= e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \Pi(G_\varepsilon)^{k-j} \binom{k}{j} \int\limits_{G_\varepsilon^j} \Delta^{\otimes j} f_j d\Pi^j \tag{58}$$
$$= e^{-\Pi(G_\varepsilon)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{G_\varepsilon^j} \Delta^{\otimes j} f_j d\Pi^j \sum_{k=j}^{\infty} \frac{\Pi(G_\varepsilon)^{k-j}}{(k-j)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} \Delta^{\otimes k} f_k d\Pi^k.$$

Таким образом, мы имеем

$$\int\limits_{\Omega} f dP_{g,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} \Delta^{\otimes k} f_k d\Pi^k \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G^k} \Delta^{\otimes k} f_k d\Pi^k = L_g f,$$

что означает, что при $r = 1$ обобщенная функция L_g является пределом (в смысле обобщенных функций, то есть на каждой основной функции) вероятностных мер $P_{g,\varepsilon}$.

Прежде, чем двигаться дальше, определим еще последовательность дифференциальных операторов. Для $f \in \mathcal{G}$ определим функцию $\mathcal{D}_1 f : \Omega^0 \to \mathbb{R}$, полагая для каждого $k = 0, 1, 2 \dots$

$$(\mathcal{D}_1 f)_k((t_1, x_1), \dots, (t_k, x_k))$$
$$= \int\limits_0^T dt_{k+1} \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} f_{k+1}((t_1, x_1), \dots, (t_k, x_k), (t_{k+1}, x_{k+1})) \,|_{x_{k+1}=0} \,.$$

Аналогичным же образом определяются дифференциальные операторы $\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3, \ldots$. Именно, для $m = 2, 3, \ldots$ положим

$$(\mathcal{D}_m f)_k((t_1, x_1), \ldots, (t_k, x_k))$$

$$= \int_0^T dt_{k+1} \frac{\partial^m}{\partial x_{k+1}^m} f_{k+1}((t_1, x_1), \ldots, (t_k, x_k), (t_{k+1}, x_{k+1})) \,|_{x_{k+1}=0} \,.$$

Обозначим также для $t \in \mathbb{R}$

$$Q_1^t = e^{t\mathcal{D}_1}, \quad Q_2^t = e^{t\frac{\mathcal{D}_2}{2!}}, \ldots, \; Q_m^t = e^{t\frac{\mathcal{D}_m}{m!}}, \ldots$$

соответствующие операторные экспоненты.

Рассмотрим теперь случай $r > 1$, то есть $\int\limits_{\mathbb{R}} \min(x, 1) g(x)\, dx = \infty$. Пусть сначала $r = 2$, то есть $\int\limits_{\mathbb{R}} \min(x^2, 1) g(x)\, dx < \infty$. В силу (52), (58) имеем

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f dP_{g,\varepsilon} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int_{G_\varepsilon^k} \Delta^{\otimes k} f_k d\Pi^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int_{G_\varepsilon^k} \prod_{i=1}^k (\Delta_i(1) + d_i^{(1)}) f_k d\Pi^k \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int_{G_\varepsilon^k} \sum_{I \subset \{1, \ldots, k\}} \Delta_I(1) d_{CI}^{(1)} f_k d\Pi^k \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \int_{G_\varepsilon^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \Delta^{\otimes j}(1) (d^{(1)})^{\otimes(k-j)} f_k d\Pi^k
\end{aligned}$$

(в последней формуле мы предполагаем, что оператор $\Delta^{\otimes j}(1)$ действует по переменным $x_1, \ldots, x_j$, а $(d^{(1)})^{\otimes(k-j)}$ действует по оставшимся $k-j$ переменным)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{G_\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}\Delta^{\otimes j}(1)(d^{(1)})^{\otimes(k-j)}f_k d\Pi^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}\int\limits_{G_\varepsilon^k}\Delta^{\otimes j}(1)\mathcal{D}_1^{k-j}f_k(\tau_1(\varepsilon))^{k-j}d\Pi^j$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int\limits_{G_\varepsilon^j}\Delta^{\otimes j}(1)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathcal{D}_1^k f_{j+k}(\tau_1(\varepsilon))^k\Big)d\Pi^j$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int\limits_{G_\varepsilon^j}\Delta^{\otimes j}(1)\big(Q_1^{\tau_1(\varepsilon)}f\big)_j d\Pi^j.$$

Таким образом, переобозначая $Q_1^{\tau_1(\varepsilon)}f$ за новую функцию f, мы получим

$$\int Q_1^{-\tau_1(\varepsilon)}f dP_{g,\varepsilon}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{G_\varepsilon^k}\Delta^{\otimes k}(1)f_k d\Pi^k. \tag{59}$$

Обозначим оператор $Q_1^{-\tau_1(\varepsilon)}$ через $\mathcal{A}_\varepsilon$, а формально сопряженный к нему оператор (действующий на меры) через $\mathcal{A}_\varepsilon^*$, именно для $f\in\mathcal{G}$ положим

$$(\mathcal{A}_\varepsilon^* P_{g,\varepsilon},f)=\int \mathcal{A}_\varepsilon f dP_{g,\varepsilon}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{G_\varepsilon^k}\Delta^{\otimes k}(1)f_k d\Pi^k \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{G^k}\Delta^{\otimes k}(1)f_k d\Pi^k=L_g f. \tag{60}$$

Таким образом, мы показали, что при $\varepsilon\to 0$ семейство обобщенных функций $\mathcal{A}_\varepsilon^* P_{g,\varepsilon}$ сходится к обобщенной функции L_g.

Прежде, чем переходить к случаю $r>2$, посмотрим на свойства оператора Q_1^t. Как легко видеть, $Q_1^t(\nu[0,T])=\nu[0,T]+tT$ или $\mathcal{A}_\varepsilon(\nu[0,T])=\nu[0,T]-T\tau_1(\varepsilon)$. Более того, можно показать, что оператор Q_1^t обладает свойствами оператора сдвига аргумента, например, для любого $\varphi\in\mathcal{H}$ мы имеем $Q_1^t(\varphi(f))=\varphi(Q_1^t(f))$. В частности, мы имеем $Q_1^t(\varphi(\nu[0,T]))=\varphi(\nu[0,T]+tT)$.

Рассмотрим теперь случай $r > 2$. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать справедливость соотношения

$$\int Q_{r-1}^{-\tau_{r-1}(\varepsilon)} Q_{r-2}^{-\tau_{r-2}(\varepsilon)} \dots Q_1^{-\tau_1(\varepsilon)} f dP_{g,\varepsilon} \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{G_\varepsilon^k} \Delta^{\otimes k}(r-1) f_k d\Pi^k. \quad (61)$$

Обозначая теперь оператор $Q_{r-1}^{-\tau_{r-1}(\varepsilon)} Q_{r-2}^{-\tau_{r-2}(\varepsilon)} \dots Q_1^{-\tau_1(\varepsilon)}$ через $\mathcal{A}_\varepsilon$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, снова получаем, что семейство обобщенных функций $\mathcal{A}_\varepsilon^* P_{g,\varepsilon}$ сходится к обобщенной функции L_g.

Нетрудно проследить, как действует оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ на функции вида $\varphi(\nu[0,T])$. Аналогично тому, как это сделано в [9], можно показать, что для $\varphi \in \mathcal{H}$ мы имеем

$$\mathcal{A}_\varepsilon(\varphi(\nu[0,T])) = (\mathcal{B}_\varepsilon \varphi)(\nu[0,T])),$$

причем оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ действует как оператор свертки с функцией $b_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp(-ipx) \widehat{b_\varepsilon}(p) dp$, где

$$\widehat{b_\varepsilon}(p) = \exp\left(-T \left[\frac{(-ip)^{r-1} \tau_{r-1}(\varepsilon)}{(r-1)!} + \dots + \frac{(-ip)^2 \tau_2(\varepsilon)}{2!} + \frac{-ip\tau_1(\varepsilon)}{1!} \right] \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда оператор $\mathcal{A}$ в (5) является чисто дифференциальным, что означает, что обобщенная функция g имеет вид производной (любого порядка) от дельта-функции, то есть

$$(g, \varphi) = a\varphi^{(r)}(0), \quad (62)$$

где $a > 0$. Нам будет удобно считать, что $a = \frac{1}{r!}$.

Заметим сначала, что в рассмотренном выше случае, когда обобщенная функция g представляла из себя стандартную регуляризацию неотрицательной функции, наши рассуждения в большой степени базировались на формуле (53). В случае, когда мы имеем дело с обобщенной функцией (62) вместо (53), мы будем использовать легко проверяемое соотношение (как обычно, через e мы обозначаем основание натурального логарифма)

$$(g, \varphi) = \frac{1}{r!} \varphi^{(r)}(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Delta(r-1) \varphi(x) \frac{dx}{x^{r+1}}. \quad (63)$$

В качестве вероятностного пространства мы снова выберем пространство $\Omega = \Omega([0,T])$ всех дискретных зарядов на $[0,T]$, а в качестве вероятностной меры выберем пуассоновскую меру P с интенсивностью $\Pi(dt,dx) = dt\frac{dx}{x^{1+r}}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$. Через P_ε обозначим пуассоновскую меру с интенсивностью $dt\frac{dx}{x^{1+r}}\mathbf{1}_{(\varepsilon,e\varepsilon)}(x)$. Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо $P_\varepsilon(\Omega^0) = 1$. Положим также

$$G_\varepsilon^0 = [0,T] \times [\varepsilon, e\varepsilon].$$

Далее, нам понадобится ввести новый класс основных функций. Для этого для каждого $k \geqslant 1$, $r \geqslant 1$ на множестве функций $h : \big([0,T]\times[0,1]\big)^k \to \mathbb{R}$ определим норму $\|\cdot\|_{k,r}^0$, полагая

$$\|h\|_{k,r}^0 = \sup_{t_1,\dots,t_k} \sup_{x_1,\dots,x_k} \left|\frac{\partial^r \dots \partial^r}{\partial x_1^r \dots \partial x_k^r} h\right|.$$

В качестве пространства $\mathcal{G}_1$ основных функций мы выберем множество $\mathcal{G}$ измеримых (по Борелю) функций на Ω^0, таких, что для каждого k функция $f_k = f_k((t_1,x_1),\dots,(t_k,x_k))$ бесконечно дифференцируема по переменным x_i, и, кроме того, для каждого $r > 0$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|f_k\|_{k,r}^0}{k!} < \infty.$$

Посмотрим теперь, как связаны между собой обобщенная функция g на Ω^0 и мера P на Ω. Положим для $l < r$

$$\tau_l^0(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \frac{x^l dx}{x^{r+1}} = \frac{1}{(r-l)\varepsilon^{r-l}}\left(1 - \frac{1}{e^{r-l}}\right) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty. \tag{64}$$

Используя аргументы, аналогичные приведенным выше, нетрудно показать, что для $f \in \mathcal{G}_1$ справедливо соотношение

$$\int Q_{r-1}^{-\tau_{r-1}^0(\varepsilon)} Q_{r-2}^{-\tau_{r-2}^0(\varepsilon)} \dots Q_1^{-\tau_1^0(\varepsilon)} f dP_{g,\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{(G_\varepsilon^0)^k} \Delta^{\otimes k}(r-1) f_k d\Pi^k. \tag{65}$$

Остается заметить, что в силу (63) правая часть (65) стремится к $L_g f$ при $\varepsilon \to 0$.

Литература

1. А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов.* Наука, Москва, 1975.
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, Москва, 1958.
3. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах.* Наука, Москва, 1983.
4. T. Funaki, *Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equations.* — Proc. Japan Acad. A **55** (1979), 176–179.
5. J. Kerstan, K. Mattes, J. Mecke, *Infinite Divisible Point Processes.* Akademie-Verlag, Berlin, 1978.
6. Y. Nikitin, E. Orsingher, *On sojourn distribution of process related to some higher-order heat-type equation.* — J. Theor. Probab. **13**, No. 4 (2000), 997-1012.
7. L. Beghin, E. Orsingher, *The distribution of the local time for "pseudoprocess" and its connection with fractional diffusion equatios.* — Stochastic Process. Appl. **115** (2005), 1017-1040.
8. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, Москва, 1986.
9. N. Smorodina, M. Faddeev, *The Lévy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications.* — Acta Appl. Math. **110** (2010), 1289–1308.

Smorodina N. V., Faddeev M. M. The probabilistic representation of the decisions of a class of evolution equations.

We consider a class of pseudo-differential operators acting on test functions as a convolution with a given generalized function. For evolution families with generators from this class we construct an analog of a probabilistic representation.

С.-Петербургский
государственный университет,
Физический факультет
ул. Ульяновская 3, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

Поступило 18 октября 2010 г.