Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

Л. В. Розовский

О МАЛЫХ УКЛОНЕНИЯХ СУММ ВЗВЕШЕННЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Введение

Пусть $S = \sum\limits_{j\geqslant 1} \lambda_j X_j$ и $M = \sup\limits_{j\geqslant 1} \lambda_j X_j$, где $\{\lambda_j\}$ – последовательность невозрастающих неотрицательных чисел с $\lambda_1 > 0$, а $\{X_i\}$ – независимые копии положительной случайной величины X с функцией распределения $V(x)$. В заметке изучается поведение $\mathbf{P}(S < r)$ и $\mathbf{P}(M < r)$ при $r \to 0$.

Аналогичные задачи, в основном для гауссовского случая, когда $X = |\xi|^p$, $p > 0$, где ξ – стандартная нормальная случайная величина, изучались рядом авторов (см. [6, 8, 10] и ссылки в этих работах). Предварительные результаты без привязки к гауссовской специфике были получены в [6] и позже существенно обобщены и уточнены в [8] (см. также [7]). Ключевым в [8] являлось следующее условие: для любого $0 < r \leqslant r_0$

$$c_1\, V(br) \leqslant V(r) \leqslant c_2\, V(br), \tag{1.1}$$

где $b \in (0,1)$, c_1, $c_2 > 1$ и r_0 – некоторые постоянные.

Заметим, что (1.1) очевидным образом выполняется, если $V(r)$ правильно меняется в нуле, что, в частности, имеет место в важном гауссовском случае.

Основной результат из [8] выглядит следующим образом: пусть X имеет конечную дисперсию и абсолютно непрерывное распределение и пусть выполнено условие (1.1). Если $\sum\limits_j \lambda_j < \infty$, то

$$\mathbf{P}(S < r) = (2\pi)^{-1/2}\, (\gamma\sigma(\gamma))^{-1}\, e^{-Q(\gamma)}\, \big(1 + o\,(1)\big), \quad r \searrow 0. \tag{1.2}$$

Ключевые слова: малые уклонения, положительные случайные величины, медленно меняющиеся функции, правильно меняющиеся функции, преобразование Лапласа.

Работа поддержана грантом НШ 4472.2010.1 и грантом РФФИ 10-01-00242

Здесь $\gamma = \gamma(r)$ – единственное решение уравнения $m(\gamma) = r$ и

$$\Lambda(\gamma) = \mathbf{E}e^{-\gamma S}, \quad m(\gamma) = -\left(\log \Lambda(\gamma)\right)', \quad \sigma^2(\gamma) = \left(\log \Lambda(\gamma)\right)'',$$
$$Q(\gamma) = -\gamma\, m(\gamma) - \log \Lambda(\gamma). \tag{1.3}$$

Дальнейшее продвижение осуществлено в [9], где было, в частности, доказано, что асимптотика (1.2) сохраняет справедливость, если наряду с (1.1) выполнены условия $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ и

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{x^2\, V(x)}{\mathbf{E}X^2\, \mathbf{I}[X < x]} < \infty. \tag{1.4}$$

Последнее условие (так называемое условие стохастической компактности по Феллеру) имеет место, когда X принадлежит области притяжения устойчивого (в том числе, нормального) закона.

Также заметим (см. [4, (1.2)] или [9, (3.2)]), что необходимое предположение $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ эквивалентно

$$\sum_{j\geqslant 1} \mathbf{E}(1 \wedge \lambda_j\, X) < \infty, \tag{1.5}$$

и что условия (1.4) и (1.5) друг с другом не связаны.

Сформулируем еще один результат из [9], более близкий к предмету нашего исследования.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия* (1.5) *и*

$$\lim_{u\to\infty} u\, \sigma(u)/Q(u) = 0. \tag{1.6}$$

Тогда

$$-\ln \mathbf{P}(S < r) \sim Q(\gamma), \quad r \to 0, \tag{1.7}$$

где γ удовлетворяет уравнению $m(\gamma) = r$.

Отметим, что (1.6) вытекает из (1.1) и, поэтому, из (1.1) и (1.5) следует (1.7).

Несмотря на свою общность, асимптотики (1.2) и (1.7) имеют определенные недостатки. Так, правые части соотношений (1.2) и (1.7) выражены в терминах преобразований Лапласа случайной величины S, а задача нахождения функции уклонений более прозрачного вида

довольно сложна (см. [7]). Кроме того, степенное убывание распределения V в нуле, вытекающее из (1.1), слишком ограничительно, а моментное предположение (1.4), скорее всего, не является необходимым для (1.2).

В [1] и [2], а также, независимо, в [4] была поставлена задача найти точный вид асимптотики $\ln \mathbf{P}(S < r)$ при $r \to 0$ при минимальных дополнительных предположениях. Так, в [1] был основательно исследован случай $\lambda_n \sim n^{-\mu}\,(1+\ln n)^{-\nu}$, а в [2] получены некоторые новые результаты, касающиеся малых уклонений S и M при $\lambda_n = q^n$, где $0 < q < 1$. В [4] были изучены вероятности малых уклонений в следующих трех случаях (теоремы 2.1, 3.1 и 4.1, соответственно):

(i) последовательность $\{\lambda_j\}$ правильно меняется с показателем $-\beta < -1$, и, при некотором $\delta > 0$,

$$-\ln V(r) = O\,(r^{-\gamma+\delta}), \quad r \to 0,$$

где $\gamma = 1/(\beta - 1)$,

(ii) функция $-\ln V(r)$ правильно меняется с показателем $-\gamma < 0$ при $r \to 0$, и, при некотором $\delta > 0$,

$$\lambda_j = O\,(j^{-\beta-\delta}), \quad j \to \infty,$$

(iii) последовательность $\{\lambda_j\}$ убывает быстрее любой степени j, и $V(r)$ правильно меняется с положительным показателем при $r \to 0$.

Пункт (ii) представляет для нас особый интерес.

Теорема 1.2 ([3, теорема 3.1])**.** *Пусть*

$$-\ln V(r) \sim r^{-\gamma}\, L(1/r), \quad r \to 0, \tag{1.8}$$

где $\gamma > 0$, $L(\cdot)$ *медленно меняется на* ∞ *и, при некоторых* $\kappa > 0$ *и* $\delta > 0$,

$$\mathbf{E}X^{(1/(\beta+\kappa))+\delta} < \infty, \quad \lambda_j = O\,(j^{-\beta-\kappa}), \quad j \to \infty, \tag{1.9}$$

где $\beta = (\gamma+1)/\gamma$. *Тогда* $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ *и*

$$\ln \mathbf{P}(S < r) \sim A(\gamma)\, \ln V(r), \quad r \to 0, \tag{1.10}$$

где $A(\gamma) = \Big(\sum\limits_{j\geqslant 1} \lambda_j^{\gamma/(1+\gamma)}\Big)^{\gamma+1} < \infty$.

Соотношения (1.8) и (1.10) можно равносильно переформулировать в терминах преобразования Лапласа случайной величины X. Например (см. [12, следствие 5]), (1.8) равносильно

$$-\ln \phi(t) \sim c(\gamma)\, t\, s \quad t \to \infty, \tag{1.11}$$

где $\phi(t) = \mathbf{E}e^{-tX}$, $c(\gamma) = (1+\gamma)\,\gamma^{-\gamma/(1+\gamma)}$, а положительная функция $s = s(t)$ стремится к нулю на ∞ и удовлетворяет условию

$$-\ln V(s) \sim s\,t, \quad t \to \infty. \tag{1.12}$$

Стоит отметить, что (1.11) совпадает (см. предыдущие обозначения) с

$$-\ln \phi(t) \sim t^{1/\beta}\, l(t), \quad t \to \infty, \tag{1.13}$$

где функция $l(t) \sim c(\gamma)\, L^{1/(\gamma+1)}(1/s)$ при $t \to \infty$ и, следовательно, медленно меняется на ∞.

Исследования по теме были продолжены в [11], [13] и [14], где были получены асимптотики для $-\ln \mathbf{P}(S < r)$ и $-\ln \mathbf{P}(M < r)$ при $r \to 0$ общего вида при оптимальных (вообще говоря, необходимых и достаточных) предположениях при условии, что числа $\{\lambda_j\}$ являются гладкими в некотором смысле. Подход, принятый в этих работах, позволяет свести вероятностную проблему к некоторой технической задаче, а именно, к асимптотическому анализу соответствующих интегралов. На этом пути, были уточнены и обобщены результаты из [1, 2] и случаи (i) и (iii) из [4].

В параграфе 2 настоящей работы уточняется теорема 1.2, в которой, в отличие от других ранее упомянутых результатов, гладкость весов $\{\lambda_j\}$ не предполагается. Соответствующие малые уклонения M также изучаются (см. параграф 3). Доказательства приведены в параграфе 4.

2. Результаты для S

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (1.8). *Если* $A(\gamma) = \infty$, *то*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\ln \mathbf{P}(S < r)}{\ln V(r)} = \infty.$$

Далее рассмотрим более интересный случай $A(\gamma) < \infty$.

Начнем с нескольких следствий одного более общего (и точного) результата, который будет приведен позже.

Предположим, что $\{\lambda_j\}$ при всех достаточно больших j удовлетворяет условию

$$b_\tau(1/\lambda_j) \geqslant j, \tag{2.1}$$

где невозрастающая функция $b_\tau(u)$, $u \geqslant 0$, правильно меняется на ∞ с показателем τ, т.е. $b_0(u) = u^{-\tau}\, b_\tau(u)$ медленно меняется на ∞.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.8) *и* (2.1) *при* $0 \leqslant \tau < \gamma/(1+\gamma)$. *Если*

$$\mathbf{E}\, b_\tau(X) < \infty, \tag{2.2}$$

то имеют место соотношения (1.10) *и*

$$\mathbf{P}(S < \infty) = 1. \tag{2.3}$$

Пусть положительная функция $\rho(u)$ медленно меняется на ∞ и удовлетворяет условию

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\rho(u)}{\rho(u\,\rho(u))} > 0. \tag{2.4}$$

Положив в (2.1) $b_\tau(u) = A\,u^\tau/\rho(u^\tau)$ при $\tau > 0$ и достаточно большой постоянной A, мы легко убедимся в справедливости следующего результата.

Следствие 1. *Пусть*

$$\lambda_j = O\,(j\,\rho(j))^{-1/\tau}, \quad j \to \infty, \tag{2.5}$$

и

$$\mathbf{E}\, X^\tau/\rho(X^\tau) < \infty. \tag{2.6}$$

Тогда из (1.8) *следует* (2.3) *и* (1.10).

Воспользовавшись следствием 1 при $\tau = 1/(\beta+\kappa)$ и $\rho(\cdot) = 1$, получим некоторое уточнение теоремы 1.2 (удален параметр δ в (1.9)).

Следствие 2. *Предположим, что при положительных* κ *и* δ

$$\lambda_j = O\,(\exp\{-\kappa\,(j\,\rho(j))^\delta\}), \quad j \to \infty, \tag{2.7}$$

где функция $\rho(\cdot)$ *такая как в* (2.4). *Если выполняются условия* (1.8) *и*

$$\mathbf{E}\, \ln^{1/\delta}(3+X)/\rho(\ln^{1/\delta}(3+X)) < \infty, \tag{2.8}$$

то имеют место соотношения (2.3) *и* (1.10).

При $\delta = 1$ и $\rho(\cdot) = 1$ вышеприведенный результат уточняет теорему 5 из [13].

Чтобы проверить следствие 2, нужно применить теорему 2.2 при $\tau = 0$, $b_0(u) = A\,(\ln^{1/\delta} u)/\rho(\ln^{1/\delta} u)$ и достаточно большом A (см. (2.1)).

Теперь приведем основной результат параграфа 2. Мы сформулируем его в терминах преобразований Лапласа X и S, поскольку это выглядит проще и может быть сделано в более общем виде. Равносильная переформулировка в терминах распределений в типичных случаях, как уже было отмечено, проблемой не является.

Обозначим

$$\phi(t) = \mathbf{E}e^{-tX}, \quad \phi_S(t) = \mathbf{E}e^{-tS}, \quad t \geqslant 0.$$

Положим (см. (1.13))

$$h(u) = \sup_{t \geqslant 1} \frac{l(t)}{l(ut)}. \tag{2.9}$$

Функция $h(u)$ медленно меняется на ∞ и $h(u) \geqslant 1$. Кроме того (см. [11], замечание 2), если

$$u\,(\ln(1/l(u)))' \text{ не возрастает на } \infty, \tag{2.10}$$

то $l(u)$ убывает на ∞, а $h(u)$ имеет оптимальную оценку

$$h(u) = O\,(1/l(u)), \quad u \to \infty. \tag{2.11}$$

Предложение 1. *Пусть $\beta \geqslant 1$ и имеет место* (1.13), *где положительная функция $l(t)$, $t > 0$, медленно меняется на ∞. Если*

$$\sum_{j \geqslant 1} \lambda_j^{1/\beta}\, h(1/\lambda_j) < \infty \tag{2.12}$$

(*и, следовательно,* $C_\beta = \sum\limits_{j \geqslant 1} \lambda_j^{1/\beta} < \infty$), *то условия* $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$ *и*

$$\ln \phi_S(t) \sim C_\beta\, \ln \phi(t), \quad t \to \infty, \tag{2.13}$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \geqslant 1} \mathbf{E}\, \min(1,\, t\,\lambda_j\, X) = o\,(1)\,(-\ln \phi(t)), \quad t \to \infty. \tag{2.14}$$

Напоминаем, что если $\beta > 1$, то соотношения (1.13) и (2.13) равносильны соотношениям (1.8) и (1.10) соответственно при $\gamma = 1/(\beta - 1)$

и $L(1/r) \sim (l(t)/C(\gamma))^{1+\gamma}$, где положительная функция $t = t(r)$ стремится к бесконечности и удовлетворяет условию $-\ln\phi(t) \sim t\,r$ при $r \to 0$.

Замечание 1. Отметим,что предложение 1 справедливо, если $\lambda_j = 0$ для всех j, начиная с некоторого $n > 1$, и то, что в этом случае условия (2.12) и (2.14) тривиально выполняются.

Замечание 2. Предположим, что (2.1) выполняется при $0 \leqslant \tau \leqslant 1/\beta \leqslant 1$.

1) Если $\tau < 1/\beta$ то имеет место (2.12), и (2.14) вытекает из (2.2).

2) Если $\tau = 1/\beta$, то (2.12) следует (см. (2.9) и (2.1)) из

$$\int\limits_1^\infty b_0(u)\,h(u)\frac{du}{u} < \infty. \tag{2.15}$$

Кроме того, в случае $\beta > 1$ условие (2.12) является следствием

$$\mathbf{E}\,X^{1/\beta}\,g(X) < \infty, \tag{2.16}$$

где $g(u) = \sup_{t\geqslant 1} b_0(tu)/l(t)$, а в случае $\beta = 1$ оно вытекает из

$$\bar{b}_0(t) = \int\limits_t^\infty b_0(u)\,du/u = o\,(l(t)), \quad t \to \infty, \tag{2.17}$$

и (2.16) при $g(u) = \sup\limits_{t\geqslant 1} \bar{b}_0(tu)/l(t)$.

Заметим, что теорема 2.2 является прямым следствием предложения 1 и замечания 2(1).

Теорема 2.3. *Пусть условия* (1.13) *и* (2.1) *выполняются при* $\tau = 1/\beta \leqslant 1$ *и, кроме того, функция* $u\,(\ln l(u))'$ *монотонна на* ∞. *Предположим также, что*

$$\sup_{t\geqslant u} \frac{\tilde{b}(t)}{l(t)} = O\,(\tilde{b}(u)/l(u)) \quad \text{при } u \to \infty, \tag{2.18}$$

где $\tilde{b}(\cdot) = b_0(\cdot)$, *если* $\beta > 1$, *и* $\tilde{b}(\cdot) = \bar{b}_0(\cdot)$ (*см.* (2.17)) *в граничном случае* $\beta = 1$. *Если*

$$\int\limits_1^\infty b_0(u)\,(1 + 1/l(u))\frac{du}{u} < \infty \tag{2.19}$$

и

$$\mathbf{E}\, X^{1/\beta}\, \tilde{b}(X)\, (1 + 1/l(X)) < \infty, \tag{2.20}$$

то имеют место соотношения (2.3) *и* (2.13).

Следствие 3. *Пусть при некоторых* $\beta \geqslant 1$, A *и* δ

$$-\ln \phi(t) \sim A\, t^{1/\beta}\, \ln^{-\delta} t, \quad t \to \infty.$$

Предположим, что

$$\lambda_j = O\, (j^{-1}\, \ln^c j)^\beta \quad \text{при } j \to \infty, \tag{2.21}$$

где $c + \delta_+ + 1 < 0$, *а* $\delta_+ = \max(0, \delta)$. *Если*

$$\mathbf{E}\, X^{1/\beta}\, \ln^{c+\delta_+} (1 + X) < \infty \quad (\beta > 1)$$

или

$$\mathbf{E}\, X\, \ln^{c+\delta+1} (1 + X) < \infty \quad (\beta = 1),$$

то справедливы соотношения (2.3) *и* (2.13).

Следствие 3 вытекает из теоремы 2.3 при $b_\tau(u) = A\, u^{1/\gamma} \ln^c u$, поскольку в этом случае (2.1) следует из (2.21).

Заметим, что (1.13) при $\beta = 1$ приводит к $l(t) = O\,(1)$, $t \to \infty$, и, следовательно, параметр δ из следствия 3 ($\beta = 1$) обязан быть неотрицательным.

3. Результаты для M

Предложение 2. *Пусть* $\beta > 0$ *и*

$$-\log V(r) \sim (1/r)^{1/\beta}\, l(1/r) \quad \text{при } r \searrow 0, \tag{3.1}$$

где положительная функция $l(t)$, $t > 0$, *медленно меняется на* ∞. *Если выполняется* (2.12), *то*

$$\mathbf{P}(M < \infty) = 1 \tag{3.2}$$

и (*см. обозначения в предложении* 1)

$$\ln \mathbf{P}(M < r) \sim C_\beta\, \ln V(r) \quad \text{при } r \searrow 0 \tag{3.3}$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j \geqslant 1} \big(1 - V(r/\lambda_j)\big) = o\,(1)\,(-\ln V(r)) \quad \text{при } r \searrow 0. \tag{3.4}$$

Замечание 3. Пусть выполнено условие (2.1). Если $\tau < 1/\beta$, то (2.12) справедливо и (3.4) следует из (2.2); если $\tau = 1/\beta$, то (2.12) вытекает из (2.15), а (2.16) влечет (3.4).

Теорема 3.1. *Пусть условия* (3.1) *и* (2.1) *удовлетворяются при некоторых* $0 \leqslant \tau < 1/\beta$. *Тогда из* (2.2) *следует* (3.2) *и* (3.3).

Следствие 4. *Пусть выполнены условия* (3.1), (2.7) *и* (2.8). *Тогда имеют место соотношения* (3.2) *и* (3.3).

При $\delta = 1$ и $\rho(\cdot) = 1$ данный результат улучшает теорему 6 из [13] (и теорему 12 из [2]).

Соответствующие аналоги теорем 2.1, 2.3 и следствия 3 также справедливы. В частности, если имеет место (3.1) и $C_\beta = \infty$, то

$$\lim_{r\to 0} \frac{\ln \mathbf{P}(M < r)}{\ln V(r)} = \infty.$$

4. Доказательства

Доказательство предложения 1. Имеем для любого $1 \leqslant R < Q$

$$-\ln \phi_S(t) = \left(\sum_{1\leqslant j\leqslant R} + \sum_{R<j\leqslant Q} + \sum_{j>Q} \right) (-\ln \phi(\lambda_j\, t)) = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.1)$$

Пусть R стремится к ∞ с ростом t достаточно медленно. Тогда по свойствам медленно меняющихся функций (см. [3])

$$I_1 \sim \sum_{1\leqslant j\leqslant R} (\lambda_j\, t)^{1/\beta}\, l(\lambda_j\, t) \sim -\ln \phi(t) \sum_{1\leqslant j\leqslant R} \lambda_j^{1/\beta} \sim -C_\beta\, \ln \phi(t) \quad \text{при } t \to \infty. \quad (4.2)$$

Имея в виду (1.13), получим $|\ln \phi(t)| \leqslant A\,\nu(t)$, $t \geqslant 1$, где $\nu(t) = t^{1/\beta}\, l(t)$, а постоянная A достаточно велика.

Положим $Q = \max\{j : t\,\lambda_j > 1\}$ в (4.1). Тогда (см. также (2.9) и (2.12))

$$I_2 \leqslant A\,\nu(t) \sum_{R<j\leqslant Q} \nu(t\,\lambda_j)/\nu(t) \leqslant A\,\nu(t) \sum_{j>R} \lambda_j^{1/\beta}\, h(1/\lambda_j) = o\,(\nu(t)) \quad \text{при } t \to \infty. \quad (4.3)$$

Обозначим $\rho(s) = \mathbf{E}\, \min(1, s\,X)$. Несложно проверить,что

$$A^{-1}\, \rho(s) \leqslant -\ln \phi(s) \leqslant A\, \rho(s), \quad 0 < s \leqslant 1,$$

и, следовательно,

$$A^{-1} \sum_{j>Q} \rho(t\,\lambda_j) \leqslant I_3 \leqslant A \sum_{j>Q} \rho(t\,\lambda_j). \tag{4.4}$$

Теперь, из (2.14) следует (2.3) и $I_3 = o\,(\nu(t))$, $t \to \infty$. Таким образом, по (4.1)–(4.3) получим (2.13) и (2.3).

С другой стороны, соотношения (2.3), (2.13) и (4.1)–(4.3) дают

$$\sum_{j>Q} \rho(t\,\lambda_j) = o\,(\nu(t)), \quad t \to \infty.$$

Учитывая, что, так же как в (4.3),

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant Q} \rho(t\,\lambda_j) \leqslant Q \leqslant R + A \sum_{R<j\leqslant Q} \nu(t\,\lambda_j) = o\,(\nu(t)), \quad t \to \infty,$$

получим (2.14).

Предложение 1 полностью доказано.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $n \geqslant 1$ и $S_n = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j X_j$. Тогда, если имеет место (1.8) (см. также замечание 1), то

$$-\ln V(S<r) \geqslant -\ln V(S_n<r) \sim -A_n(\gamma)\,\ln V(r) \ \text{ при } \ r \to 0,$$

где $A_n(\gamma) = \Big(\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j^{\gamma/(1+\gamma)}\Big)^{\gamma+1}$. Отсюда получим, что

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\ln \mathbf{P}(S<r)}{\ln V(r)} \geqslant A(\gamma), \tag{4.5}$$

и требуемое утверждение доказано.

Доказательство замечания 2. Пусть выполнено условие (2.1). Положим $\mu(u) = u^{-1/\beta}\,h(u)$ (см. (2.12)). Рассуждая, также как в [11, доказательство замечания 1], докажем, что (2.12) вытекает из условия $-\int\limits_1^\infty b_\tau(u)\,d\mu(u) < \infty$ или, равносильно,

$$\int\limits_1^\infty b_\tau(u)\,h(u)\,u^{-1-1/\beta}\,du < \infty. \tag{4.6}$$

Но (4.6) справедливо, если $\tau < 1/\beta$, и совпадает с (2.15) при $\tau = 1/\beta$.

Далее, пусть положительная и невозрастающая функция $\lambda(y)$, $y > 0$, такова, что $\lambda_j = \lambda(j)$, $j \geqslant 1$. Воспользовавшись обозначениями из (4.3) и (4.4), найдем, что левая часть в (2.14) не превосходит

$$Q + 1 + \sum_{j > Q+1} \rho(t\,\lambda_j) \leqslant Q + 1 + J_1 \leqslant b_\tau(t) + 1 + J_1,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_{Q+1}^{\infty} \rho(t\,\lambda(y))\,dy \leqslant -\int\limits_{Q+1}^{\infty} y\,d\rho(t\,\lambda(y)) \\ &< -2\int\limits_{Q+1}^{\infty} b_\tau(1/\lambda(y))\,d\rho(t\,\lambda(y)) \leqslant -2\int\limits_{1}^{\infty} b_\tau(t\,s)\,d\rho(1/s) \\ &= 2\int\limits_{1}^{\infty} \frac{b_\tau(t\,s)}{s^2}\Big(\int\limits_{0}^{s} x\,dV(x)\Big)\,ds \leqslant 2\Big(\bar b(t) + \int\limits_{1}^{\infty} \bar b(u\,t)\,dV(u)\Big), \end{aligned}$$

при $\bar b(u) = u\int\limits_{u}^{\infty} b_\tau(s)\,s^{-2}\,ds$.

Остальные рассуждения, необходимые для проверки замечания 2, являются несложным следствием сказанного и соотношения

$$\lim_{u\to\infty} \bar b(u)/b(u) = (1-\tau)^{-1}.$$

Чтобы доказать теорему 2.3 следует воспользоваться предложением 1 и замечанием 2(2). Отметим, что предположение относительно $l(u)$ и (2.18) приводят к соотношению

$$g(u) \leqslant \sup_{t\geqslant 1} \tilde b(tu)/l(tu)\cdot\sup_{t\geqslant 1} l(tu)/l(t) = O\left(\tilde b(u)/l(u)\,(1+l(u))\right) \text{ при } u\to\infty$$

(см. (2.11) и похожую оценку для случая: $u\,(\log l(u))'$ не возрастает на ∞).

Все результаты, касающиеся M, обосновываются аналогично соответствующим утверждениям для S, причем с некоторыми упрощениями (подробнее см. [11] и [14]).

Литература

1. F. Aurzada, *On the lower tail probabilities of some random sequences in l_p.* — J. Theoret. Probab. **20** (2007), 843–858.
2. F. Aurzada, *A short note on small deviations of sequences of i.i.d. random variables with exponentially decreasing weights.* — Statist. Probab. Letters **78**, No. 15 (2008), 2300–2307.
3. N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels, *Regular Variation.* Cambridge University Press, Cambridge (1987).
4. A. A. Borovkov, P. S. Ruzankin, *On small deviations of series of weighted random variables.* — J. Theoret. Probab. **21**, No. 3 (2008), 628–649.
5. А. А. Боровков, П. С. Рузанкин, *О малых уклонениях рядов независимых положительных случайных величин с весами, близкими к экспоненциальным.* — Математические труды, **11**, No. 1 (2008), 49–67.
6. R. Davis, S. Resnick, *Extremes of moving averages of random variables with finite endpoint.* — Ann. Probab. **19**, No. 1 (1991), 312–328.
7. T. Dunker, M. A. Lifshits, and W. Linde, *Small deviations of sums of independent variables.* — In: High Dimensional Probability, Progress in Probability. **43** (1998), 59–74, Birkhäuser, Basel.
8. M. A. Lifshits, *On the lower tail probabilities of some random series.* — Ann. Probab. **25**, No. 1 (1997), 424–442.
9. Л. В. Розовский, *О вероятностях малых уклонений сумм независимых положительных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 151–167.
10. Л. В. Розовский, *О гауссовой мере шаров в гильбертовом пространстве.* — Теория вероятн. и ее примен. **53**, No. 2 (2008), 382–390.
11. L. V. Rozovsky, *Small deviations of series of weighted i.i.d. non-negative random variables with a positive mass at the origin.* — Statist. Probab. Letters **79** (2009), 1495–1500.
12. L. V. Rozovsky, *Remarks on a link between Laplace transform and distribution function of a nonnegative random variable.* — Statist. Probab. Letters **79** (2009), 1501–1508.
13. L. V. Rozovsky, *On the behavior of the log Laplace transform of series of weighted non-negative random variables at infinity.* — Statist. Probab. Letters **80** (2010), 764–770.
14. Л. В. Розовский, *О малых уклонениях максимального элемента последовательности независимых случайных величин с гладкими весами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 190–200.

Rozovsky L. V. Small deviations of series of weighted positive random variables.

Let $\{X_j\}$ be i.i.d. positive random variables and let $\{\lambda_j\}$ be a sequence of nonnegative nonincreasing numbers. We continue to examine the conditions under which asymptotics of the log Laplace transform of $\sum\limits_{j\geqslant 1} \lambda_j X_j$

has an explicit form at infinity. A behavior of $\sup\limits_{j\geqslant 1} \lambda_j X_j$ is also under consideration.

С.-Петербургская
Химико-фармацевтическая Академия
ул. проф. Попова 14,
197376, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 1 ноября 2010 г.