Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

В. В. Петров

К УСИЛЕННОМУ ЗАКОНУ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями.

Положим $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. В [1] доказано следующее предложение: если выполнены условия

$$\mathbf{E}\,(S_n - S_m) \leqslant C(n-m) \quad \text{для всех достаточно больших} \quad n-m, \tag{1}$$

где C – постоянная, и

$$\operatorname{Var} S_n = O(n^2/\psi(n)) \quad \text{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_c, \tag{2}$$

то

$$(S_n - \mathbf{E}\,S_n)/n \to 0 \quad \text{п.н.} \tag{3}$$

Здесь Ψ_c означает множество функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum (n\psi(n))^{-1}$ сходится.

Другие достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел в форме (3) к последовательности зависимых неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями были найдены Этемади [2]. Дальнейшие результаты об усиленном законе больших чисел для различных классов последовательностей зависимых случайных величин, полученные с использованием техники Этемади, можно найти в фундаментальной книге А. В. Булинского и А. П. Шашкина [3, гл. 4].

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Ключевые слова: усиленный закон больших чисел, суммы зависимых случайных величин.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00314.

Теорема. *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условиям* (1) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var} S_n/n^3 < \infty. \tag{4}$$

Тогда имеет место соотношение (3).

Очевидно, условие (4) выполнено, если выполнено условие (2), так что из этой теоремы следует сформулированный выше результат работы [1].

Как и в работах [2, 1], доказательство основано на надлежащем секционировании исходной последовательности случайных величин и последующем применении неравенства Чебышева и леммы Бореля–Кантелли к суммам случайных величин, соответствующих границам секций. В отличие от этих работ, далее будет выбран иной способ секционирования, основанный на следующей лемме Дворецкого [4].

Лемма. *Пусть $\{a_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n/n < \infty$. Тогда существует последовательность целых чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющая условиям $n_{k+1} > n_k$ для всех k,*

$$n_{k+1}/n_k \to 1 \quad (k \to \infty), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} < \infty. \tag{6}$$

В силу этой леммы и условия (4) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} S_{n_k}/n_k^2 < \infty \tag{7}$$

для некоторой возрастающей последовательности целых чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию (5). По неравенству Чебышева получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\big(|S_{n_k} - \mathbf{E}\, S_{n_k}| \geqslant \varepsilon n_k\big) \leqslant \varepsilon^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} S_{n_k}/n_k^2 < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$ вследствие (7). Применение леммы Бореля–Кантелли приводит к равенству

$$\lim_{k\to\infty} (S_{n_k} - \mathbf{E}\, S_{n_k})/n_k = 0 \quad \text{п.н.} \tag{8}$$

Если $n_k \leqslant n < n_{k+1}$, то, с учетом неотрицательности случайных величин из исходной последовательности, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} &\frac{S_{n_k} - \mathbf{E}\, S_{n_k}}{n_k} \cdot \frac{n_k}{n_{k+1}} - \frac{\mathbf{E}\, S_{n_{k+1}} - \mathbf{E}\, S_{n_k}}{n_{k+1}} \\ \leqslant &\frac{S_n - \mathbf{E}\, S_n}{n} \leqslant \frac{S_{n_{k+1}} - \mathbf{E}\, S_{n_{k+1}}}{n_{k+1}} \cdot \frac{n_{k+1}}{n_k} + \frac{\mathbf{E}\, S_{n_{k+1}} - \mathbf{E}\, S_{n_k}}{n_k}. \end{aligned} \tag{9}$$

В силу (5) и (8) первые слагаемые в левой и правой частях (9) сходятся к нулю почти наверное. Вторые слагаемые при всех достаточно больших k не превосходят $C(n_{k+1} - n_k)/n_k$ вследствие условия (1). Вновь используя условие (5), получим

$$\limsup_{n\to\infty} \bigl|S_n - \mathbf{E}\, S_n\bigr|/n < \delta$$

почти наверное для любого $\delta > 0$. Отсюда следует соотношение (3).

Литература

1. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **53**, No. 2 (2008), 379–382.
2. N. Etemadi, *On the law of large numbers for nonnegative random variables.* — J. Multivariate Analysis **13**, No. 1 (1983), 187–193.
3. А. В. Булинский, А. П. Шашкин, *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем.* Физматлит, Москва, 2008.
4. A. Dvoretzky, *On the strong stability of a sequence of events.* — Ann. Math. Statist. **20**, No. 2 (1949), 296–299.

Petrov V. V. On the strong law of large numbers for a sequence of nonnegative random variables.

New sufficient conditions are found for the applicability of the strong law of large numbers to a sequence of dependent nonnegative random variables with finite variances.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: valentin@VP15136.spb.edu

Поступило 18 октября 2010 г.