Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

О. В. Русаков

ПУАССОНОВСКИЕ СУБОРДИНАТОРЫ, ПОЛЕ ВИНЕРА–ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА И СВЯЗЬ БРОУНОВСКИХ МОСТОВ С ПЕРЕХОДНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ПРОЦЕССОВ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

1. Процессы пуассоновского случайного индекса или пуассоновские субординаторы для последовательностей

Определим процесс пуассоновского случайного индекса $\psi(s)$, $s \geqslant 0$, как случайную замену времени (субординатор) у случайной последовательности $(\xi) = \xi_0, \xi_1, \dots,$

$$\psi(s) \overset{\triangle}{=} \xi_{\Pi(s)}, \tag{1}$$

проведенную посредством пуассоновского процесса $\Pi(s)$ с интенсивностью $\lambda > 0$. Пуассоновский процесс $\Pi(s)$, $s \geqslant 0$, который мы называем *ведущим*, предполагается независимым от последовательности (ξ), которую мы называем *формирующей*.

Пуассоновские субординаторы, примененные к марковским последовательностям, названы псевдопуассоновскими процессами (*Pseudo-Poisson processes*) и подробно исследованы во втором томе знаменитой монографии У. Феллера (см. [3, гл. X]). Однако суммы таких процессов не рассматривались. В работе [2] рассмотрены суммы независимых пуассоновских субординаторов, когда формирующие последовательности состоят из строго α-устойчивых случайных величин.

Процесс случайного индекса имеет кусочно-постоянные траектории, непрерывные справа, имеющие скачки только в точках скачков ведущего пуассоновского процесса, причем не обязательно во всех. Например, если ведущий пуассоновский процесс имеет интенсивность $\lambda > 0$ и формирующая последовательность состоит из независимых

Ключевые слова: случайная замена времени для последовательностей, псевдопуассоновские процессы, поле Винера–Орнштейна–Уленбека, броуновские мосты.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ4472.2010.1.

одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностью $1/2$, то процессом случайного индекса станет телеграфный процесс $g(s)$, $s \geqslant 0$, определенный равенством

$$g(s) = \epsilon(-1)^{\Pi_\mu(s)}, \tag{2}$$

где $\Pi_\mu(s)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью $\mu > 0$ (интенсивность телеграфного процесса), ϵ – независящая от Π случайная величина, принимающая значения ± 1 с вероятностью $1/2$. При этом интенсивность телеграфного процесса, полученная данной субординацией, оказывается равной 2μ. Таким образом, здесь, если в момент скачка ведущего пуассоновского процесса соответствующий элемент формирующей последовательности не меняет знак, то у процесса случайного индекса в данный момент скачка не происходит.

В настоящей работе исследуются конечномерные распределения пределов сумм независимых одинаково распределенных процессов случайного индекса, когда формирующие последовательности состоят из независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечный второй момент. Совместные предельные распределения совпадают с распределениями процессов Орнштейна–Уленбека, но не описываются известными моделями процессов Орнштейна–Уленбека. В полученной конструкции вклад дисперсии *начального значения* процесса получается больше, чем, например, в классической модели, когда процесс Орнштейна–Уленбека получается как решение стохастического дифференциального уравнения Ланжевена.

2. Конечномерные распределения сумм независимых процессов пуассоновского случайного индекса и поле Винера–Орнштейна–Уленбека

Рассмотрим предварительно нормированную на $\sqrt{N}$ сумму независимых одинаково распределенных процессов случайного индекса, когда формирующая последовательность (ξ) состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Учитывая обозначение (1), полагаем

$$\Psi_N(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \psi_i(s), \tag{3}$$

когда $\psi_i(s) = \xi_{(\Pi(s);\, i)}$ – i-ая независимая копия для $\psi(s) = \xi_{\Pi(s)}$, $\mathbf{E}\xi_0 = 0$, $\mathbf{E}\xi_0^2 = 1$, $s \geqslant 0$, $N \in \mathbb{N}$.

Утверждение 1 (Ковариация для сумм процессов случайного индекса)**.** *Для любого натурального N, для всех неотрицательных s, r верно следующее равенство для ковариаций*

$$\operatorname{cov}\left(\Psi_N(r), \Psi_N(r+s)\right) = \exp\{-\lambda s\}. \tag{4}$$

Отметим, что правая часть равенства (4) не зависит от r, что показывает стационарность в широком смысле процесса $\Psi_N(s)$ при любом натуральном N.

Доказательство утверждения 1. Вычислим сначала ковариацию для одного слагаемого в $\Psi(s)$, воспользовавшись независимостью случайных величин $\{\xi_j\}$ и пуассоновского процесса $\Pi(s)$, равенством $\mathbf{E}\xi_j^2 = 1$, а также однородностью приращений пуассоновского процесса.

Для процесса случайного индекса очевидно следующее представление в форме бесконечной суммы случайных величин, взвешенных индикаторами,

$$\xi_{\Pi(s)} \equiv \xi_\Pi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \mathbb{I}\{\Pi(s) = j\}. \tag{5}$$

Используя данное представление (5), имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(\xi_{\Pi(r)}, \xi_{\Pi(r+s)}\right) &= \mathbf{E}\Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \mathbb{I}\{\Pi(r) = j\} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i \mathbb{I}\{\Pi(r+s) = i\} \Big\} \\
&= \mathbf{E}\Big\{ \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j^2 \mathbb{I}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\} \Big\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{E}\{\xi_j^2\} \mathbf{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\} = \mathbf{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s)\} \\
&= \mathbf{P}\{\Pi(0) = \Pi(s)\} = \mathbf{P}\{\Pi(s) = 0\} = \exp\{-\lambda s\}.
\end{aligned}$$

Так как случайные элементы $\xi_{(\Pi(s);\, i)}$ и $\xi_{(\Pi(s);\, j)}$ при разных индексах $i \neq j$ независимы и одинаково распределены, то дальнейшие вычисления элементарны,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\Psi_N(r), \Psi_N(r+s)\right) &= \mathbf{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_{(\Pi(r);\,i)}\sum_{j=1}^{N}\xi_{(\Pi(r+s);\,j)}\right\} \\ &= \frac{1}{N}\mathbf{E}\left\{\sum_{j=1}^{N}\xi_{(\Pi(r);\,j)}\xi_{(\Pi(r+s);\,j)}\right\} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\operatorname{cov}\left(\xi_{(\Pi(r);\,j)}, \xi_{(\Pi(r+s);\,j)}\right) = \exp\{-\lambda s\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что дисперсия $\xi_{\Pi(s)}$ равна 1, то есть равномерно ограничена по s, поэтому проведенные изменения порядка интегрирования законны. Утверждение 1 доказано.

Следствие 1. *Для ковариации одного процесса случайного индекса под управлением пуассоновского процесса справедлива формула*

$$\operatorname{cov}\left(\psi(r), \psi(r+s)\right) = \exp\{-\lambda s\}. \tag{6}$$

Утверждение 2 (Предел конечномерных распределений)**.** *Зафиксируем натуральное d и моменты времени $0 \leqslant s_1 < \cdots s_d < \infty$. Тогда имеет место следующая сходимость распределений случайных векторов в d-мерном пространстве при $N \to \infty$:*

$$\left(\Psi_N(s_1), \ldots, \Psi_N(s_d)\right) \xrightarrow{\text{distr}} \left(U_1, \ldots, U_d\right), \tag{7}$$

где $(U_1, \ldots, U_d)$ – центрированный гауссовский вектор с ковариацией

$$\operatorname{cov}(U_i, U_j) = \exp\{-\lambda|s_i - s_j|\}, \quad i, j \in \{1, \ldots, d\}.$$

Доказательство утверждения 2 мгновенно следует из центральной предельной теоремы для векторов.

Следствие 1. *Предел конечномерных распределений для сумм независимых одинаково распределенных процессов случайного индекса с формирующими последовательностями, состоящими из независимых одинаково распределенных случайных величин, совпадает с конечномерными распределениями процесса Орнштейна–Уленбека с коэффициентом вязкости $\lambda > 0$, который есть интенсивность управляющего пуассоновского процесса.*

Следствие 2. *Предел конечномерных распределений для сумм независимых одинаково распределенных телеграфных процессов совпадает с конечномерными распределениями процесса Орнштейна–Уленбека с коэффициентом вязкости λ, когда интенсивность телеграфного процесса $\mu = \lambda/2$.*

Используя стандартную параметризацию для сумм случайных величин (делая суммы нарастающими), на основе (3) введем двухпараметрическое семейство случайных величин

$$\Psi_N(t,s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{[Nt]} \psi_i(s), \quad s,t \geqslant 0, \tag{8}$$

где $[Nt]$ обозначает целую часть числа Nt. Время s назовем внутренним, или временем Орнштейна–Уленбека, а t – внешним временем или временем Винера.

Утверждение 3. *Зафиксируем натуральные n, d, моменты внутреннего времени $0 \leqslant s_1 < \cdots s_d < \infty$ и моменты внешнего времени $0 < t_1 < \cdots t_n < \infty$. Тогда имеет место следующая сходимость распределений случайных элементов, заданных в прямом произведении d-мерного и n-мерного пространств при $N \to \infty$:*

$$\begin{aligned} &\big(\Psi_N(t_i,s_j) : i=1,\dots,n,\ j=1,\dots d\big) \\ &\qquad \xrightarrow{\text{distr}} \big(Z(t_i,s_j) : i=1,\dots,n,\ j=1,\dots d\big), \end{aligned} \tag{9}$$

где $Z(t_i,s_j)$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $j \in \{1,\dots,d\}$ – центрированная гауссовская матрица с ковариацией

$$\operatorname{cov}(Z(t_i,s_j), Z(t_k,s_l)) = \min\{t_i,t_k\} \exp\{-\lambda|s_j - s_l|\}, \tag{10}$$

$i,k \in \{1,\dots,n\}$; $j,l \in \{1,\dots,d\}$.

Доказательство. Утверждение 3 следует из утверждения 2 и из того, что приращения по параметру t величин $\Psi_N(t,s)$ независимы при каждом $s \geqslant 0$, так как в (8) суммируются независимые элементы.

Определим поле Винера–Орнштейна–Уленбека (ВОУ) $Z(t,s)$ как центрированную гауссовскую функцию, заданную при $t,s \geqslant 0$ и имеющую ковариацию, которая является произведением ковариаций для винеровского процесса и процесса Орнштейна–Уленбека и которая определяется равенством (10).

При фиксированном значении внешнего времени $t = t^*$ поведение поля Z вдоль оси внутреннего времени s совпадает с поведением процесса Орнштейна–Уленбека с вязкостью $\lambda > 0$ и дисперсией сечений t^*. При каждом фиксированном значении внутреннего времени поведение поля Z вдоль оси внешнего времени t совпадает с поведением стандартного броуновского движения.

Следствие утверждения 3. *Предел конечномерных распределений для нарастающих сумм независимых одинаково распределенных процессов случайного индекса с формирующими последовательностями, состоящими из независимых одинаково распределенных случайных величин, совпадает с конечномерными распределениями поля Винера–Орнштейна–Уленбека.*

Начиная с работы [4], процессы Орнштейна–Уленбека играют главную роль в разделе финансовой математики, описывающем динамику процентных ставок, поэтому их изучение, особенно их представление в виде пределов, представляется весьма актуальной задачей.

3. Процессы Орнштейна–Уленбека и их их основные свойства

Дадим известные эквивалентные определения U – [гауссовского] процесса Орнштейна–Уленбека (ОУ), заданного на положительной полуоси. Если не оговорено противное, то мы рассматриваем стандартизованный процесс ОУ, то есть с нулевым средним и единичной дисперсией.

Определение (ОУ). *Следующие определения дают с точностью до стохастической эквивалентности одно и тоже распределение процесса U в пространстве непрерывных функций.*

(О1) Процесс Орнштейна–Уленбека – это стационарный гауссовский марковский процесс.

(О2) Процесс Орнштейна–Уленбека – это центрированная гауссовская случайная функция $U(s) = U_\beta(s)$, $s \geqslant 0$, с ковариацией $\operatorname{cov}\{U(s_1), U(s_2)\} = \exp\{-\beta|s_2 - s_1|\}$, где параметр $\beta > 0$ называется вязкостью процесса ОУ.

(О3) Процесс Орнштейна–Уленбека определяется своим представлением в виде скользящего среднего с показательным ядром

$$(O_3) \qquad U(s) = U(0)e^{-\beta s} + \sqrt{2\beta} \int_0^s e^{-\beta(s-u)} \, \mathrm{d}\, B(u), \quad s \geqslant 0,$$

где $B(u)$, $u \geqslant 0$, – стандартное броуновское движение; $U(0) \in \mathcal{N}\{0,1\}$ – не зависящая от $B(u)$ стандартная нормальная случайная величина; $\beta > 0$ – параметр вязкости.

(O4) Процесс Орнштейна–Уленбека определяется стохастическим дифференциальным уравнением Ланжевена, которое по сути дает представление ОУ в виде авторегрессии первого порядка,

$$(O_4) \qquad U(s) = -\beta U(s)\,\mathrm{d}\,s + \sqrt{2\beta}\,\mathrm{d}\,B(s), \quad s \geqslant 0,$$

где: $B(s)$ – стандартное броуновское движение; начальное значение $U(0)$ имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}\{0,1\}$ и не зависит от броуновского движения $B(s)$; $\beta > 0$ – параметр вязкости.

(O5) Процесс Орнштейна–Уленбека определяется с помощью следующего преобразования, называемого преобразованием Ламперти, при $s \geqslant 0$,

$$(O_5) \qquad U(s) = e^{-\beta s} W(e^{2\beta s}), \quad \text{или} \quad U(s) = e^{\beta s} W(e^{-2\beta s}),$$

где W – стандартное броуновское движение, $\beta > 0$.

(O6) Процесс Орнштейна–Уленбека как марковский процесс характеризуется своими переходными вероятностями. Переходные вероятности однородны, условные распределения нормальны и имеют следующие математическое ожидание и дисперсию

$$(O_6) \quad \mathbf{E}\{U(s)\,|\,U(0) = z\} = ze^{-\beta s}, \quad \mathbf{D}\{U(s)\,|\,U(0) = z\} = 1 - e^{-\beta s}.$$

(O7) Процесс Орнштейна–Уленбека наряду с пуассоновским процессом обладает свойством следующего линейного самоподобия,

$$(O_7) \qquad U_\beta(s) \stackrel{d}{=} U_1(\beta s), \quad \Pi_\lambda(t) \stackrel{d}{=} \Pi_1(\lambda t), \quad t, s \geqslant 0.$$

4. Процесс Орнштейна–Уленбека и броуновские мосты

Вследствие классической функциональной предельной теоремы Донскера (см., напр., [1]) для каждого фиксированного момента внутреннего времени $s \geqslant 0$ случайная ломаная $\Psi_N(t,s)$, определенная в пространстве непрерывных функций, заданных на $[0,1]$, слабо сходится к стандартному броуновскому движению при $N \to \infty$. Данное утверждение справедливо, так как слагаемые в (8) для каждого $s \geqslant 0$ независимы, одинаково распределены, имеют нулевое среднее и единичную дисперсию. Обозначим $W^s(t)$, $t \in [0,1]$, – броуновское движение, заданное на уровне $s \geqslant 0$. Броуновское движение $W^0(t)$, заданное на нулевом уровне, назовем базовым. Значения $W^s(1)$, $s \geqslant 0$, являются значениями предельного процесса Орнштейна–Уленбека, то есть $U(s) = W^s(1)$, где предел в смысле сходимости конечномерных распределений и устанавливается в утверждении 2. В частности, значение базового броуновского движения в единице, $W^0(1)$, есть начальное значение $U(0)$ предельного процесса Орнштейна–Уленбека.

Наша цель – убедиться в том, что переходные вероятности предельного процесса действительно являются переходными вероятностями процесса Орнштейна–Уленбека, проследить за механизмом формирования ковариационной зависимости, обусловленной определением процесса Орнштейна–Уленбека **(O2)**.

Лемма 1. *Для каждого натурального N существует такая перестановка процессов (ψ_i) в сумме (8), определяющей $\Psi_N(t,s)$, что для каждого фиксированного значения внутреннего времени $s > 0$ предельное, при $N \to \infty$, броуновское движение $W^s(t)$, $t \in [0,1]$, получается как склеивание начального куска базового броуновского движения W^0 временной протяженности $\exp\{-\lambda s\}$ и некоторого независимого от W^0 броуновского движения B, заданного на временном интервале $[\exp\{-\lambda s\}, 1]$, то есть*

$$W^s(t) = W^0(t)\mathbb{1}\{t \in [0, e^{-\lambda s}]\} + B(t - e^{-\lambda s})\mathbb{1}\{t \in [e^{-\lambda s}, 1]\}. \quad (11)$$

Доказательство. Мы используем для броуновских движений, полученных после перестановки слагаемых, те же обозначения, что и в начале данного раздела.

Необходимая перестановка процессов (ψ_i) в сумме (8) – это перестановка по первому скачку ведущего для ψ_i пуассоновского процесса. Последним мы поставим процесс ψ, у которого ведущий пуассоновский процесс имел самый ранний скачок (по внутреннему времени). Затем предпоследним мы поставим процесс ψ, у которого ведущий пуассоновский процесс имел следующий по внутреннему времени первый скачок, и так далее.

Количество $K(s) = K(s; N)$ тех процессов ψ, у которых соответствующий ведущий пуассоновский процесс не имел скачка до момента внутреннего времени s (включительно), – величина случайная, сосредоточенная на дискретном интервале $\{0, 1, \dots, N\}$. Однако, эта величина, отнесенная к N, асимптотически, при $N \to \infty$, вырождается в точке $\exp\{-\lambda s\}$, что является прямым следствием закона больших чисел для пуассоновских индикаторов (см. следующую ниже лемму 2). Так как все элементы всех формирующих последовательностей независимы, одинаково распределены и не зависят от всех ведущих пуассоновских процессов, то после перестановки на каждом фиксированном уровне $0 \leqslant u \leqslant s$, $s > 0$, мы в пределе для $\Psi_N(t,u)$, при $N \to \infty$, при суммировании уже переставленных процессов ПСИ опять получим некоторое броуновское движение $W^u(t)$ вдоль времени $t \in [0,1]$. Те процессы (ψ_i), у которых до заданного фиксированного момента $s > 0$ скачков не было, мы переставлять не будем. Составим из этих (непереставленных) процессов случайное блуждание на нулевом уровне внутреннего времени и, так как вследствие отсутствия скачков у ведущих пуассоновских процессов случайные величины – слагаемые остались прежними, то это случайное блуждание в точности скопируется на любой уровень u до уровня $s > 0$,

$$\sum_{j=1}^{K(s)} \psi_j(0) = \sum_{j=1}^{K(s)} \psi_j(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant s. \tag{12}$$

Так как $K(s;N)/N \xrightarrow{\mathrm{Pr}} \exp\{-\lambda s\}$, где предел понимается по вероятности при $N \to \infty$, то после перестановки суммируемых процессов ПСИ по признаку первого скачка (у соответствующего ведущего пуассоновского процесса) все предельные броуновские движения на каждом уровне внутреннего времени до фиксированного момента $s \geqslant 0$, включительно, будут в силу (12) на начальном интервале внешнего времени до момента $\exp\{-\lambda s\}$ тождественно совпадать с W^0.

Для окончания доказательства леммы 1 остается заметить, что скачок ведущего пуассоновского процесса дает замещение значения соответствующего процесса ПСИ на независимую копию. Это означает, что после данной перестановки процессов ПСИ броуновское движение $W^s(t)$ при $1 \geqslant t \geqslant \exp\{-\lambda s\}$ продолжается броуновским движением, независимым от $W^0(t) - W^0(\exp\{-\lambda s\})$ при тех же $1 \geqslant t \geqslant \exp\{-\lambda s\}$. Лемма 1 доказана.

Следующую лемму 2 мы сформулируем в несколько более общем, чем нам необходимо, виде.

Лемма 2. *Пусть независимые пуассоновские процессы* $(\Pi_i(s))$, $i \in \mathbb{N}$ *имеют одинаковую интенсивность* $\lambda > 0$. *Рассмотрим при* $0 \leqslant v <$

$u \leqslant s$, следующие независимые случайные индикаторы:

$$\mathbb{I}_i(v;u;s) \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{I}_{\{\Pi_i(u-)>\Pi_i(v),\,\Pi_i(s)\,>\Pi_i(u)\}}(\omega).$$

Тогда верна следующая сходимость по вероятности при $N \to \infty$:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbb{I}_i(v;u;s) \xrightarrow{\mathrm{Pr}} \bigl(1-e^{-\lambda(u-v)}\bigr)\bigl(1-e^{-\lambda(s-u)}\bigr). \tag{13}$$

Доказательство леммы 2. Очевидно равенство

$$\mathbb{I}_{\{\Pi_i(u-)>\Pi_i(v),\,\Pi_i(s)\,>\Pi_i(u)\}} = \mathbb{I}_{\{\Pi_i(u-)>\Pi_i(v)\}}\mathbb{I}_{\{\Pi_i(s)\,>\Pi_i(u)\}}.$$

Используя независимость и однородность приращений пуассоновского процесса, вычислим математическое ожидание рассматриваемых индикаторов, $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,\mathbb{I}_i(v;u;s) &= \mathbf{E}\left\{\mathbb{I}_{\{\Pi_i(u-)>\Pi_i(v)\}}\mathbb{I}_{\{\Pi_i(s)\,>\Pi_i(u)\}}\right\}\\ &= \mathbf{E}\left\{\mathbb{I}_{\{\Pi_i(u-)>\Pi_i(v)\}}\right\}\mathbf{E}\left\{\mathbb{I}_{\{\Pi_i(s)\,>\Pi_i(u)\}}\right\}\\ &= \mathbf{P}\left\{\mathbb{I}_{\{\Pi_i(u-)>\Pi_i(v)\}}\right\}\mathbf{P}\left\{\mathbb{I}_{\{\Pi_i(s)\,>\Pi_i(u)\}}\right\}\\ &= \left(1-e^{-\lambda(u-v)}\right)\left(1-e^{-\lambda(s-u)}\right).\end{aligned}$$

Теперь требуемое предельное соотношение (13) – это прямое следствие закона больших чисел для независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих математическое ожидание.

Следующая теорема показывает, как броуновские мосты описывают переходные характеристики процесса Орнштейна–Уленбека.

Рассмотрим процесс Орнштейна–Уленбека $U(s)$, $s \geqslant 0$, полученный как предел конечномерных распределений в утверждении 3 на уровне внешнего времени $t = 1$. Зафиксируем начальное значение $U(0) = x$, $x \in \mathbb{R}$, – это означает, что значение базового броуновского движения в единице фиксировано, $W^0(1) = x$. Последнее, в свою очередь, означает, что мы имеем дело с броуновским мостом $W^0_{[0,\,x]}(t)$, $t \in [0,1]$, построенным по броуновскому движению $W^0(t)$, выходящему из нуля и приходящему в точку x.

Обратимся к перестановке процессов ПСИ, рассмотренной в лемме 1. После данной перестановки суммируемых процессов ПСИ предельное броуновское движение $W^s(t)$ в точности повторяет траекторию броуновского движения $W^0(t)$ до момента $t = \exp\{-\lambda s\}$, а после этого момента времени, то есть при $t \in (\exp\{-\lambda s\}, 1]$, траектория $W^s(t) - W^s(\exp\{-\lambda s\})$ продолжается независимо от траектории $W^0(t) - W^0(\exp\{-\lambda s\})$, так что целиком $W^s(t)$, $t \in [0, 1]$, остается броуновским движением. См. рис. 1, соответствующие графики траекторий на нем и график экспоненты, соединяющий точку $(1, 0)$ плоскости (t, s) и точку B с координатами $(\exp\{-\lambda s\},\, s)$.

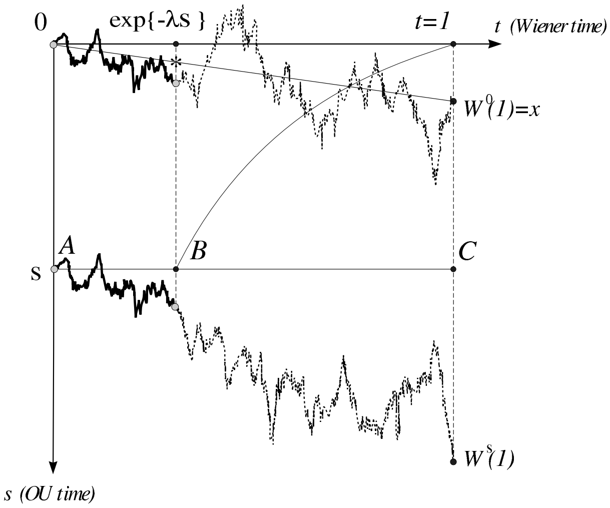

Рис. 1. Переходные характеристики и мосты.

В итоге имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{U(s)\,|\,U(0) = x\} &= \mathbf{E}\{W^s(1)\,|\,W^0(1) = x\} \\
&= \mathbf{E}\{W^s(e^{-\lambda s}) + \big(W^s(1) - W^s(e^{-\lambda s})\big) \,\,|\, W^0(1) = x\} \\
&= \mathbf{E}\{W^0(e^{-\lambda s}) + \big(W^s(1) - W^s(e^{-\lambda s})\big) \,\,|\, W^0(1) = x\} \\
&= \mathbf{E}\{W^0(e^{-\lambda s})\,|\,W^0(1) = x\} \\
&+ \mathbf{E}\{\big(W^s(1) - W^s(e^{-\lambda s})\big) \,\,|\, W^0(1) = x\} \\
&= xe^{-\lambda s} \,+ \mathbf{E}\{\big(W^s(1) - W^s(e^{-\lambda s})\big)\} = xe^{-\lambda s}.
\end{aligned}$$

Здесь значение первого условного математического ожидания оказалось равным величине $x\exp\{-\lambda s\}$ (на рис. 1 соответствующая точка обозначена звездочкой) в силу того, что математическое ожидание броуновского моста – линейная функция по t, график которой соединяет концы моста. Значение второго математического ожидания оказалось равным нулю в силу независимости приращений $W^s(1) - W^s(e^{-\lambda s})$ и $W^0(1) - W^0(e^{-\lambda s})$. Полученное условное математическое ожидание полностью соответствует переходному математическому ожиданию для процесса Орнштейна–Уленбека (O_6).

Перейдем к получению необходимой дисперсии. Так как ковариация всякого броуновского моста (уходящего в момент времени ноль из произвольной точки и приходящего в момент времени 1 в произвольную точку), взятая в точках $0 \leqslant v, t \leqslant 1$, равна $\min(v,t) - vt$, то дисперсия такого моста, взятая в точке $\exp\{-\lambda s\}$ равна $\exp\{-\lambda s\} - \exp\{-2\lambda s\}$. Условная дисперсия $\mathbf{D}\{U(s)\,|\,U(0) = x\}$ складывается из дисперсии моста $W^0_{[0,\,x]}(e^{-\lambda s})$ и накопленной дисперсии независимого приращения $W^s(1) - W^s(\exp\{-\lambda s\})$ (на рис. 1 это сумма накопленных дисперсий на отрезках A, B и B, C). Так как $\mathbf{D}\{W^s(1) - W^s(\exp\{-\lambda s\})\} = 1 - \exp\{-\lambda s\}$, то очевидно, что

$$\mathbf{D}\{U(s)\,|\,U(0) = x\} = \mathbf{D}\{W^s(1)\,|\,W^0(1) = x\}$$

$$= (\exp\{-\lambda s\} - \exp\{-2\lambda s\}) + (1 - \exp\{-\lambda s\}) = 1 - \exp\{-2\lambda s\},$$

что в точности соответствует переходной дисперсии процесса Орнштейна–Уленбека (O_6).

Замечание 1. Для классического процесса Орнштейна–Уленбека формула для переходной дисперсии легко получается из представления (O_3). При этом, как видно, начальное значение для этой условной дисперсии не играет никакой роли, – эта условная дисперсия есть дисперсия второго слагаемого (с интегралом) в правой части (O_3). В нашем же случае в переходную дисперсию и начальное значение (!) привносит свой вклад, равный $\exp\{-\lambda s\} - \exp\{-2\lambda s\}$.

Литература

1. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, М., 1977
2. О. В. Русаков, *Суммы независимых пуассоновских субординаторов и их связь со строго α-устойчивыми процессами типа Орнштейна–Уленбека.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **361** (2008), 123–137.
3. У. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее применения.* Т. 2 Наука, М., 1984
4. O. Vasićek, *An equilibrium characterization of the term structure.* — J. Financial Economics **5** (1977), 177–188.

Rusakov O. V. Poissonian subordinators, the Wiener–Ornstein–Uhlenbeck field, and a relation between the Ornstein–Uhlenbeck processes and the Brownian bridges.

To a sequence of i.i.d. random variables we apply the time change operator via the independent of this sequence Poisson process. We consider the sums of the independent copies of a such kind constructed processes having the continuous time. The finite dimensional distributions of the limits of these sums coincide with the finite dimensional distributions of the Wiener–Ornstein–Uhlenbeck field which is the tensor product of the Brownian motion and the Ornstein–Uhlenbeck process. The transition characteristics of the limiting process are described by the Brownian bridges which are built into the Wiener–Ornstein–Uhlenbeck field.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ovir2010@gmail.com

Поступило 12 ноября 2010 г.