Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

М. И. Ревяков

ОПТИМАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА АРГУМЕНТОВ ПЕРЕСТАНОВОЧНО НЕУБЫВАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПО ДОСТАТОЧНЫМ СТАТИСТИКАМ ДЛЯ ПАРАМЕТРОВ–АРГУМЕНТОВ

1. Введение

Отправным обстоятельством данной работы является наша заинтересованность в том, чтобы доставить перестановочно возрастающей функции от s, $s \geqslant 2$, векторов [2] как можно большее значение на множестве перестановок ее (неизвестных) скалярных аргументов по достаточным статистикам для семейства распределений, значения параметра которого являются аргументами целевой функции. Показано, что если это семейство обладает монотонным отношением правдоподобия (типичное требование в родственных задачах ранжирования популяций), то при достаточно широком классе функций потерь наименьший риск достигается такой же перестановкой, которую следовало бы осуществить, если бы ранжирование достаточных статистик заведомо совпадало с ранжированием самих параметров-аргументов.

Примечательно, что для случая двух векторов оптимальная перестановка вовсе не зависит от функции потерь при естественном условии ее убывания по значениям целевой функции. Это обстоятельство особенно важно, поскольку при постановке задач ранжирования популяций сомнение в целесообразности привлечения вальдовской теории принятия решений, как правило, связывается с субъективизмом в назначении функции потерь (см. [1, 11.3]).

Необходимо отметить, что переход от $s = 2$ к $s > 2$ сопровождается принципиальным усложнением обстоятельств, являющихся ключевыми в рамках исследуемой задачи. Как в работах [5, 6], относящихся к *оцениванию* параметров законов распределений случай-

Ключевые слова: ранжирование популяций, функция многих векторных аргументов, статистическая решающая функция, монотонное отношение правдоподобия, вогнутая функция потерь, надежность, испытания.

ных величин, мы стремимся к расширению класса функций потерь, в котором оптимальное решение было бы инвариантным. Это расширение осуществляется за счет сужения класса рассматриваемых целевых функций. В частности, интерес представляют дополнительные условия, которым должна удовлетворять перестановочно возрастающая (AI) функция при числе векторов больше двух, чтобы оптимальная перестановка ее аргументов была инвариантна в классе вогнутых функций потерь.

В случае, когда целевая функция может быть представлена в виде функции от сумм одноименных координат векторов, это дополнительное к AI условие трансформируется в выпуклость по Шуру, так сказать, более высокого порядка (ср. [9, 1.C], где затрагивается близкая терминология), в то время как AI функциям здесь соответствует выпуклость по Шуру в традиционном смысле [2]. Данное утверждение составляет теорему 2; однако, основным результатом является теорема 1.

Заключительный 3-й раздел посвящен применению результатов раздела 2 к вопросу максимизации надежности параллельно-последовательных систем с ненагруженным резервом, систем типа “k из n последовательных подсистем” в нагруженном режиме и размещенных параллельных систем. Предполагается, что компоненты системы разнонадежные и могут быть переставлены в системе в зависимости от результатов их испытаний на надежность.

2. Размещения с минимальным риском

Пусть $X_1^{(\nu)}, \dots, X_{n+m_\nu}^{(\nu)}$, $n \geqslant 2$, $m_\nu \geqslant 0$, для каждого $\nu = \overline{1,s}$, $s \geqslant 2$, суть действительные случайные величины (с.в.), функции распределений которых могут отличаться только (неизвестным) значением параметра $\theta_c^{(\nu)}$ из множества $\Theta_\nu \subseteq R^1$. Все эти с.в. предполагаются независимыми. На $\Theta_1^n \times \Theta_2^n \times \ldots \times \Theta_s^n$ рассмотрим функцию $P(\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}; \dots; \eta_1^{(s)}, \dots, \eta_n^{(s)})$, которая является перестановочно неубывающей (см. [2]), т.е. полагая $\eta^{(\nu)} = (\eta_1^{(\nu)}, \dots, \eta_n^{(\nu)})$, $\nu = \overline{1,s}$,

$$P(\eta^{(1)}\Pi; \dots; \eta^{(s)}\Pi) = P(\eta^{(1)}; \dots; \eta^{(s)}) \tag{1}$$

для любой $(n \times n)$-матрицы перестановок Π и

$$P(\widehat{\eta}_1^{(1)}, \dots, \widehat{\eta}_n^{(1)}; \dots; \widehat{\eta}_1^{(s)}, \dots, \widehat{\eta}_n^{(s)}) \geqslant P(\eta_1^{(1)}, \dots, \eta_n^{(1)}; \dots; \eta_1^{(s)}, \dots, \eta_n^{(s)}), \tag{2}$$

если для произвольной пары индексов i и j, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, и для всех $\nu = \overline{1,s}$

$$\widehat{\eta}_i^{(\nu)} = \max(\eta_i^{(\nu)}, \eta_j^{(\nu)}), \quad \widehat{\eta}_j^{(\nu)} = \min(\eta_i^{(\nu)}, \eta_j^{(\nu)}), \quad \widehat{\eta}_c^{(\nu)} = \eta_c^{(\nu)}, \quad c \neq i, j.$$

Для тех ν, для которых $m_\nu > 0$, дополнительно предполагается, что P – неубывающая функция по каждому аргументу $\eta_c^{(\nu)}$, $c = \overline{1,n}$. В принципе мы хотим, чтобы функция P приняла как можно большее значение при том, что мы можем поместить $\theta_c^{(\nu)}$, $c = \overline{1, n+m_\nu}$, в любую позицию ν-го вектор-аргумента.

Из вышеизложенного, в частности, следует, что если бы были известны значения $\theta_c^{(\nu)}$ или, скажем, только их порядки $\theta^{(\nu)}_{\widehat{k}^{(\nu)}(1)} \geqslant \ldots \geqslant \theta^{(\nu)}_{\widehat{k}^{(\nu)}(n+m_\nu)}$, $\nu = \overline{1,s}$, то

$$\begin{aligned}\overline{P} &\equiv \max_{\{k^{(\nu)} \in A^n_{n+m_\nu}\}_{\nu=1}^s} P(\theta^{(1)}_{k^{(1)}(1)}, \ldots, \theta^{(1)}_{k^{(1)}(n)}; \ldots; \theta^{(s)}_{k^{(s)}(1)}, \ldots, \theta^{(s)}_{k^{(s)}(n)}) \\ &= P(\theta^{(1)}_{\widehat{k}^{(1)}(1)}, \ldots, \theta^{(1)}_{\widehat{k}^{(1)}(n)}; \ldots; \theta^{(s)}_{\widehat{k}^{(s)}(1)}, \ldots, \theta^{(s)}_{\widehat{k}^{(s)}(n)}),\end{aligned}$$

где A^n_{n+m} – множество размещений из чисел $(1, \ldots, n+m)$ по n.

В наших исследованиях мы ограничиваемся областью непоследовательных задач принятия решения на основании N_ν независимых наблюдений над каждой из с.в. $X_1^{(\nu)}, \ldots, X_{n+m_\nu}^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1,s}$, при этом пространство решений представляет собой всевозможные упорядоченные наборы размещений $(k^{(1)}; \ldots; k^{(s)})$, коль скоро подразумевается, что расположение параметров $\theta_c^{(\nu)}$ на места аргументов функции P осуществляется в соответствии с решением k, а именно, $(\theta^{(1)}_{k^{(1)}(1)}, \ldots, \theta^{(1)}_{k^{(1)}(n)}; \ldots; \theta^{(s)}_{k^{(s)}(1)}, \ldots, \theta^{(s)}_{k^{(s)}(n)})$.

При истинной параметрической точке

$$\theta = (\theta^{(1)}; \ldots; \theta^{(s)}) = (\theta_1^{(1)}, \ldots, \theta^{(1)}_{n+m_1}; \ldots; \theta_1^{(s)}, \ldots, \theta^{(s)}_{n+m_s})$$

и решении

$$k = (k^{(1)}; \ldots; k^{(s)}) = (k^{(1)}(1), \ldots, k^{(1)}(n); \ldots; k^{(s)}(1), \ldots, k^{(s)}(n))$$

естественно взять в качестве функции потерь функцию вида

$$\begin{aligned}&W_{k^{(1)};\ldots;k^{(s)}}(\theta^{(1)}; \ldots; \theta^{(s)}) \\ &= h_{\theta^{(1)};\ldots;\theta^{(s)}}(P(\theta^{(1)}_{k^{(1)}(1)}, \ldots, \theta^{(1)}_{k^{(1)}(n)}; \ldots; \theta^{(s)}_{k^{(s)}(1)}, \ldots, \theta^{(s)}_{k^{(s)}(n)})), \qquad (3)\end{aligned}$$

где $h_{\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)}}(z) \geqslant 0$ как функция от z задана на $(-\infty,\ \overline{P}_\theta]$ и не возрастает там, причем $h_{\theta^{(1)}\Pi^{(1)};\dots;\theta^{(s)}\Pi^{(s)}}(z) = h_{\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)}}(z)$ для всех матриц перестановок $\Pi^{(\nu)}$, $\nu = \overline{1,s}$, размеров $(n+m_\nu)\times(n+m_\nu)$, т.е. индекс у функции h, как и у $\overline{P}$, представляет собой наборы чисел $\{\theta^{(1)}\}_1^{n+m_1}, \dots, \{\theta^{(s)}\}_1^{n+m_s}$. В силу (2) W является перестановочно невозрастающей функцией.

Замечание. Самостоятельное значение приобретает частный случай, когда $h_\theta(z)$ не зависит от θ. Дело в том, что с позиции статистика эта зависимость выглядит непреложной, причем с $h_\theta(\overline{P}_\theta) = 0$. С другой стороны, если максимизируемая целевая функция является, скажем, надежностью технической системы, то потенциальные "потери" для ее пользователя часто вытекают непосредственно из значения надежности системы, скомпонованной по рекомендации статистика, вне зависимости от "ресурсов", которые тот изначально имел в своем распоряжении. В подобных ситуациях, на наш взгляд, следует положить $h_\theta(z) = h(z)$.

В наших обстоятельствах любая решающая функция δ может быть представлена вектор-функцией $\delta(x_1^{(1)}, \dots, x_{n+m_1}^{(1)}; \dots; x_1^{(s)}, \dots, x_{n+m_s}^{(s)})$ с компонентами $\delta_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(x^{(1)};\dots;x^{(s)})$, $k^{(\nu)} \in A^n_{n+m_\nu}$, $\nu = \overline{1,s}$, удовлетворяющими условиям

$$\left.\begin{aligned} \delta_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(x^{(1)};\dots;x^{(s)}) \geqslant 0,\\ \sum_{k^{(1)}\in A^n_{n+m_1}} \cdots \sum_{k^{(s)}\in A^n_{n+m_s}} \delta_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(x^{(1)};\dots;x^{(s)}) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь $\delta_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(x^{(1)};\dots;x^{(s)})$ – вероятность выбора решения $(k^{(1)};\dots;\ k^{(s)})$ при значении вектора

$$x = (x_1^{(1)}, \dots, x_{n+m_1}^{(1)}; \dots; x_1^{(s)}, \dots, x_{n+m_s}^{(s)}),$$

где $x_c^{(\nu)} = x^{(\nu)}(\widetilde{x}_{c1}, \dots, \widetilde{x}_{cN_\nu})$ – достаточные статистики, полученные по наблюдениям $\widetilde{x}_{ci}$ над, соответственно, с.в. $X_c^{(\nu)}$, $c = \overline{1, n+m_\nu}$, $\nu = \overline{1,s}$.

В нашей ситуации, когда все фигурирующие с.в. независимы, при истинных $(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)})$ и при применении решающей функции δ риск определяется выражением

$$r(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)};\delta)=\int\sum_{k^{(1)}\in A^n_{n+m_1}}\dots\sum_{k^{(s)}\in A^n_{n+m_s}}W_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)})$$
$$\times\,\delta_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(x^{(1)};\dots;x^{(s)})\prod_{\nu=1}^{s}\prod_{c=1}^{n+m_\nu}f_\nu(x_c^{(\nu)}|\theta_c^{(\nu)})\,d\zeta_1(x_1^{(1)})\dots d\zeta_s(x^{(s)}_{n+m_s}), \tag{5}$$

где $\zeta_\nu,\ \nu=\overline{1,s}$, – σ-конечные меры, по отношению к которым задаются плотности вероятностей f_ν каждой из достаточных статистик $x_c^{(\nu)}$, $c=\overline{1,n+m_\nu}$.

Будем считать, что плотности f_ν имеют монотонное (неубывающее) отношение правдоподобия, т.е.

$$f_\nu(y_1|\alpha_1)\cdot f_\nu(y_2|\alpha_2)\geqslant f_\nu(y_1|\alpha_2)\cdot f_\nu(y_2|\alpha_1),\quad \nu=\overline{1,s}, \tag{6}$$

при $\alpha_1<\alpha_2$ и $y_1<y_2$.

Напомним, что по определению функция δ_0 является минимаксным решением задачи принятия решения, если

$$\sup_{(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)})\in\Theta_1^{n+m_1}\times\dots\times\Theta_s^{n+m_s}} r(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)};\delta_0)$$
$$\leqslant\sup_{(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)})\in\Theta_1^{n+m_1}\times\dots\times\Theta_s^{n+m_s}} r(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)};\delta)$$

для всех δ.

Пусть $K(x)$ – подмножество $A\equiv A^n_{n+m_1}\times\dots\times A^n_{n+m_s}$, состоящее из таких решений $(k^{(1)};\dots;k^{(s)})$, что для всех $\nu,\ \nu=\overline{1,s}$, и $c^{(\nu)}\neq k^{(\nu)}(i)$, $i=\overline{1,n}$,

$$x^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(1)}\geqslant\dots\geqslant x^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(n)}\geqslant x^{(\nu)}_{c^{(\nu)}}.$$

Будем говорить, что решение $(\widetilde{k}^{(1)};\dots;\widetilde{k}^{(s)})$ эквивалентно решению $(k^{(1)};\dots;k^{(s)})$, если

$$(\widetilde{k}^{(1)}\Pi;\dots;\widetilde{k}^{(s)}\Pi)=(k^{(1)};\dots;k^{(s)})$$

для некоторой $(n\times n)$-матрицы перестановок Π. В силу (1) и (3) эквивалентные решения приводят к одинаковым потерям и, таким образом, $K(x)$ разбивается на совокупности эквивалентных решений (см., например, [8, Доп. 1]). Образуем некоторое подмножество $K_0(x)$ решений из $K(x)$, составленное по одному (любому) представителю от каждой совокупности эквивалентных решений. Обозначим мощность множества $K_0(x)$ через $M(x)$, т.е. $||K_0(x)|| = M(x)$.

Для произвольного подмножества чисел $Z \subset \{1, \dots, s\} \equiv \Omega$ и чисел i и j, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, введем оператор $[Z; i, j]$, действующий на решения таким образом, что решение $[Z; i, j](k^{(1)}; \dots; k^{(s)})$ отличается от решения $(k^{(1)}; \dots; k^{(s)})$ только тем, что меняются местами числа $k_i^{(\nu)}$ и $k_j^{(\nu)}$ для всех $\nu \in Z$.

Теорема 1. *Предположим, что наряду с условиями* (3), (1), (2) *и* (6) *при $s \geqslant 3$ выполняется дополнительное условие для функции потерь: для любых параметров, решений и чисел i, j, $1 \leqslant i$, $j \leqslant n$, таких, что*

$$\theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(i)} \geqslant \theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(j)}, \quad \nu = \overline{1, s}, \tag{7}$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\sum_{G \subset Y} W_{[G;i,j](k^{(1)};\dots;k^{(s)})}(\theta^{(1)}; \dots; \theta^{(s)}) \\ &\leqslant \sum_{G \subset Y} W_{[G \cup Z;i,j](k^{(1)};\dots;k^{(s)})}(\theta^{(1)}; \dots; \theta^{(s)}) \end{aligned} \tag{8}$$

для любых $Y, Z \subset \Omega$, $Y \cap Z = \varnothing$. Тогда

а) *Минимаксным решением является вектор-функция $\delta_0(x)$ с координатами*

$$\delta_{k_0^{(1)};\dots;k_0^{(s)}}(x^{(1)}; \dots; x^{(s)}) = \begin{cases} \frac{1}{M(x)}, & (k_0^{(1)}; \dots; k_0^{(s)}) \in K_0(x) \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{9}$$

б) *При соблюдении принципа инвариантности (см.* [7, 8]*) решающая функция $\delta_0(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$r(\theta^{(1)}; \dots; \theta^{(s)}; \delta_0) \leqslant r(\theta^{(1)}; \dots; \theta^{(s)}; \delta)$$

для любых $\theta^{(1)}; \dots; \theta^{(s)}$ и δ.

Замечание 1. При $s = 2$ условие (7)–(8) автоматически выполняется в силу (3), (1) и (2).

Замечание 2. Полагая в (8) $Y = \varnothing$, получаем, что функция потерь W перестановочно невозрастающая.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить для любого решения δ справедливость неравенства:

$$\sum_{\substack{\pi_{(1)}\in S_{n+m_1},\dots,\\ \pi_{(s)}\in S_{n+m_s}}} r(\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(1)},\dots,\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(n+m_1)};\dots;\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(1)},\dots,\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(n+m_s)};\ \delta_0)$$
$$\leqslant \sum_{\substack{\pi_{(1)}\in S_{n+m_1},\dots,\\ \pi_{(s)}\in S_{n+m_s}}} r(\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(1)},\dots,\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(n+m_1)};\dots;\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(1)},\dots,\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(n+m_s)};\ \delta), \tag{10}$$

где S_n – множество перестановок чисел $(1,\dots,n)$. В отношении части б) теоремы это следует из леммы 1 в [7], а часть а) непосредственно вытекает из части б), так как группа, являющаяся прямым произведением групп перестановок, конечна (см., например, [14, 4.3]).

В свою очередь, справедливость (10) будет установлена, если доказать, что для любого решения $(k^{(1)};\dots;k^{(s)})$ и $(k_0^{(1)};\dots;k_0^{(s)})\in K_0(x)$

$$\Phi(k_0^{(1)};\dots;k_0^{(s)}) \leqslant \Phi(k^{(1)};\dots;k^{(s)}), \tag{11}$$

где, принимая во внимание (3),

$$\begin{aligned}
&\Phi(k^{(1)};\dots;k^{(s)})\\
&= \sum_{\pi_{(1)}\in S_{n+m_1},\dots,\pi_{(s)}\in S_{n+m_s}} W_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(1)},\dots,\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(n+m_1)};\\
&\quad\dots;\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(1)},\dots,\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(n+m_s)}) \prod_{\nu=1}^{s}\prod_{c=1}^{n+m_\nu} f_\nu(x_c^{(\nu)}|\theta^{(\nu)}_{\pi_{(\nu)}^{-1}(c)})\\
&= \sum_{\pi_{(1)}\in S_{n+m_1},\dots,\pi_{(s)}\in S_{n+m_s}} h_\theta(P(\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(k^{(1)}(1))},\dots,\theta_{\pi_{(1)}^{-1}(k^{(1)}(n))};\\
&\quad\dots;\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(k^{(s)}(1))},\dots,\theta_{\pi_{(s)}^{-1}(k^{(s)}(n))})) \prod_{\nu=1}^{s}\prod_{c=1}^{n+m_\nu} f_\nu(x_c^{(\nu)}|\theta^{(\nu)}_{\pi_{(\nu)}^{-1}(c)}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Действительно, отсюда, учитывая (4), получим

$$\int \sum_{k_0\in K_0} \delta^*_{k_0^{(1)};\dots;k_0^{(s)}}(x^{(1)};\dots;x^{(s)})\Phi(k_0^{(1)};\dots;k_0^{(s)})\ d\zeta_1(x_1^{(1)})\dots d\zeta_s(x^{(s)}_{n+m_s})$$
$$\leqslant \int \sum_{k\in A} \delta_{k^{(1)};\dots;k^{(s)}}(x^{(1)};\dots;x^{(s)})\Phi(k^{(1)};\dots;k^{(s)})\ d\zeta_1(x_1^{(1)})\dots d\zeta_s(x^{(s)}_{n+m_s}) \tag{13}$$

для любой решающей функции δ. Здесь решающая функция δ^* произвольная, но $\delta^*_k(x) = 0$ для $k \notin K_0(x)$ (выбор конкретного "дробления" (9) предопределяется требованием инвариантности для оптимальной решающей функции δ_0). Согласно (5), неравенство (13) как раз и приводит к (10) за счет перемены очередности суммирований и интегрирования.

Таким образом, для доказательства теоремы остается установить неравенство (11) с учетом (12). Поскольку в (12) перебираются все перестановки параметров, то не ограничивая общности, будем доказывать (11) в предположении

$$\theta_1^{(\nu)} \geqslant \ldots \geqslant \theta_{n+m_\nu}^{(\nu)}, \quad \nu = \overline{1,s}, \tag{14}$$

$$x_1^{(\nu)} \geqslant \ldots \geqslant x_{n+m_\nu}^{(\nu)}, \quad \nu = \overline{1,s}. \tag{15}$$

При этих условиях нужно показать, что во-первых, для любого ν с $m_\nu > 0$ функция Φ – неубывающая по каждому аргументу $k_c^{(\nu)}$, $c = \overline{1,n}$, и во-вторых, что Φ является перестановочно невозрастающей функцией. Дело в том, что от любого решения $(k^{(1)}; \ldots ; k^{(s)})$ за конечное число шагов, соответствующих монотонности Φ или принадлежности ее к перестановочно невозрастающим функциям, можно прийти к искомому решению $(1, \ldots , n; \ldots ; 1, \ldots , n)$.

Принимая во внимание монотонность функций P и h, мы можем получить монотонность Φ такими же рассуждениями, какие были использованы в [7] для доказательства теоремы Бахадура–Гудмана. Для того, чтобы доказать принадлежность Φ к перестановочно невозрастающим функциям, прежде всего заметим, что в силу (1)

$$\Phi(k^{(1)}\Pi; \ldots ; k^{(s)}\Pi) = \Phi(k^{(1)}; \ldots ; k^{(s)}),$$

поскольку каждое слагаемое в (12) перестановочно инвариантно. Далее разобьем при фиксированных i и j, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, все слагаемые в (12) на множества по 2^s слагаемых в каждом, порождаемые такими наборами из s перестановок $\pi = (\pi_{(1)}; \ldots ; \pi_{(s)})$, что

$$\pi_{(\nu)}^{-1}(\widehat{k}^{(\nu)}(i)) < \pi_{(\nu)}^{-1}(\widehat{k}^{(\nu)}(j)), \quad \nu = \overline{1,s}, \tag{16}$$

где $\widehat{k}_i^{(\nu)} = \min(k_i^{(\nu)}, k_j^{(\nu)})$, $\widehat{k}_j^{(\nu)} = \max(k_i^{(\nu)}, k_j^{(\nu)})$.

Вместе с каждым набором перестановок π в одно множество разбиения включаются такие наборы перестановок $\widetilde{\pi}$, что

$$\widetilde{\pi}^{-1}\widehat{k} = [G; i, j](\pi^{-1}\widehat{k}), \quad \forall G \subset \Omega, \tag{17}$$

где предусмотрена запись

$$\pi^{-1}k = \left(\pi_{(1)}^{-1}(k^{(1)}(1)), \dots, \pi_{(1)}^{-1}(k^{(1)}(n)); \dots; \pi_{(s)}^{-1}(k^{(s)}(1)), \dots, \pi_{(s)}^{-1}(k^{(s)}(n))\right).$$

Для произвольного $D \subset \Omega$ возьмем k такое, что $k = [D; i, j]\widehat{k}$.

Наша цель – показать, что для решения $(\widehat{k}^{(1)}; \dots; \widehat{k}^{(s)})$ каждые такие 2^s слагаемых в (12) составляют сумму, которая не превосходит соответствующей суммы для решения $(k^{(1)}; \dots; k^{(s)})$. Введем обозначения для $\nu = \overline{1, s}$:

$$a_1^{(\nu)} = f_\nu(x^{(\nu)}_{\widehat{k}^{(\nu)}(i)} | \theta^{(\nu)}_{\pi_{(\nu)}^{-1}(\widehat{k}^{(\nu)}(i))}) \cdot f_\nu(x^{(\nu)}_{\widehat{k}^{(\nu)}(j)} | \theta^{(\nu)}_{\pi_{(\nu)}^{-1}(\widehat{k}^{(\nu)}(j))}),$$
$$a_2^{(\nu)} = f_\nu(x^{(\nu)}_{\widehat{k}^{(\nu)}(i)} | \theta^{(\nu)}_{\pi_{(\nu)}^{-1}(\widehat{k}^{(\nu)}(j))}) \cdot f_\nu(x^{(\nu)}_{\widehat{k}^{(\nu)}(j)} | \theta^{(\nu)}_{\pi_{(\nu)}^{-1}(\widehat{k}^{(\nu)}(i))})$$

и заметим, принимая во внимание (14), (15), (16) и (6), что $a_1^{(\nu)} \geqslant a_2^{(\nu)} \geqslant 0$.

Поскольку вышеупомянутые множества по 2^s слагаемых не пересекаются и в то же время исчерпывают все слагаемые в (12), то для доказательства принадлежности Φ к перестановочно невозрастающим функциям, а значит и теоремы, предстоит доказать неравенство

$$\begin{aligned}&\sum_{G \subset \Omega} W_{[G; i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta) \prod_{\nu \in \overline{G}} a_1^{(\nu)} \prod_{\nu \in G} a_2^{(\nu)} \\ &\leqslant \sum_{G \subset \Omega} W_{[G \Delta D; i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta) \prod_{\nu \in \overline{G}} a_1^{(\nu)} \prod_{\nu \in G} a_2^{(\nu)},\end{aligned} \tag{18}$$

где $\overline{G} = \Omega \setminus G$, а $G \Delta D$ обозначает симметрическую разность

$$G \Delta D = (G \setminus D) \cup (D \setminus G) = (G \cup D) \setminus (G \cap D).$$

Для доказательства этого неравенства понадобится

Лемма 1. *Пусть на элементах ν конечного множества Ω задана функция $a(\nu)$ такая, что*

$$0 \leqslant a(\nu) \leqslant 1, \tag{19}$$

а на его подмножествах G задана функция $F(G)$ такая, что

$$\sum_{G \subset A} F(G) \geqslant 0 \tag{20}$$

для любого подмножества $A \subset \Omega$. Тогда для любого подмножества $A' \subset \Omega$

$$\sum_{G \subset A'} \left\{ F(G) \prod_{\nu \in G} a(\nu) \right\} \geqslant 0, \tag{21}$$

где подразумевается $\prod\limits_{\nu \in \varnothing} a(\nu) = 1$.

Доказательство. Обозначим через s мощность Ω, $||\Omega|| = s$, и зафиксируем на подмножествах Ω произвольную функцию, удовлетворяющую (20). Проведем индукцию по мощности подмножества A', где i-е предположение, $i = 0, 1, \ldots, s$, состоит в том, что $\forall A^*, ||A^*|| = i$, и $\forall$ функции $a(\nu)$, удовлетворяющей (19), выполняется (21). При $i = 0$ требуемое неравенство $F(\varnothing) \geqslant 0$ следует непосредственно из (20) с $A = \varnothing$. Пусть предположение верно для некоторого i, $0 \leqslant i < s$, но неверно для $i + 1$. Тогда $\exists A^*, ||A^*|| = i + 1$, и $\exists a(\nu)$, $0 \leqslant a(\nu) \leqslant 1$, для которых (21) не выполняется.

Возьмем произвольный элемент $\alpha \in A^*$ и пусть $B = A^* \setminus \alpha$. Тогда

$$\sum_{G \subset A^*} \left\{ F(G) \prod_{\nu \in G} a(\nu) \right\} = \sum_{G \subset B} \left\{ F(G) \prod_{\nu \in G} a(\nu) + F(G \cup \alpha) \prod_{\nu \in G \cup \alpha} a(\nu) \right\}$$
$$= \sum_{G \subset B} \left\{ F(G) \prod_{\nu \in G} a(\nu) \right\} + a(\alpha) \sum_{G \subset B} \left\{ F(G \cup \alpha) \prod_{\nu \in G} a(\nu) \right\} < 0.$$

По индукционному предположению первая сумма (Σ) в последней строчке неотрицательна. Следовательно, вторая сумма отрицательна, а поскольку обе суммы не содержат $a(\alpha)$, то все выражение будет тем более отрицательным, если заменить $a(\alpha)$ на 1. Рассмотрим снова подмножество A^*, проведя аналогичные рассуждения с другим элементом $\beta \in A^*$ при тех же $a(\nu)$ за исключением $a(\alpha) = 1$, и заменим теперь $a(\beta)$ на 1. Перебрав последовательно все $i+1$ элементов подмножества A^*, приходим к неравенству

$$\sum_{G\subset A^*} F(G) < 0,$$

которое противоречит (20). $\square$

Эту лемму мы будем использовать с $A' = \Omega$,

$$F(G) = W_{[G\Delta D;i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta) - W_{[G;i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta)$$

и $a(\nu) = a_2^{(\nu)}/a_1^{(\nu)}$. При этом учтем, что если $a_1^{(\nu)} = 0$ хотя бы при одном $\nu \in \Omega$, то обе части (18) равны нулю, так как $0 \leqslant a_2^{(\nu)} \leqslant a_1^{(\nu)}$. В противном случае разделим обе части (18) на $\Pi_{\nu\in\Omega} a_1^{(\nu)}$. Тогда согласно лемме остается установить, что для любого $Y \subset \Omega$

$$\sum_{G\subset Y} W_{[G;i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta) \leqslant \sum_{G\subset Y} W_{[G\Delta D;i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta).$$

Покажем, что с учетом (16) и (14) это неравенство эквивалентно (8). Действительно, обозначим $D_1 = Y\cap D$, $D_2 = \overline{Y}\cap D$ и заметим, что для любого $G' \subset Y$ из соотношения $G\Delta D_1 = G'$ следует $G = G'\Delta D_1$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned}\sum_{G\subset Y} W_{[G\Delta D;i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta) &= \sum_{G\subset Y} W_{[(G\Delta D_1)\cup D_2;i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta)\\ &= \sum_{G'\subset Y} W_{[G'\cup D_2;i,j](\pi^{-1}\widehat{k})}(\theta).\end{aligned}$$

Следствие 1. *Утверждение теоремы* 1 *остается справедливым при следующем видоизменении (одновременно) двух ее условий*:
i) *Для тех* ν, *для которых* $m_\nu > 0$, P *является невозрастающей функцией по каждому аргументу* $\eta_c^{(\nu)}$, $c = \overline{1,n}$;
ii) *Функции* f_ν *обладают монотонным по* $-x$ *отношением правдоподобия, т.е. все неравенства* (6) *заменяются на обратные.*

Доказательство. Возьмем произвольную строго убывающую функцию $g(\cdot)$ и будем под символом $\widetilde{\omega} = g(\omega)$ понимать вектор, полученный применением функции g к каждой координате вектора ω. Тогда функция $\widetilde{P}(\widetilde{\eta}) = P(g^{-1}(\widetilde{\eta}))$ является неубывающей по каждому аргументу $\widetilde{\eta}_c^{(\nu)}$, $c = \overline{1,n}$, с $m_\nu > 0$, а $\widetilde{f}_\nu(x|\widetilde{\theta}_c^{(\nu)}) = f_\nu(x|g^{-1}(\widetilde{\theta}_c^{(\nu)}))$ удовлетворяют (6). Кроме того, функция $\widetilde{P}$, как и P, является перестановочно неубывающей в силу монотонности функции g. Тогда оказывается, что для функции

$$\widetilde{W}_k(\widetilde{\theta}) = W_k(g^{-1}(\widetilde{\theta})) = W_k(\theta) \tag{22}$$

выполняются все условия теоремы 1, если поменять ролями i и j и учесть, что $[G;i,j]k = [G;j,i]k$ для любых G и k. Теперь остается заметить, что соответствующие риски (5) совпадают при совпадении решений, поскольку помимо (22) мы имеем равенства $\widetilde{f}_\nu(x|\widetilde{\theta}_c^{(\nu)}) = f_\nu(x|\theta_c^{(\nu)})$, $\nu = \overline{1,s}$.

Замечание. Следствие 1, в частности, означает, что если $m_\nu = 0$, $\nu = \overline{1,s}$, то утверждение теоремы 1 сохраняется при замене неравенств (6) на обратные при всех ν.

Следствие 2. *Теорема* 1 *и следствие* 1 *остаются в силе, если условие* (8) *заменить на*

$$\begin{aligned} &W_{[Y_1;i,j](k^{(1)};\dots;k^{(s)})}(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)}) + W_{[Y_2;i,j](k^{(1)};\dots;k^{(s)})}(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)}) \\ &\leqslant W_{[Y_1\cup Z;i,j](k^{(1)};\dots;k^{(s)})}(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)}) + W_{[Y_2\cup Z;i,j](k^{(1)};\dots;k^{(s)})}(\theta^{(1)};\dots;\theta^{(s)}) \end{aligned} \tag{23}$$

для любых попарно не пересекающихся $Y_1, Y_2, Z \subset \Omega$.

Действительно, если в неравенстве (23) положить $Y_1 = G$, $Y_2 = Y \setminus G$, то просуммировав обе его части по всем $G \subset Y$, получим удвоенные части неравенства (8).

Замечание. Легко проверяется, что при $s = 3$ условия (8) и (23) совпадают.

Следствие 3. *Предположим, что выполняются* (3), (1), (2), (6) *и функция потерь* W *имеет вид*

$$\begin{aligned} &W_{k^{(1)}(1),\dots,k^{(1)}(n);\dots;k^{(s)}(1),\dots,k^{(s)}(n)}(\theta_1^{(1)},\dots,\theta_{n+m_1}^{(1)};\dots;\theta_1^{(s)},\dots,\theta_{n+m_s}^{(s)}) \\ &= L_\theta\Big(\sum_{\nu=1}^{s}\theta_{k^{(\nu)}(1)}^{(\nu)}, \quad \sum_{\nu=1}^{s}\theta_{k^{(\nu)}(2)}^{(\nu)},\dots,\sum_{\nu=1}^{s}\theta_{k^{(\nu)}(n)}^{(\nu)}\Big), \end{aligned} \tag{24}$$

где $L_\theta(v_1,\dots,v_n)$, *будучи согласно* (1) *симметрической функцией, при* $s \geqslant 3$ *такова, что функция* $L_\theta(v_1, V-v_1, v_3,\dots,v_n)$ *вогнута по* v_1. *Тогда при* (7) *справедливо* (23), *а с ним и утверждение теоремы* 1.

Замечание. При $s \geqslant 2$ $L_\theta(v_1,\dots,v_n)$ как функция от сумм одноименных координат является, согласно [2], вогнутой по Шуру, так как W – перестановочно невозрастающая функция.

Доказательство. Поскольку функция L симметрическая, то можем ограничиться рассмотрением выражения

$$W_{[Y;1,2]k}(\theta) = L_\theta\left(\sum_{\nu\in\overline{Y}}\theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(1)} + \sum_{\nu\in Y}\theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(2)},\right.$$
$$\left.\sum_{\nu\in\overline{Y}}\theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(2)} + \sum_{\nu\in Y}\theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(1)},\dots,\sum_{\nu=1}^{s}\theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(n)}\right).$$

Пусть

$$\overline{\ell} = \sum_{\nu=1}^{s}(\theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(1)} + \theta^{(\nu)}_{k^{(\nu)}(2)})/2.$$

Тогда в силу вышеуказанных свойств функции L функция

$$\widetilde{L}(v) = L_\theta(\overline{\ell}+v,\ \overline{\ell}-v, v_3,\dots,v_n)$$

является четной и вогнутой, а неравенство (23) становится эквивалентным неравенству

$$\widetilde{L}(\overline{\ell}-\Delta_1) + \widetilde{L}(\overline{\ell}-\Delta_2) \leqslant \widetilde{L}(\overline{\ell}-\Delta_1-\Delta) + \widetilde{L}(\overline{\ell}-\Delta_2-\Delta) \tag{25}$$

при $\Delta, \Delta_1, \Delta_2 \geqslant 0$, и поскольку Y_1, Y_2, Z попарно не пересекаются, то

$$\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 \leqslant 2\overline{\ell}. \tag{26}$$

Принимая во внимание четность функции $\widetilde{L}$, неравенство (25) можно представить в виде

$$\widetilde{L}(\overline{\ell}-\Delta_1) - \widetilde{L}(\overline{\ell}-\Delta_1-\Delta) \leqslant \widetilde{L}(-\overline{\ell}+\Delta_2+\Delta) - \widetilde{L}(-\overline{\ell}+\Delta_2),$$

что эквивалентно вогнутости функции $\widetilde{L}$ (см., например, [9, 16.B.3.a]), поскольку согласно (26) $\overline{\ell}-\Delta_1 \geqslant -\overline{\ell}+\Delta_2+\Delta$.

Замечание. Поскольку этот вывод базируется на следствии 2, то следствие 3 также справедливо, когда при $m_\nu > 0$ P не возрастает по $\eta_c^{(\nu)}$ и при этом все неравенства (6) изменены на обратные.

Следствием теоремы 1 является также

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия* (3), (1), (2), *а также* (6), *если (при* $m_\nu > 0$*) функция* P *не убывает по* $\eta_c^{(\nu)}$, *или неравенства обратные* (6), *если* P *не возрастает по* $\eta_c^{(\nu)}$. *Пусть, кроме того, функция* P *имеет вид*

$$P(\eta_1^{(1)},\dots,\eta_n^{(1)};\dots;\eta_1^{(s)},\dots,\eta_n^{(s)}) = L\left(\sum_{\nu=1}^{s}\eta_1^{(\nu)},\dots,\sum_{\nu=1}^{s}\eta_n^{(\nu)}\right),$$

причем $L(v_1, V-v_1, v_3,\dots,v_n)$ *при* $s \geqslant 3$ – *выпуклая по* v_1 *функция, а* $h_\theta(z)$ *из* (3) – *(невозрастающая) вогнутая функция; в частности, если* L *обладает непрерывными производными второго порядка, то предполагается, что*

$$L''_{v_1^2} \;-\; 2L''_{v_1v_2} \;+\; L''_{v_2^2} \;\geqslant\; 0. \tag{27}$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Замечание 1. Поскольку при $s \geqslant 3$ по существу требуется выпуклость функции L на прямой $v_1 + v_2 = V$ (т.е. выпуклость, так сказать, второго порядка по Шуру от двух координат), то вместо L можно проверять условие типа (27) для функции $q_1(v_1+v_2) + q_2(v_1+v_2)\cdot L$, где функция $q_2 \geqslant 0$.

Замечание 2. Легко видеть, с учетом [9, 3.A.5], что симметрическая функция “выпуклая второго порядка по Шуру от двух координат” является выпуклой по Шуру.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из следствия 3 теоремы 1 и замечания к его доказательству, если принять во внимание (3) и то, что невозрастающая вогнутая функция от выпуклой функции является вогнутой (см.,например, [9, 16.B.7]). Что касается соотношения (27), то к нему приходим стандартным образом, учитывая, что

$$L''_{v_1^2}(v_1, V-v_1, v_3,\dots,v_n) = L''_{v_1^2} - 2L''_{v_1v_2} + L''_{v_2^2}|_{(v_1,V-v_1,v_3,\dots,v_n)}.$$

Пусть теперь $X_1,\dots,X_{sn+m}$ суть $sn+m$ независимых действительных с.в., функции распределений которых могут отличаться только (неизвестным) значением параметра θ_c, $c=\overline{1,sn+m}$, из множества $\Theta \subseteq R^1$. На Θ^{sn} рассмотрим функцию

$$P(\eta_1,\dots,\eta_n;\eta_{n+1},\dots,\eta_{2n};\dots;\eta_{(s-1)n+1},\dots,\eta_{sn}),$$

удовлетворяющую (1) и (2), где

$$\eta_c^{(\nu)} = \eta_{(\nu-1)n+c}, \quad c = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{1,s}. \tag{28}$$

Если $m > 0$, то дополнительно полагаем, что P – неубывающая функция по каждому аргументу.

Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{sn})$. Для любых $\mu, \nu = \overline{1,s}$, $i = \overline{1,n}$ обозначим через $[\mu,\nu;i]\eta$ вектор-аргумент, отличающийся от η только тем, что меняются местами $\eta_{(\mu-1)n+i}$ и $\eta_{(\nu-1)n+i}$, иначе говоря, $\eta_i^{(\nu)}$ и $\eta_i^{(\mu)}$. Предполагается, что

$$P\left([\mu,\nu;i]\eta\right) = P(\eta) \tag{29}$$

и что мы вправе разместить θ_c, $c = \overline{1, sn+m}$, по позициям всех sn аргументов функции P.

Таким образом, пространство решений представляет собой всевозможные размещения $k \in A_{sn+m}^{sn}$, в соответствии с которыми осуществляется подстановка параметров θ_c на места аргументов функции P, а именно $(\theta_{k(1)}, \dots, \theta_{k(sn)})$. При этом естественно в (3) положить $h = h_{\{\theta\}_1^{sn+m}}(z)$.

Решения принимаются на основании вектора достаточных статистик $x = (x_1, \dots, x_{sn+m})$, полученных по N наблюдениям над каждой из с.в. X_c, $c = \overline{1, sn+m}$.

Обозначим через $\widetilde{K}(x)$ подмножество A_{sn+m}^{sn}, состоящее из таких решений k, что для любого $c \neq k(i)$, $i = \overline{1, sn}$,

$$x_{k(1)} \geqslant \dots \geqslant x_{k(sn)} \geqslant x_c.$$

Будем говорить, что два решения k' и $\widetilde{k}'$ эквивалентны, если одно из другого можно получить за конечное число шагов, отвечающих следующим равенствам:

i)

$$(\widetilde{k}^{(1)}\Pi; \dots; \widetilde{k}^{(s)}\Pi) = (k^{(1)}; \dots; k^{(s)}),$$

для некоторой $(n \times n)$-матрицы перестановок Π, если принять

$$k^{(\nu)}(i) = k((\nu-1)n+i), \quad i = \overline{1,n}, \quad \nu = \overline{1,s}, \tag{30}$$

аналогично для $\widetilde{k}$;

ii) $k^{(\mu)}(i) = \widetilde{k}^{(\nu)}(i)$, $k^{(\nu)}(i) = \widetilde{k}^{(\mu)}(i)$ для некоторых μ, ν, i и $k(c) = \widetilde{k}(c)$ для $c \neq (\mu-1)n+i, (\nu-1)n+i$.

Легко видеть, что таким образом $\widetilde{K}(x)$ разбивается на совокупности эквивалентных решений, поскольку в силу (1), (3) и (29) они приводят к одинаковым потерям. Образуем некоторое подмножество K' решений из $\widetilde{K}$, составленное по одному (любому) представителю из каждой совокупности эквивалентных решений. Обозначим $||K'|| = \widetilde{M}(x)$.

Тогда в предположении монотонного отношения правдоподобия для семейства плотностей f, которому принадлежат достаточные статистики x_c, $c = \overline{1, sn+m}$, и при выполнении условия (7)–(8) справедлив аналог теоремы 1.

Теорема 3. а) *Минимаксным решением является вектор-функция $\delta_0(x)$ с координатами*

$$\delta_{k_0}(x) = \frac{1}{\widetilde{M}(x)}$$

для k_0, которые могут быть представлены в виде

$$k_0(c) = k'(s[c-1-(\nu-1)n]+\nu) \quad \text{для} \ \ c = \overline{(\nu-1)n+1,\ \nu n},\ \nu = \overline{1, s}, \tag{31}$$

где $k' \in K'$. Соответственно, $\delta_k(x) = 0$ для остальных k.

б) *При соблюдении принципа инвариантности решающая функция $\delta_0(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$r(\theta; \delta_0) \leqslant r(\theta; \delta)$$

для любых θ и δ.

Доказательство теоремы 3 по существу повторяет доказательство теоремы 1, только нужно учесть, что из (29) непосредственно вытекает соотношение

$$\Phi(k^{(1)}; \ldots ; k^{(s)}) = \Phi(\widetilde{k}^{(1)}; \ldots ; \widetilde{k}^{(s)}) \tag{32}$$

при выполнении ii). Доказательство того, что Φ является перестановочно невозрастающей функцией, несколько видоизменяется. Прежде всего условия (14) и (15) должны выглядеть так:

$$\theta_1 \geqslant \cdots \geqslant \theta_{sn+m}, \quad x_1 \geqslant \cdots \geqslant x_{sn+m},$$

а (12) заменяется на

$$\Phi(k^{(1)};\dots;k^{(s)}) = \sum_{\pi\in S_{sn+m}} h_\theta(P(\theta_{\pi^{-1}(k^{(1)}(1))},\dots,\theta_{\pi^{-1}(k^{(1)}(n))};$$
$$\dots;\theta_{\pi^{-1}(k^{(s)}(1))},\dots,\theta_{\pi^{-1}(k^{(s)}(n))}))\prod_{c=1}^{sn+m} f(x_c|\theta_{\pi^{-1}(c)}),$$

если принять во внимание (30).

Множества по 2^s слагаемых формируются подобно (16) и (17), но в роли перестановок $\pi_{(\nu)}$, $\nu=\overline{1,s}$, должны быть s частей перестановки π, где $\pi_{(\nu)}$, $\nu=\overline{1,s-1}$, является частью $(sn+m)$-мерного перестановочного вектора π, которая состоит из координат $\widehat{k}^{(\nu)}(1),\dots,\widehat{k}^{(\nu)}(n)$, а $\pi_{(s)}$ состоит из остальных $n+m$ координат. Дальнейшее сохраняется с заменой $x^{(\nu)}_{\dots}$ на $x_{\dots}$, $\theta^{(\nu)}_{\dots}$ на $\theta_{\dots}$ и $f^{(\nu)}$ на f.

Поскольку от любого решения за конечное число шагов, соответствующих монотонности, симметричности (типа (32)) и принадлежности Φ к перестановочно невозрастающим функциям, можно прийти к решению $(1,s+1,\dots,s(n-1)+1;2,s+2,\dots,s(n-1)+2;\dots;s,2s,\dots,ns)$, то этим и предопределяется (31).

Назовем функцию, обладающую свойством (29), *покоординатно симметрической* и сформулируем легко проверяемое предложение, родственное предложению 2.5.c в [2].

Предложение 1. *Если функция*

$$P(\eta^{(1)};\dots;\eta^{(s)}) = \Pi_{i=1}^n\varphi(\eta_i^{(1)},\dots,\eta_i^{(s)}),$$

где $\varphi>0$, *то она является покоординатно симметрической перестановочно неубывающей тогда и только тогда, когда* φ *– симметрическая многомерная вполне положительная функция порядка 2.*

Разумеется, справедливы также аналоги следствий 1–3 теоремы 1 и аналог теоремы 2. Сформулируем только аналог теоремы 2, поскольку он будет использован в разделе 3.

Теорема 4. *Предположим, что выполняются условия* (3), (1), (2), (29), *а также* (6), *если (при* $m>0$*) функция* P *не убывает по* η_c, *или неравенство обратное* (6), *если* P *не возрастает по* η_c. *Пусть, кроме* *того, функция P имеет вид*

$$P(\eta_1,\dots,\eta_n;\eta_{n+1},\dots,\eta_{2n};\dots;\eta_{(s-1)n+1},\dots,\eta_{sn})$$
$$= L\left(\sum_{\nu=1}^{s}\eta_{(\nu-1)n+1},\sum_{\nu=1}^{s}\eta_{(\nu-1)n+2},\dots,\sum_{\nu=1}^{s}\eta_{\nu n}\right), \tag{33}$$

причем $L(v_1,V-v_1,v_3,\dots,v_n)$ при $s\geqslant 3$ – выпуклая по v_1 функция, а $h_\theta(z)$ из (3) *– (невозрастающая) вогнутая функция; в частности, если L обладает непрерывными производными второго порядка, то должно выполняться* (27).

Тогда справедливо утверждение теоремы 3.

Замечание. В условии (27) L может быть заменена на функцию вида $q_1(v_1+v_2)+q_2(v_1+v_2)\cdot L$, где $q_2\geqslant 0$.

3. Применение к надежности систем

В последующих примерах мы заинтересованы в достижении системой как можно более высокой надежности за произвольное фиксированное время t_0.

а) Рассмотрим параллельно-последовательную систему, т.е. параллельное соединение (в режиме ненагруженного резервирования) n последовательных подсистем. Поскольку ν-е, $\nu=\overline{1,s}$, компоненты всех подсистем призваны выполнять одну и ту же ν-ю операцию, то предполагается, что на n позиций ν-х компонент могут быть поставлены любые из $n+m_\nu$ элементов, способных выполнить ν-ю операцию, по результатам их испытаний на надежность. Будем считать, что время до отказа каждого элемента (и значит каждой компоненты системы после размещения в ней элементов) распределено по экспоненциальному закону, и пусть $\lambda_c^{(\nu)}$ – интенсивность отказов ν-й компоненты c-й подсистемы, $c=\overline{1,n}$.

Функция надежности такой системы может быть записана в следующем виде

$$P_{t_0}(\lambda_1^{(1)},\dots,\lambda_n^{(1)};\dots;\lambda_1^{(s)},\dots,\lambda_n^{(s)})=L_{t_0}(\Lambda_1,\dots,\Lambda_n)$$
$$=1-\int_0^{t_0}(1-Q(\Lambda_1,\Lambda_2;t_0-t))F_t'\,dt, \tag{34}$$

где $\Lambda_c = \sum\limits_{\nu=1}^{s} \lambda_c^{(\nu)}$, $c = \overline{1,n}$; $F = F(\Lambda_3, \dots, \Lambda_n;\ t)$ – функция распределения времени до отказа системы, представляющей собой параллельное соединение всех последовательных подсистем, кроме первых двух;

$$Q(\Lambda_1, \Lambda_2; \tau) = \frac{\Lambda_1 \tau e^{-\Lambda_2 \tau} - \Lambda_2 \tau e^{-\Lambda_1 \tau}}{\Lambda_1 \tau - \Lambda_2 \tau}.$$

Мы предполагаем воспользоваться теоремой 2, для чего необходимо показать, принимая во внимание замечание 1 к этой теореме с $q_2 = \exp((\Lambda_1 + \Lambda_2)\tau)$, что для функции

$$\rho(a, b) = \frac{ae^a - be^b}{a - b}$$

выполняется неравенство

$$\rho''_{a^2} - 2\rho''_{ab} + \rho''_{b^2} \geqslant 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\rho''_{a^2} &= \left(\frac{a^2e^a - abe^a - be^a + be^b}{(a-b)^2} \right)'_a \\
&= \frac{a^3e^a - 2a^2be^a - 2abe^a + ab^2e^a + 2b^2e^a - 2be^b}{(a-b)^3}; \\
\rho''_{ab} &= \frac{a^2e^a - ae^a + ae^b + abe^b - be^a + be^b - b^2e^b - abe^a}{(a-b)^3}; \\
\rho''_{b^2} &= \frac{-b^3e^b + 2ab^2e^b + 2abe^b - a^2be^b - 2a^2e^b + 2ae^a}{(a-b)^3}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\rho''_{a^2} - 2\rho''_{ab} + \rho''_{b^2} \\
&= \frac{(a-b)^2(ae^a - be^b) - 2(a^2 - b^2)(e^a + e^b) + 4(a+b)(e^a - e^b)}{(a-b)^3}.
\end{aligned}$$

Поскольку правая часть является симметрической функцией, то остается показать, что ее числитель положителен при $a > b > 0$. Обозначим числитель через $\varphi(a, b)$. Имеем $\varphi(b, b) = 0$ и вычислим $\varphi'_a(a, b)$:

$$\begin{aligned}
\varphi'_a = {}& 2(a-b)(ae^a - be^b) + (a-b)^2(e^a + ae^a) - 4ae^b \\
& - 2(a^2 - b^2)e^a + 4(e^a - e^b) + 4be^a.
\end{aligned}$$

Заметим, что $\varphi'_a(b,b)=0$, и покажем, что $\varphi''_{a^2}(a,b)\geqslant 0$ при $a>b>0$:

$$\begin{aligned}
\varphi''_{a^2} &= 2ae^a - 2be^b + 4(a-b)(e^a+ae^a) + (a-b)^2(2e^a+ae^a)\\
&- 2(a^2-b^2)e^a + 4e^a + 4be^a - 4e^b\\
&+ (a-b)(4ae^a + (a-b)(2e^a+ae^a) - 2(a+b)e^a)\\
&= [2ae^a - 2be^b] + [4(a-b)ae^a - 2(a^2-b^2)e^a] + [4e^a - 4e^b]\\
&+ (a-b)^2(e^a+ae^a) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы убедились, что для Q выполняется условие (27). Из (34) легко следует, что тогда оно справедливо для L_{t_0}. Теперь учтем, что функция надежности P_{t_0}, как следует из [11] и [2], является перестановочно неубывающей, и предположим, что испытанию на наработку до отказа подвергаются по N_ν, $\nu=\overline{1,s}$, экземпляров каждого из $n+m_\nu$ элементов, способных выполнить ν-ю операцию.

Поскольку достаточной статистикой для семейства экспоненциальных распределений является сумма наблюдений над случайной величиной, то по результатам испытаний составим s рядов

$$\sum_{i=1}^{N_\nu}\widetilde{x}^{(\nu)}_{k(1),i} > \sum_{i=1}^{N_\nu}\widetilde{x}^{(\nu)}_{k(2),i} > \ldots > \sum_{i=1}^{N_\nu}\widetilde{x}^{(\nu)}_{k(n),i} > \ldots, \qquad \nu=\overline{1,s}.$$

Остается учесть, что во-первых, функция надежности P_{t_0} убывает по $\lambda_c^{(\nu)}$, а во-вторых, плотность распределения суммы экспоненциальных с.в. (см., например, [15, 3.2.8])

$$f_\nu(T|\lambda_c^{(\nu)}) = (\lambda_c^{(\nu)})^{N_\nu}T^{N_\nu-1}\exp(-\lambda_c^{(\nu)}T)/(N_\nu-1)!$$

обладает монотонным по $-T$ отношением правдоподобия.

Поэтому согласно теореме 2 в случае, когда функция потерь h оказывается невозрастающей, а при $s\geqslant 3$ еще и вогнутой по значениям (целевой) функции надежности системы, минимальным риском будет обладать такое правило компоновки системы, при котором на месте ν-й компоненты c-й подсистемы будет расположен $k^{(\nu)}(c)$-й элемент.

б) Этот пример подсказан следующим соображением, приведенным в работе [3]. Надежность элементов может быть обратно упорядочена относительно их возраста, если их изначально одинаковое распределение наработки на отказ имеет (возможно, неизвестную) возрастающую интенсивность отказов.

Рассмотрим систему типа “k из n последовательных подсистем”, т.е. система работоспособна, если работоспособны не менее k ее подсистем. Каждая подсистема состоит из s последовательно соединенных компонентов, места которых (по всей системе) могут занять любые из $ns+m$ элементов. Предполагается, что распределение наработки до отказа элементов является усеченным нормальным распределением с плотностью

$$\widetilde{f}(t) = \frac{a(\mu,\sigma)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad t \geqslant 0,$$

принимая во внимание, что этот закон справедлив для большого числа различного рода устройств [4].

Возрасты элементов неизвестны, поэтому по N экземпляров каждого из них одновременно подвергается испытаниям на наработку до отказа, причем берутся только те экземпляры, которые к началу испытаний оказываются работоспособными. При этом условии семейство плотностей распределения наработки до отказа элементов формируется следующим образом

$$f_\theta(t) = \frac{\widetilde{f}(t+\theta)}{1-\widetilde{F}(\theta)}, \quad t,\theta \geqslant 0, \tag{35}$$

где $\widetilde{f}(\cdot)$ и $\widetilde{F}(\cdot)$ – соответственно плотность и функция распределения наработки до отказа элементов нулевого возраста; θ – возраст элемента.

Поскольку согласно (35)

$$\prod_{i=1}^{N} f_\theta(\widetilde{x}_i) = \frac{a^N}{\sigma^N (2\pi)^{N/2} (1-\widetilde{F}(\theta))^N}$$
$$\times \exp((-N\theta^2 - \sum_{i=1}^{N} \widetilde{x}_i^2 - 2\theta \sum_{i=1}^{N} \widetilde{x}_i + 2\mu \sum_{i=1}^{N} \widetilde{x}_i + 2N\mu\theta - N\mu^2)/2\sigma^2),$$

то по теореме факторизации (см., например, [8]) достаточной статистикой для семейства распределений (35) является

$$x = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{x}_i. \tag{36}$$

В Приложении показано, что плотность ее распределения имеет вид $\overline{f}_\theta(x) = \exp(-x\theta/\sigma^2)H(x)G(\theta)$, откуда легко получить монотонное по $-x$ отношение правдоподобия.

Теперь запишем функцию надежности системы, т.е. вероятность ее безотказной работы на произвольном фиксированном интервале длиной t_0

$$P_{t_0}(r_1, \ldots , r_n; \ldots ; r_{(s-1)n+1}, \ldots , r_{sn}),$$

где $r_c = -\ln\ p_{\theta_c}(t_0)$, $p_{\theta_c}(t_0)$ – вероятность безотказной работы на вышеуказанном интервале того элемента, экземпляры которого поступили на испытания в возрасте θ_c.

Поскольку усеченное нормальное распределение имеет строго возрастающую интенсивность отказов (см.,например, [9, 18.B.2.c,d] или [15,3.5.8]), то легко установить, что r_c строго возрастает по θ_c. Отсюда следует, что если провести изменение параметризации с θ на r, то плотность распределения достаточной статистики (36) попрежнему обладает монотонным по $-x$ отношением правдоподобия.

Теперь, принимая во внимание структуру системы, можно представить ее надежность, как функцию

$$L_{t_0}(R_1, R_2, \ldots , R_n),$$

где $R_i = \sum\limits_{\nu=1}^{s} r_{(\nu-1)n+i}$, $i = \overline{1,n}$. Отсюда, в частности, следует, что для P_{t_0} выполняется (29). В работе [10] установлено, что (убывающая) функция L_{t_0} выпукла по Шуру, а это означает, что P_{t_0} перестановочно неубывающая [2], если учесть переобозначение типа (28).

Таким образом, для того, чтобы воспользоваться теоремой 4, остается доказать справедливость соотношения (27) для L_{t_0}. Будем это делать аналогично тому, как в [9, 12.F.1.a,13.D.1] доказывалась выпуклость по Шуру. Предположим, что $X_1, \ldots , X_n$ – независимые с.в. с распределением Бернулли

$$P\{X_i = 1\} = e^{-R_i}, \quad P\{X_i = 0\} = 1 - e^{-R_i}, \quad i = \overline{1,n},$$

и пусть E – знак математического ожидания.

Предложение 2. *Если функция ψ, определенная на $\{0, 1, \ldots , n\}$, такова, что*

$$\psi(0) \leqslant \ldots \leqslant \psi(n-1), \tag{37}$$

то $g(R_1,\dots,R_n)=E_R\ \psi(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)$ *удовлетворяет* (27).

Доказательство. Прежде всего заметим, что если $E_{R_1,R_2}\ \psi(X_1+X_2+z)$ удовлетворяет (27) для $z=0,1,\dots,n-2$, то то же самое справедливо по отношению к функции

$$E_R\ \psi\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=E_{R_3,\dots,R_n}\left\{E_{R_1,R_2}\left[\psi(X_1+X_2+\sum_{i=3}^{n}X_i)|\sum_{i=3}^{n}X_i\right]\right\}.$$

Поскольку

$$E_{R_1,R_2}\ \psi(X_1+X_2+z)=[\psi(2+z)-2\psi(1+z)+\psi(z)]e^{-(R_1+R_2)}\\ +(e^{-R_1}+e^{-R_2})[\psi(1+z)-\psi(z)]+\psi(z),$$

то (27) получается непосредственно, если учесть замечание к теореме 4.

Из этого предложения следует справедливость (27) для L_{t_0}, если принять во внимание, что в соответствии со структурой системы

$$L_{t_0}(R_1,\dots,R_n)=E_R\ \psi(\sum_{i=1}^{n}X_i),$$

где

$$\psi(X)=\begin{cases}1, & X=k,k+1,\dots,n,\\ 0, & X=0,1,\dots,k-1,\end{cases}$$

причем ψ, очевидно, удовлетворяет (37).

Таким образом, мы вправе воспользоваться теоремой 4 и утверждать, что при невозрастающей и (при $s\geqslant 3$) вогнутой функции h минимальным риском будет обладать следующее правило компоновки системы. Одну подсистему составляют s элементов с наибольшими статистиками (36), где $\widetilde{x}_i$ – реализация наработки до отказа элемента; следующую подсистему составляют s элементов с наибольшими статистиками из всех оставшихся и т.д. В систему не включаются m элементов с наименьшими статистиками (36).

в) Рассмотрим параллельное соединение n компонент в систему. На каждую из n позиций претендуют $n+m$ элементов, время жизни которых предполагаются независимыми экспоненциальными с.в. В свою очередь, компоненты сформированной системы должны быть помещены в n мест, причем, если интенсивность отказов i-го элемента в 0-м (нейтральном) месте λ_i, то в j-м месте ее интенсивность отказов становится равной $b_j\lambda_i$, где для определенности считаем $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$.

Требуется по результатам испытаний $n+m$ элементов в 0-м месте расположить n из них, скомпонованных в систему, в n местах, преследуя цель достижения по возможности наибольшей вероятности безотказной работы системы за фиксированное произвольное время t_0.

Из работы [13] легко следует, с учетом [9, 6.F.8,9], что функция надежности размещенной системы обладает помимо очевидного свойства (1) также свойством (2) (для нагруженного резерва, когда $P_{t_0} = 1 - \Pi_{j=1}^n (1 - \exp(-b_j\lambda_j t_0))$, это установлено с привлечением L-супераддитивных функций, а для ненагруженного резерва, когда

$$P_{t_0}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; b_1, \ldots, b_n) = \prod_{j=1}^n b_j\lambda_j \sum_{i=1}^n \frac{e^{-b_i\lambda_i t_0}}{b_i\lambda_i \prod\limits_{\substack{c=1 \\ c\neq i}}^n (b_c\lambda_c - b_i\lambda_i)},$$

использованы свойства выпуклых по Шуру функций).

Таким образом, согласно следствию 1 теоремы 1, учитывая монотонное убывание P от λ_c, оптимальное решение выглядит так. Составляется ряд, как в примере а) с $s=1$, и на его основании в c-м, $c = \overline{1,n}$, месте следует расположить $k(n+1-c)$-й элемент.

В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Так как средняя наработка до отказа равна

$$T(\eta^{(1)}; \ldots; \eta^{(s)}) = \int\limits_0^\infty P_{t_0}(\eta^{(1)}; \ldots; \eta^{(s)})\, dt_0,$$

то T обладает теми же, что и P_{t_0}, свойствами, влияющими на выводы в примерах а), б) и в). Следовательно, эти выводы сохраняются в случае, когда максимизации подлежит средняя наработка до отказа системы.

2. Из (3) и (5) следует, что установленные в примерах а) и б) оптимальные правила компоновки систем дают, как и в примере в), наибольшую вероятность принятия корректного решения (CD), поскольку функция

$$h_\theta(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z = \overline{P}_\theta \\ 1 & \text{при } z < \overline{P}_\theta \end{cases}$$

вогнута.

3. Результат примера в) может быть получен путем использования работы [16] наряду с [13].

4. Теория раздела 2 позволяет усложнить пример 2 в [12] до более естественной ситуации, когда оба параллельных канала содержат одинаковое число устройств.

4. Приложение

Плотность достаточной статистики (36) *для усеченного нормального распределения.* (к примеру б))

Согласно (35), имеем

$$f_\theta(\widetilde{x}_i) = \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}(1-F(\theta))} e^{-(\widetilde{x}_i+\theta-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad t,\theta \geqslant 0.$$

Переобозначая $y_i = \widetilde{x}_i/\sigma$, $\vartheta = (\theta-\mu)/\sigma$, получаем

$$f_\vartheta^{(1)}(y_i) = C(\vartheta)e^{-(y_i+\vartheta)^2/2}, \quad y_i \geqslant 0, \quad \vartheta \geqslant -\mu/\sigma. \tag{П1}$$

Пусть $s_N = y_1 + \ldots + y_N$ $(= y_N + s_{N-1}$ при $N \geqslant 2)$. Покажем,что

$$f_\vartheta^{(N)}(s_N) = C(\vartheta)^N e^{-N\vartheta^2/2} e^{-s_N\vartheta} e^{-s_N^2/2} I_N(s_N), \tag{П2}$$

где $I_1(s_1) = 1$, а для $N \geqslant 2$

$$\begin{aligned} I_N(s_N) = &\int_0^{s_N} e^{s_{N-1}(s_N-s_{N-1})} \\ &\times \left(\int_0^{s_{N-1}} e^{s_{N-2}(s_{N-1}-s_{N-2})} \ldots \left(\int_0^{s_2} e^{s_1(s_2-s_1)} ds_1 \right) \ldots ds_{N-2} \right) ds_{N-1} \\ &\left(= \int_0^{s_N} e^{s_{N-1}(s_N-s_{N-1})} I_{N-1}(s_{N-1}) ds_{N-1} \right). \end{aligned}$$

Выведем (П2) по индукции. При $N = 1$ (П2) совпадает с (П1). Предположим, что (П2) справедливо при произвольном $N \geqslant 1$. Тогда, поскольку $y_i, s_i, I_i(s_i) \geqslant 0$, свертка $f_\vartheta^{(1)}(y_{N+1})$ и $f_\vartheta^{(N)}(s_N)$ есть

$$\begin{aligned} f_\vartheta^{(N+1)}(s_{N+1}) &= C(\vartheta)^{N+1} \\ &\times \int\limits_0^{s_{N+1}} e^{-(s_{N+1}-s_N+\vartheta)^2/2} e^{-N\vartheta^2/2} e^{-s_N\vartheta} e^{-s_N^2/2} I_N(s_N)\, ds_N \\ &= C(\vartheta)^{N+1} e^{-(N+1)\vartheta^2/2} e^{-s_{N+1}\vartheta} e^{-s_{N+1}^2/2} \\ &\times \int\limits_0^{s_{N+1}} e^{s_N(s_{N+1}-s_N)} I_N(s_N)\, ds_N, \end{aligned}$$

и, тем самым, (П2) установлено. Возвращаясь к прежним обозначениям и учитывая, что $-s_N\vartheta = -\sum\limits_{i=1}^{N} \widetilde{x}_i(\theta-\mu)/\sigma^2$, из (П2) легко получаем вид плотности достаточной статистики (36):

$$\overline{f}_\theta(x) = \exp(-x\theta/\sigma^2)H(x)G(\theta).$$

Литература

1. R. E. Bechhofer, J. Kiefer and M. Sobel, *Sequential Identification and Ranking Procedures.* Univ. Chicago Press. (1968).
2. P. J. Boland and F. Proschan, *Multivariate arrangement increasing functions with applications in probability and statistics.* — J. Multivariate Anal. **25** (1988), 286–298.
3. P. J. Boland, F. Proschan and Y. L. Tong, *Optimal arrangement of components via pairwise rearrangement.* — Nav. Res. Logist. **36** (1989), 807–815.
4. D. J. Devis, *An analysis of some failure data.* — J. Amer. Statist. Assoc. **47** (1952), 113–150.
5. J. T. Hwang, *Universal domination and stochastic domination: estimator simultaneously under a broad class of loss functions.* — Ann. Statist. **13**, No. 1, (1985) 295–314.
6. Л. Б. Клебанов, “*Универсальные*” *функции потерь и несмещенные оценки.* — Докл. АН СССР **20**, No. 6 (1972), 1249–1251.
7. E. L. Lehmann, *On a theorem of Bahadur and Goodman.* — Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1–6.
8. Э. Леман, *Проверка статистических гипотез.* Физматгиз, М. (1979).
9. А. Маршалл, И. Олкин, *Неравенства: Теория мажоризации и ее приложения.* Мир, М. (1983).
10. G. Pledger and F. Proschan, *Comparisons of order statistics and of spacings from heterogeneous distributions.* Optimizing Methods in Statistics (ed. J. S. Rustagi), Academic Press, New York (1971), 89–113.

11. F. Proschan and J. Sethuraman, *Stochastic comparison of order statistics from heterogeneous populations, with applications in reliability.* — J. Multivariate Anal. **6** (1976), 608–616.
12. M. I. Revyakov, *Ranking of populations in parameter's modulus.* — Statistics and Decisions **21** (2003), 185–195.
13. M. I. Revyakov, *Component allocation for a distributed system: reliability maximization.* — J. Appl. Prob. **30**, No 2 (1993), 471–477.
14. T. S. Ferguson, *Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach.* Academic Press. (1967).
15. Р. Барлоу, Ф. Прошан, *Статистическая теория надежности и испытания на безотказность.* Наука, М. (1984).
16. M. L. Eaton, *Some optimum properties of ranking procedures.* — Ann. Math. Statist. **38** (1967), 124–137.

Revyakov M. I. Optimal substitution of arguments of an arrangement increasing function based on sufficient statistics for parameters-arguments.

The aim of this paper is to find the conditions under which optimal permutation of arguments of (goal) multivariate arrangement increasing functions of parameters of distributions must be realised, according to the same rule as if parameters-arguments ordering being the same as ordering of corresponding sufficient statistics.

Those results are used in the maximization problems of reliability of systems based on the test results of their components.

С.-Петербург, Россия

Поступило 24 сентября 2010 г.

E-mail: revyakov.m@gmail.com