Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

В. О. Зыков, В. Б. Невзоров

О НЕКОТОРЫХ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯХ СЕМЕЙСТВ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ИЛИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ, СВОЙСТВАМИ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин (с.в.) $X, X_1, X_2, \dots$ с общей функцией распределения (ф.р.) $F(x)$ и плотностью распределения $f(x)$ и соответствующие порядковые статистики $X_{1,n} \leqslant \dots \leqslant X_{n,n}$, $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим также независимые с.в. $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$, имеющие стандартное экспоненциальное распределение с плотностью $p(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$. Предполагается, что наборы с.в. $X, X_1, X_2, \dots$ и $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ независимы.

В ряде работ (см., например, [1]–[3]) были получены характеризации логистического распределения некоторыми соотношениями, связывающими порядковые статистики $X_{k,n}$ и случайные величины, имеющие экспоненциальное распределение. В частности, при некоторых дополнительных предположениях на ф.р. $F(x)$ получены следующие результаты:

а). В статье [2] рассматривались при $n = 2, 3, \dots$ соотношения

$$X \stackrel{d}{=} X_{1,n} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\xi_j}{j}. \tag{1}$$

Было показано, что любое такое равенство характеризует (с точностью до сдвига) логистическое распределение с ф.р.

$$H(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Отметим, что при $n = 2$ соотношение (1) сводится к равенству

$$X \stackrel{d}{=} X_{1,2} + \xi, \tag{2}$$

Ключевые слова: порядковые статистики, характеризации распределений, экспоненциальное распределение, логистическое распределение.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00314 и 09-01-00808 и грантом НШ 4472.2010.1.

а из (2) уже легко вывести, что и равенство

$$X \stackrel{d}{=} X_{2,2} - \xi \tag{3}$$

также характеризует логистическое распределение.

b). Соотношение

$$X \stackrel{d}{=} X_{2,n} + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\xi_j}{j} - \xi_{n-1}, \tag{4}$$

близкое к (1) и также характеризующее логистическое распределение, было исследовано в [3]. Отметим, что (4) при $n = 2$ совпадает с равенством (3).

Как видим, соотношение (4) представляет собой некоторое обобщение равенства (3). Это обобщение определяется бо́льшим числом экспоненциально распределенных слагаемых в правой части (4). Мы рассмотрим несколько иное обобщение результата, связанного с соотношением (3), и опишем семейство распределений, характеризуемых при различных $n = 2, 3, \ldots$ равенствами

$$X \stackrel{d}{=} X_{n,n} - \xi. \tag{5}$$

Естественно, что при $n = 2$ соотношение (5) сводится к (3) и будет иметь место только для логистического распределения. Выясним также, какие распределения характеризуются близким к (5) равенством

$$X + \xi \stackrel{d}{=} X_{n,n}. \tag{6}$$

Отметим, что интерес к характеризациям распределений соотношениями типа (1)–(4) во многом связан с представлениями вида

$$Z_{m,n} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{m} \frac{\xi_j}{n-j+1}, \quad m = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $Z_{1,n} \leqslant \ldots \leqslant Z_{n,n}$, $\quad n = 1, 2, \ldots,$ – вариационный ряд, построенный по набору с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (см., например, [4], гл. 3).

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины с общей ф.р. $F(x)$ и непрерывной плотностью распределения $f(x)$, а ξ – независимая от X-ов неотрицательная случайная величина с плотностью распределения $p(x) = e^{-x}, x \geqslant 0$. Тогда для того, чтобы при некотором $n = 2, 3, \ldots$ выполнялось соотношение (5), необходимо и достаточно, чтобы ф.р. $F(x)$ совпадала с ф.р.*

$$F_n(x) = \bigl(1 + e^{-(n-1)(x-C)}\bigr)^{-\frac{1}{n-1}}, \quad -\infty < x < \infty, \tag{8}$$

где в качестве C можно взять произвольную константу.

Замечание 1. При $n = 2$ получаем, что

$$F_2(x) = \bigl(1 + e^{-(x-C)}\bigr)^{-1}, \quad -\infty < x < \infty,$$

т.е. $F_2(x)$ лишь сдвигом отличается от ф.р. стандартного логистического распределения.

Теорема 2. *Для того, чтобы при некотором $n = 2, 3, \ldots$ в условиях теоремы 1 выполнялось равенство (6) необходимо и достаточно, чтобы ф.р. $F(x)$ имела следующий вид:*

$$F(x) = \bigl(1 - e^{-\frac{n-1}{n}(x-C)}\bigr)^{\frac{1}{n-1}}, \quad x \geqslant C, \tag{9}$$

и

$$F(x) = 0, \quad \text{\textit{если} } x < C,$$

где в качестве C можно взять произвольную константу.

Замечание 2. При $n = 2$ ф.р. (9) совпадает с ф.р. случайной величины $\eta = 2\xi + C$, т.е. в этом случае равенство (6) характеризует экспоненциальное распределение.

Доказательство теоремы 1. Поскольку ф.р. максимальной порядковой статистики $X_{n,n}$ имеет вид $F^n(x)$, то нетрудно убедиться, что ф.р. разности $X_{n,n} - \xi$ задается соотношением

$$\mathbf{P}\{X_{n,n} - \xi < x\} = e^x \int_x^\infty F^n(u)\, e^{-u}\, du. \tag{10}$$

Тогда из (5) и (10) вытекает равенство

$$e^{-x} F(x) = \int_x^{\infty} F^n(u)\, e^{-u}\, du,$$

из которого после дифференцирования получаем, что плотность распределения $f(x)$ и ф.р. $F(x)$ случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ связаны соотношением

$$f(x) = F(x) - F^n(x). \tag{11}$$

Пусть $G(x) = F^{-1}(x)$ – функция, обратная ф.р. $F(x)$. Поскольку

$$G'(x) = \frac{1}{f(G(x))},$$

то из (11), подставляя $G(x)$ вместо x, получаем равенство

$$\frac{1}{G'(x)} = x - x^n, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

из которого следует, что

$$G'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^{n-2}}{1 - x^{n-1}}. \tag{12}$$

Из (12) вытекает, что $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = C + \ln\left(\frac{x}{(1 - x^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}\right), \tag{13}$$

где в качестве C можно взять произвольную константу.

Из (13) получаем, возвращаясь к ф.р. $F(x)$, что

$$e^{x-C} = \frac{F(x)}{(1 - F^{n-1}(x))^{\frac{1}{n-1}}}, \tag{14}$$

а из (14) уже следует, что

$$F(x) = (1 + e^{-(n-1)(x-C)})^{-\frac{1}{n-1}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Тем самым утверждение теоремы 1 доказано.

Доказательство теоремы 2. Поскольку, как нетрудно убедиться, справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{X+\xi<x\} = e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{x} F(u)\,e^{u}\,du,$$

то в условиях теоремы приходим к соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{x} F(u)\,e^{u}\,du = e^{x}F^{n}(x). \tag{15}$$

После дифференцирования получаем, что функция распределения $F(x)$ и плотность $f(x)$ связаны равенством

$$e^{x}F(x) = e^{x}F^{n}(x) + n\,e^{x}F^{n-1}(x)f(x),$$

из которого следует, что

$$f(x) = \frac{1-F^{n-1}(x)}{n\,F^{n-2}(x)}$$

и

$$f(G(x)) = \frac{1-x^{n-1}}{n\,x^{n-2}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $G(x)$ – функция, обратная ф.р $F(x)$.

Вспоминая, что

$$G'(x) = (f(G(x)))^{-1},$$

приходим к равенству

$$G'(x) = \frac{n\,x^{n-2}}{1-x^{n-1}},$$

из которого следует, что

$$G(x) = C - \frac{n}{n-1}\ln\left(1-x^{n-1}\right), \tag{16}$$

где в качестве C можно взять произвольную константу. Отметим, что $G(0)=C$ и $G(1)=\infty$.

Подставляя $F(x)$ вместо x в равенстве (16), получаем, что

$$\frac{n-1}{n}(x-C) = -\ln\left(1-F^{n-1}(x)\right)$$

и

$$F(x) = \left(1-e^{-\frac{n-1}{n}(x-C)}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad x \geqslant C.$$

Если $x<C$, то $F(x)=0$. Утверждение теоремы доказано.

Литература

1. E. O. George, G. S. Mudholkar, *A characterization of the logistic distribution by a sample median.* — Ann. Inst. Statist. Math., **33** (1981), Part A, 125–129.
2. G. D. Lin, C.-Y. Hu, *On characterizations of the logistic distribution.* — J. Statist. Plan. Interference, **138** (2008), 1147–1156.
3. M. Ahsanullah, G. P. Yanev, *Characterizations of logistic distribution by properties of order statistics,* (to be printed).
4. В. Б. Невзоров, *Рекорды. Математическая теория.* М., ФАЗИС, 2000.

Zykov V. O., Nevzorov V. B. On some characterizations of families of distributions, including logistic or exponential, by properties of order statistics.

New characterizations of distributions based on properties of the maximal order statistics are obtained. The families of distributions, which are characterized by some properties of maxima, include exponential and logistic distributions as partial cases.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: valnev@mail.ru

Поступило 8 ноября 2010 г.