Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

Д. Н. Запорожец, И. А. Ибрагимов

О ПЛОЩАДИ СЛУЧАЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Формулировка результатов

Пусть задано некоторое компактное множество $F \subset \mathbb{R}^d$ с границей ∂F конечной площади (определение площади см. ниже). Рассмотрим случайное гауссовское поле $G(x) : F \to \mathbb{R}$ с математическим ожиданием $m(x)$ и дисперсией $\sigma^2(x)$. Мы всегда будем предполагать, что $\sigma(x) > 0$ при всех $x \in F$ и с вероятностью единица $G \in \mathcal{C}^1(F)$. Из теоремы о дифференцировании математического ожидания по параметру (см. [4, гл. IV, §5]) и суммируемости супремума непрерывного гауссовского поля на компакте (см. [10]) следует, что $m, \sigma \in \mathcal{C}^1(F)$. Обозначим G'_i, σ'_i частные производные G, σ по i-й координате. Символ ∇ означает градиент функции (вектор частных производных).

Рассмотрим множество нулей поля G

$$G^{-1}(0) = \{x \in F \mid G(x) = 0\}.$$

С вероятностью единица $G^{-1}(0)$ является $(d-1)$-мерным гладким компактным подмногообразием в $\mathbb{R}^d$ или, другими словами, гладкой компактной поверхностью.

Нас интересует вычисление средней площади поверхности $G^{-1}(0)$. Если мы заменим G на G/σ, поверхность $G^{-1}(0)$ не изменится, поэтому можно считать, что $\sigma \equiv 1$. Мы покажем, что

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_F e^{-\frac{1}{2}m^2(x)} \mathbf{E}\left\|\nabla G(x)\right\| dx. \qquad (1)$$

Для этого нам понадобится вывести вспомогательную формулу, вычисляющую площадь поверхности, порожденной нулями неслучайного

Ключевые слова: случайное гауссовское поле, площадь поверхности, мера Фавара, формула коплощади, формула Райса.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 08-01-00692, 10-01-00242, РФФИ-ННИО 09-01-91331, НШ-4472.2010.1 и CRC 701 “Spectral Structures and Topological Methods in Mathematic” .

гладкого поля $g(x) : F \to \mathbb{R}$:

$$\lambda_{d-1}[g^{-1}(0)] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{F} \cos[ug(x)] \big\| \nabla g(x) \big\| \, dx. \tag{2}$$

Прежде чем переходить к точной формулировке результатов, следует определить, что мы понимаем под площадью. Существует несколько широко известных определений площади $(d-1)$-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^d$: поверхностная мера Лебега, мера Хаусдорфа, мера Фавара. Вообще говоря, они не эквивалентны, однако в случае $\mathcal{C}^1$-гладких компактных подмногообразий все они совпадают, поэтому мы можем выбрать любое из них. При доказательстве формулы (2) за λ_{d-1} удобнее всего принять меру Фавара (ее определение мы приводим в параграфе 3). В случае $d = 1$ мера λ_0 означает число элементов множества (возможно бесконечное).

Напомним, от F мы требуем компактность и $\lambda_{d-1}[\partial F] < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $g \in \mathcal{C}^1(F)$ и выполнены условия*
(a) $\lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] < \infty$;
(b) $\lambda_{d-1}[g^{-1}(0) \cap \partial F] = 0$.
Тогда верна формула (2).

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что условие (b) можно опустить, при этом (2) примет вид

$$\lambda_{d-1}[g^{-1}(0)] - \frac{1}{2}\lambda_{d-1}[g^{-1}(0) \cap \partial F] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{F} \cos[ug(x)] \big\| \nabla g(x) \big\| \, dx.$$

В дальнейшем данное обобщение нам не понадобится.

Теорема 2. *Пусть $G \in \mathcal{C}^1(F)$ п.н. и выполнены условия*
(a') $\mathbf{E}\, \lambda_{d-1}\Big[\Big(\nabla \frac{G}{\sigma}\Big)^{-1}(0)\Big] < \infty$;
(b') $\sigma(x) > 0$ *при всех* $x \in F$.
Тогда

$$\mathbf{E}\, \lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{F} \exp\Big(-\frac{m^2(x)}{2\sigma^2(x)}\Big) \mathbf{E} \left\| \nabla \frac{G(x)}{\sigma(x)} \right\| dx. \tag{3}$$

Доказательства теорем приведены в параграфе 4. Параграф 3 содержит вспомогательные утверждения технического характера. В параграфе 2 приведены примеры, которые можно вывести из теоремы 2.

2. Примеры применения теоремы 2

2.1. Формула коплощади.

Пример 1. *Пусть функция g удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{d-1}[g^{-1}(u)]du = \int_F \|\nabla g(x)\|\, dx. \qquad (4)$$

Доказательство. Рассмотрим $G(x) = g(x) - \xi$, где ξ – гауссовская с.в. с $\mathbf{E}\,\xi = 0$ и $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$. В этом случае (3) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{d-1}[g^{-1}(u)]e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_F e^{-\frac{g^2(x)}{2\sigma^2}} \frac{\|\nabla g(x)\|}{\sigma}\, dx.$$

Чтобы получить (4), осталось домножить обе части на $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ и устремить σ к ∞, применив теорему Леви о монотонной сходимости. □

Соотношение (4), называемое “формулой коплощади”, было получено Г. Федерером в [7].

2.2. Центрированное гауссовское поле.

Обозначим $\mathbb{S}^{d-1}$ единичную $(d-1)$-мерную сферу со стандартной поверхностной мерой Лебега $\mu_{d-1}(ds)$.

Пример 2. *Если $G(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2 *и $m(x) \equiv 0$, то*

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s^\top \Sigma(x) s}\, \mu_{d-1}(ds), \qquad (5)$$

где $\Sigma(x)$ – ковариационная матрица $\nabla \frac{G(x)}{\sigma(x)}$.

Доказательство. Следует из леммы 7 (см. §3), примененной к (3). □

Замечание. Соотношение (5) очевидным образом обобщается на случай $m(x) \equiv u$, $\sigma(x) \equiv 1$:

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int_F e^{-\frac{u^2}{2}}\, dx \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s^\top \Sigma(x) s}\, \mu_{d-1}(ds). \qquad (6)$$

Следствие. *В условиях примера* 2

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_F dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \sigma^{-1} \Big[\sum_{i,j=1}^{d} (\mathbf{E}\, G_i' G_j' - \sigma_i' \sigma_j') s_i s_j \Big]^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds). \tag{7}$$

Доказательство. Следует из того, что Σ имеет вид

$$\Sigma = \left(\frac{\mathbf{E}\, G_i' G_j' - \sigma_i' \sigma_j'}{\sigma^2} \right)_{i,j=1}^{d}.$$

□

2.3. Линейное гауссовское поле.

Пример 3. *Пусть* $G(x) = \langle h(x), \xi \rangle$, *где* $h = (h^1, \dots, h^n)^\top : F \to \mathbb{R}^n$ *– векторная функция класса* $\mathcal{C}^1(F)$ *и* ξ *–* n*-мерный центрированный гауссовский вектор с единичной ковариационной матрицей. Тогда*

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_F dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \|J_h(x) s\|\, \mu_{d-1}(ds), \tag{8}$$

где J_h *– матрица Якоби размера* $n \times d$ *отображения* $h/\|h\|$.

Доказательство. Следует из (5), так как в этом случае $\Sigma = J_h^\top J_h$. □

Замечание. Если рассмотреть центрированный гауссовский вектор ξ с произвольной ковариационной матрицей Λ, то $\Sigma = J_h^\top \Lambda J_h$ и (5) принимает вид

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_F dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s^\top J_h^\top(x) \Lambda J_h(x) s}\, \mu_{d-1}(ds).$$

При $d = 1$ данная формула была получена А. Эдельманом и Э. Костланом в [6, теорема 3.1].

Следствие. *Пусть в условиях примера* 3 *ранг* J_h *равен* k. *Обозначим* $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ *ненулевые сингулярные числа матрицы* J_h, *т.е. положительные квадратные корни из собственных значений матрицы* $J_h J_h^\top$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_F dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j(x) s_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds).$$

Доказательство. Из курса линейной алгебры известно (см., например, [5]), что матрица J_h может быть представлена в следующей сингулярной форме: $J_h = VQW$, где V, W – ортогональные матрицы размера $n \times n$ и $d \times d$. Матрица Q размера $n \times d$ является диагональной, причем на диагонали стоят сингулярные числа матрицы J_h. Имеем:

$$\|J_h s\| = \|VQWs\| = \|QWs\|.$$

Осталось подставить это в (8) и сделать ортогональную замену переменной $s' = Ws$. □

Представим $\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)]$ в несколько иной форме, которая понадобится нам в дальнейшем.

Пример 4. *В условиях примера* 3 *выполнено*

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \\ = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_F dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\|h\|^2 \langle h_i', h_j' \rangle - \langle h, h_i' \rangle \langle h, h_j' \rangle}{\|h\|^4} s_i s_j \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds), \tag{9}$$

где

$$h_i' = \left(\frac{\partial h^1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial h^n}{\partial x_i} \right)^\top.$$

Доказательство. Имеем:

$$\sigma = \|h\|, \quad \mathbf{E}\,G_i' G_j' = \langle h_i', h_j' \rangle, \quad \sigma_i' = \|h\|^{-1} \langle h, h_i' \rangle.$$

Осталось применить (7). □

2.4. Нули случайного полинома.

Пример 5. *Пусть* $G(t) = \xi_n t^n + \dots + \xi_1 t + \xi_0, t \in F \subset \mathbb{R}$, *где* $\{\xi_i\}$ – *независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда*

$$\mathbf{E}\,\lambda_0[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\pi}\int\limits_F \frac{[A_n(t)C_n(t) - B_n^2(t)]^{\frac{1}{2}}}{A_n(t)}\,dt,$$

где

$$A_n(t) = \sum_{j=0}^{n} t^{2j}, \quad B_n(t) = \sum_{j=0}^{n} j t^{2j-1}, \quad C_n(t) = \sum_{j=0}^{n} j^2 t^{2j-2}.$$

Доказательство. Следует из (9). □

Данная формула была получена М. Кацем в [8]. В качестве следствия он получил асимптотическое соотношение

$$\mathbf{E}\,\lambda_0[G^{-1}(0)] = \frac{2}{\pi}\log n \cdot (1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

для $F = [-\infty, \infty]$.

2.5. Случайная алгебраическая поверхность.

Пример 6. *Пусть* $G(x) = \sum\limits_{\alpha} \xi_\alpha x^\alpha$, *где* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ – *мультииндекс, суммирование ведется по всем* α, *таким что* $0 \leqslant \alpha_j \leqslant n$, ξ_α – *независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \\ &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}\int\limits_F dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i=1}^{d} \frac{A_n(x_i)C_n(x_i) - B_n^2(x_i)}{A_n^2(x_i)} s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds). \end{aligned} \tag{10}$$

Доказательство. В обозначениях п. 2.3 имеем

$$\|h(x)\|^2 = \sum_\alpha x^{2\alpha} = \prod_{k=1}^{d} A_n(x_k),$$

$$\langle h(x), h_i'(x)\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\|h(x)\|^2 = B_n(x_i)\prod_{k\neq i} A_n(x_k)$$

и

$$\langle h_i'(x), h_j'(x)\rangle = \sum_\alpha \alpha_i x^{\alpha-\epsilon_i}\alpha_j x^{\alpha-\epsilon_j} = \begin{cases} B_n(x_i)B_n(x_j)\prod\limits_{k\neq i,j} A_n(x_k) & \text{при } i\neq j,\\ C_n(x_i)\prod\limits_{k\neq i} A_n(x_k) & \text{при } i=j,\end{cases}$$

где ϵ_i – мультииндекс, у которого на i-м месте стоит единица, а на остальных – нули. Из этих равенств вытекает, что при $i\neq j$

$$\|h\|^2\langle h_i', h_j'\rangle - \langle h, h_i'\rangle\langle h, h_j'\rangle = 0$$

и при $i = j$

$$\|h\|^2\langle h_i', h_j'\rangle - \langle h, h_i'\rangle\langle h, h_j'\rangle = \|h\|^4\frac{A_n(x_i)C_n(x_i) - B_n^2(x_i)}{A_n^2(x_i)}.$$

Осталось применить (9). □

Формула (10) была получена И. А. Ибрагимовым и С. С. Подкорытовым в [2]. В качестве следствия они вывели асимптотическое соотношение

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\log n}{\pi}\lambda_{d-1}[F\cap\Gamma]\cdot(1+o(1)), \quad n\to\infty,$$

где

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^d \{x \,\big|\, |x_j| = 1\},$$

в предположении $\lambda_{d-1}[\partial F\cap\Gamma] = 0$.

2.6. Случайная поверхность Костлана–Шуба–Смейла.

Пример 7. *Пусть* $G(x) = \sum\limits_\alpha \xi_\alpha x^\alpha$, *суммирование ведется по всем неотрицательным* α, *таким что* $\alpha_1+\dots+\alpha_d \leqslant n$, ξ_α *– независимые гауссовские случайные величины с* $\mathbf{E}\,\xi_\alpha = 0$ *и* $\mathbf{D}\xi_\alpha = C_n^\alpha$, *где*

$$C_n^\alpha = \frac{n!}{\alpha_1!\dots\alpha_d!(n-\alpha_1-\dots-\alpha)!}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \sqrt{n}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}\int\limits_F \frac{dx}{1+\|x\|^2}\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{1+\|x\|^2 - \langle x, s\rangle^2}\,\mu_{d-1}(ds).$$

Доказательство. В обозначениях п. 2.3 имеем

$$\|h(x)\|^2 = \sum_\alpha C_n^\alpha x^{2\alpha} = \left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^n,$$

$$\langle h(x), h_i'(x)\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\|h(x)\|^2 = nx_i\left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-1}.$$

При $i \neq j$

$$\begin{aligned}&\langle h_i'(x), h_j'(x)\rangle \\ &= \sum_\alpha C_n^\alpha \alpha_i x^{\alpha-\epsilon_i}\alpha_j x^{\alpha-\epsilon_j} = n(n-1)x_i x_j \sum_\alpha C_{n-2}^{\alpha-\epsilon_i-\epsilon_j} x^{2\alpha-2\epsilon_i-2\epsilon_j} \\ &= n(n-1)x_i x_j\left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-2}\end{aligned}$$

и при $i = j$

$$\begin{aligned}\langle h_i'(x), h_j'(x)\rangle &= \sum_\alpha C_n^\alpha \alpha_i x^{\alpha-\epsilon_i}\alpha_i x^{\alpha-\epsilon_i} = \sum_\alpha C_n^\alpha \alpha_i x^{2\alpha-2\epsilon_i} \\ &+ \sum_\alpha C_n^\alpha \alpha_i(\alpha_i - 1)x^{2\alpha-2\epsilon_i} = n\sum_\alpha C_{n-1}^{\alpha-\epsilon_i} x^{2\alpha-2\epsilon_i} \\ &+ n(n-1)x_i^2 \sum_\alpha C_{n-2}^{\alpha-2\epsilon_i} x^{2\alpha-4\epsilon_i} = n\left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-1} \\ &+ n(n-1)x_i^2\left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{n-2}.\end{aligned}$$

Из этих равенств вытекает, что при $i \neq j$

$$\|h\|^2\langle h_i', h_j'\rangle - \langle h, h_i'\rangle\langle h, h_j'\rangle = -n\left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{2n-2} x_i x_j$$

и при $i = j$

$$\|h\|^2\langle h_i', h_j'\rangle - \langle h, h_i'\rangle\langle h, h_j'\rangle = n\left(1 + \sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{2n-2}\left(1 + \sum_{k\neq i}^d x_k^2\right).$$

Следовательно, из (9) получаем

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{n}\int\limits_F \left(1+\sum_{k=1}^d x_k^2\right)^{-1} dx$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(-\sum_{i\neq j}^d x_i x_j s_i s_j + \sum_{i=1}^d \left(1+\sum_{k\neq i}^d x_k^2\right) s_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds)$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}\sqrt{n}\int\limits_F (1+\|x\|^2)^{-1}\,dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{1+\|x\|^2-\langle x,s\rangle^2}\,\mu_{d-1}(ds).$$

□

Замечание. Таким образом,

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = C_F\sqrt{n},$$

где C_F зависит только от F и d. В [13] М. Шуб и С. Смейл получили аналогичный результат для числа нулей системы из d полиномов.

Следствие. *При $d=1$ получаем*

$$\mathbf{E}\,\lambda_0[G^{-1}(0)] = \sqrt{n}\int\limits_F \frac{dx}{\pi(1+x^2)}.$$

Данное соотношение было получено Э. Костланом в [9].

2.7. Случайная тригонометрическая поверхность.

Обозначим $|F|$ объем множества F (т.е. меру Лебега в $\mathbb{R}^d$).

Пример 8. *Пусть*

$$G(x) = \sum_\alpha \left[\xi_\alpha \cos\langle\alpha,x\rangle + \eta_\alpha \sin\langle\alpha,x\rangle\right],$$

где суммирование ведется по всем α, таким что $0\leqslant\alpha_j\leqslant n$, ξ_α,η_α – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = n\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}}|F|\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left((s_1+\dots+s_d)^2+\frac{n+2}{3n}\right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds).$$

Доказательство. В обозначениях п. 2.3 имеем

$$\|h(x)\|^2 = (n+1)^d, \quad \langle h(x), h_i'(x)\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\|h(x)\|^2 = 0$$

и

$$\langle h_i'(x), h_j'(x)\rangle = \sum_\alpha \alpha_i\alpha_j = \begin{cases} (n+1)^{d-2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 & \text{при } i \neq j, \\ (n+1)^{d-1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Осталось применить (9). □

Следствие (1).

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] = c_d|F|n\cdot(1+o(1)), \quad n\to\infty,$$

где c_d *зависит только от размерности* d.

Следствие (2). *При* $d=1$ *получаем*

$$\mathbf{E}\,\lambda_0[G^{-1}(0)] = \frac{1}{\pi}|F|\sqrt{\frac{n(2n+1)}{6}}.$$

Данная формула была получена К. Кволсом в [11].

2.8. Множества уровня однородного гауссовского поля.

Пример 9. *Пусть* $G(x)$ *является однородным гауссовским полем со спектральной мерой* ν *и удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Для простоты мы предполагаем* $m(x)\equiv 0$ *и* $\sigma(x)\equiv 1$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(u)] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}|F|e^{-\frac{u^2}{2}}\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^d}\langle s,z\rangle^2\nu(dz)\right)^{\frac{1}{2}}\mu_{d-1}(ds).$$

Доказательство. По теореме о спектральном представлении

$$\mathbf{E}\,G(x)G(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x-y,z\rangle}\nu(dz).$$

Продифференцируем дважды и подставим $x = y = 0$:

$$\mathbf{E}\, G_i'(0)G_j'(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} z_i z_j\, \nu(dz).$$

Применяя (6) к $G(x) - u$, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(u)]\\
&= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} e^{-\frac{u^2}{2}} |F| \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\sum_{i,j=1}^{d} s_i s_j \int\limits_{\mathbb{R}^d} z_i z_j \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds)\\
&= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d+1}{2}}} |F| e^{-\frac{u^2}{2}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle s, z\rangle^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds).
\end{aligned}$$

Следствие (1). *Выполнено неравенство*

$$\frac{1}{\pi}\gamma_1 e^{-\frac{u^2}{2}} |F| \leqslant \mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)] \leqslant \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2})} \gamma_2 e^{-\frac{u^2}{2}} |F|,$$

где

$$\gamma_k = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|z\|^k \nu(dz) \right)^{\frac{1}{k}}.$$

Доказательство. Используя неравенство Йенсена, теорему Фубини и лемму 2 (см. §3), получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle s, z\rangle^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds) \geqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\langle s, z\rangle| \nu(dz)\\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \nu(dz) \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle s, z\rangle| \mu_{d-1}(ds) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \|z\| \nu(dz) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \gamma_1.
\end{aligned}$$

С другой стороны, по неравенству Коши $\|\langle s, z\rangle\| \leqslant \|s\|\|z\| = \|z\|$, поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle s, z\rangle^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} \mu_{d-1}(ds) \leqslant \omega_{d-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|z\|^2 \nu(dz) \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \gamma_2.$$

□

Следствие (2). *При $d = 1$ получаем*

$$\mathbf{E}\,\lambda_0[G^{-1}(u)] = \frac{\gamma_2}{\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} |F|.$$

Данная формула была получена С. Райсом в [12].

3. Вспомогательные леммы

Напомним, чтобы вычислить $(d-1)$-мерную меру Фавара множества A, надо спроектировать его на $(d-1)$-мерную линейную гиперплоскость, взять меру Лебега (с учетом кратности проекции) и усреднить по всем таким проекциям, нормировав соответствующим образом:

$$\lambda_{d-1}[A] = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{s^{\perp}} \lambda_0\Big[\{s_y^{\perp}\}^{\perp} \cap A\Big] dy, \tag{11}$$

где $s^{\perp}$ – линейная гиперплоскость, ортогональная единичному вектору $s \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\{s_y^{\perp}\}^{\perp}$ – прямая, ортогональная $s^{\perp}$ и проходящая через точку $y \in s^{\perp}$.

Введем обозначения, которые нам понадобятся в данном параграфе. Пусть

$$M = \sup_{R>0} \left| \int\limits_{-R}^{R} \frac{\sin u}{u}\, du \right|.$$

Из Леммы 1 (см. ниже) следует, что $M < \infty$. Обозначим ω_k площадь k-мерной сферы:

$$\omega_k = \frac{2\pi^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}.$$

Предполагается, что функция g на протяжении всего параграфа удовлетворяет условиям теоремы 1. Обозначим g'_s частную производную g по направлению $s \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Лемма 1. *Для всех $t \in \mathbb{R}$*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin tu}{u} du = \operatorname{sign} t. \tag{12}$$

Доказательство. См., например, [1, гл. XI, §2, п. 3]. □

Лемма 2. *Для всех* $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle x, s\rangle| \, \mu_{d-1}(ds) = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\|x\|. \tag{13}$$

Доказательство. Содержательным является случай, когда $x \neq 0$. Рассмотрим произвольное борелевское множество A, лежащее в линейной гиперплоскости $x^{\perp}$, такое что $\lambda_{d-1}[A] = \|x\|$. Применим формулу (11). Нетрудно видеть, что подынтегральное выражение $\int_{s^\perp} \lambda_0[\{s_y^{\perp}\}^{\perp} \cap A]dy$ является площадью проекции множества A на линейную гиперплоскость $s^{\perp}$. С другой стороны, при проекции множества из одной гиперплоскости на другую его площадь умножается на модуль косинуса угла между гиперплоскостями, поэтому

$$\int\limits_{s^\perp} \lambda_0\left[\{s_y^{\perp}\}^{\perp} \cap A\right]dy = \lambda_{d-1}[A] \cdot \left|\left\langle \frac{x}{\|x\|}, s\right\rangle\right| = |\langle x, s\rangle|.$$

Подставляя данное равенство в (11) и заменяя $\lambda_{d-1}[A]$ на $\|x\|$, получаем (13). □

Следующая лемма является результатом, сформулированным и доказанным М. Кацем (см., например, [3]).

Лемма 3. *Пусть функция одной переменной* $f(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[a, b]$ *и имеет конечное число стационарных точек (где производная обращается в ноль). Тогда число нулей функции* $f(t)$ *на* $[a, b]$ *определяется формулой*

$$\lambda_0[f^{-1}(0)] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)|\, dt. \tag{14}$$

При подсчете $\lambda_0[f^{-1}(0)]$ *нуль, совпадающий с* a *или* b, *считается за "полнуля".*

Замечание. Данное утверждение очевидным образом распространяется на случай объединения конечного числа отрезков. В этом виде мы его будем использовать в дальнейшем.

Доказательство. Для удобства читателя мы приводим доказательство из [3]. Обозначим $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ стационарные точки f:

$$a = \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \dots < \alpha_k \leqslant \alpha_{k+1} = b.$$

Имеем

$$\int_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)|\,dt = \sum_{j=0}^k \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos[uf(t)]|f'(t)|\,dt$$
$$= \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \int_{\alpha_j}^{\alpha_{j+1}} \cos[uf(t)]f'(t)\,dt \right\} = \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \frac{\sin[uf(\alpha_{j+1})] - \sin[uf(\alpha_j)]}{u} \right\}.$$

Знак "+" выбирается для участков, где f возрастает, знак "−" – где f убывает. Таким образом, применяя (12), получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)|\,dt$$
$$= \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[uf(\alpha_{j+1})] - \sin[uf(\alpha_j)]}{u}\,du \right\}$$
$$= \sum_{j=0}^k \left\{ \pm \frac{\operatorname{sign} f(\alpha_{j+1}) - \operatorname{sign} f(\alpha_j)}{2} \right\} = \lambda_0[f^{-1}(0)].$$

□

Лемма 4. *Пусть функция одной переменной $f(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и имеет k стационарных точек. Тогда равномерно по $R > 0$*

$$\left| \int_{-R}^{+R} du \int_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)|\,dt \right| \leqslant 2M(k+1).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 3 имеем

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-R}^{+R} du \int_a^b \cos[uf(t)]|f'(t)|\,dt\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k}\left\{\pm\int_{-R}^{R}\frac{\sin[uf(\alpha_{j+1})]-\sin[uf(\alpha_j)]}{u}\,du\right\}\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k}\pm\left\{\int_{-Rf(\alpha_{j+1})}^{+Rf(\alpha_{j+1})}\frac{\sin u}{u}\,du-\int_{-Rf(\alpha_j)}^{+Rf(\alpha_j)}\frac{\sin u}{u}\,du\right\}\right| \\
&\leqslant 2(k+1)\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\int_{-t}^{+t}\frac{\sin u}{u}\,du\right| = 2M(k+1).
\end{aligned}$$

□

Следствие. *Если $[a,b]$ заменить множеством H, состоящим из объединения l отрезков, то равномерно по $R>0$*

$$\left|\int_{-R}^{+R} du \int_H \cos[uf(t)]|f'(t)|\,dt\right| \leqslant 2M(k+l). \tag{15}$$

Лемма 5. *Верно следующее неравенство:*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}[{g'_s}^{-1}(0)]\mu_{d-1}(ds) \leqslant \omega_{d-1}\lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \omega_{d-2}|F|.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \lambda_{d-1}[{g'_s}^{-1}(0)]\,\mu_{d-1}(ds) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds)\int_F \mathbf{1}\{g'_s(y)=0\}\lambda_{d-1}(dy) \\
&\leqslant \omega_{d-1}\lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds)\int_{F\setminus(\nabla g)^{-1}(0)} \mathbf{1}\{g'_s(y)=0\}\lambda_{d-1}(dy).
\end{aligned}$$

Осталось оценить второе слагаемое. Если $\nabla g(y)\neq 0$, то множество $S(y)=\{s\in\mathbb{S}^{d-1}\mid g'_s(y)=0\}$ лежит в единичной гиперсфере сферы

$\mathbb{S}^{d-1}$, ортогональной $\nabla g(y)$. Следовательно, $\lambda_{d-2}[S(y)] \leqslant \omega_{d-2}$ и, используя теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{F\setminus(\nabla g)^{-1}(0)} \mathbf{1}\{g_s'(y)=0\}\lambda_{d-1}(dy)$$
$$= \int\limits_{F\setminus(\nabla g)^{-1}(0)} dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}\{f_s'(x)=0\}\mu_{d-2}(ds)$$
$$= \int\limits_{F\setminus(\nabla g)^{-1}(0)} \lambda_{d-2}[S(y)]\,dx \leqslant \int\limits_{F\setminus(\nabla g)^{-1}(0)} \omega_{d-2}\,dx = \omega_{d-2}|F|.$$

□

Лемма 6. *При всех $R>0$ выполнены неравенства*

$$\int\limits_{Sd} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle y,s\rangle=0\}} dy \left| \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{\{y+ts\in F\}} \cos[ug(y+ts)]|g_t'(y+ts)|\,dt \right|$$
$$\leqslant 2M\left(\omega_{d-1}\lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \omega_{d-2}|F| + \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\lambda_{d-1}[\partial F]\right) \tag{16}$$

и

$$\left| \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{F} \cos[ug(x)]\|\nabla g(x)\|\,dx \right|$$
$$\leqslant \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d-1}{2}}} M\left(\omega_{d-1}\lambda_{d-1}[(\nabla f)^{-1}(0)] + \omega_{d-2}|F| + \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\lambda_{d-1}[\partial F]\right). \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим $k(s,y)$ число нулей $g_t'(y+ts)$ (возможно бесконечное) на множестве $\{t\,|\,y+ts\in F\}$ и $l(s,y)$ – число отрезков, из которых состоит это множество (если множество не является объединением конечного числа отрезков, полагаем $l(s,y)=\infty$). Из (15) получаем

$$\left| \int\limits_{R}^{R} du \int\limits_{\{t\,|\,y+ts\in F\}} \cos[ug(y+ts))|g_t'(y+ts)|\,dt \right| \leqslant 2M\Big(k(s,y)+l(s,y)\Big). \tag{18}$$

Если мы спроектируем множество ${g'_s}^{-1}(0)$ на гиперплоскость $\{y \mid \langle y, s\rangle = 0\}$, то $k(s,y)$ будет равняться кратности полученной проекции в точке y. При проекции мера не увеличивается, поэтому

$$\int\limits_{\{\langle y,s\rangle=0\}} k(s,y)dy \leqslant \lambda_{d-1}[{g'_s}^{-1}(0)],$$

что по лемме 5 влечет

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle y,s\rangle=0\}} k(s,y)dy \leqslant \omega_{d-1}\lambda_{d-1}[(\nabla g)^{-1}(0)] + \omega_{d-2}|F|. \quad (19)$$

Далее, применив определение меры Фавара к границе F, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle y,s\rangle=0\}} 2l(s,y)dy = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\lambda_{d-1}[\partial F]. \quad (20)$$

Объединение (18), (19) и (20) приводит к (16).

Докажем (17). Из (13) имеем

$$\|\nabla g(x)\| = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} |\langle \nabla g(x), s\rangle| \mu_{d-1}(ds).$$

Следовательно, по теореме Фубини

$$\left| \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{F} \cos[ug(x)] \|\nabla g(x)\|\, dx \right|$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \left| \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{F} dx \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \cos[ug(x)] |\langle \nabla g(x), s\rangle| \mu_{d-1}(ds) \right|$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \left| \int\limits_{Sd} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle y,s\rangle=0\}} dy \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{\{x+ts\in F\}} \cos[ug(y+ts)] |g'_t(y+ts)|\, dt \right|.$$

Для завершения доказательства осталось применить (16). □

Лемма 7. *Пусть дан n-мерный центрированный гауссовский вектор ξ с ковариационной матрицей Σ. Тогда*

$$\mathbf{E}\,\|\xi\| = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{2}\pi^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \sqrt{s\Sigma s^\top}\mu_{d-1}(ds)$$

Доказательство. Из (13) и теоремы Фубини имеем

$$\mathbf{E}\,\|\xi\| = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\pi^{\frac{d-1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{E}\,|\langle\xi, s\rangle|\,\mu_{d-1}(ds).$$

Далее,

$$\mathbf{E}\,|\langle\xi, s\rangle| = \mathbf{E}\,|\mathcal{N}(0,1)|\sqrt{\mathbf{D}\langle\xi, s\rangle} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{s\Sigma s^\top},$$

что завершает доказательство. $\square$

4. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. Используя (11) и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned}
\lambda_{d-1}[g^{-1}(0)] &= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle y,s\rangle=0\}} dy \\
&\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{\{y+ts\in F\}} \cos[ug(y+ts)]|g_t'(y+ts)|\,dt \\
&= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle y,s\rangle=0\}} dy \\
&\times \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{\{y+ts\in F\}} \cos[ug(y+ts)]|g_t'(y+ts)|\,dt.
\end{aligned}$$

Из (16), условия (b) и выбора F следует, что мы можем применить теорему Лебега:

$$\lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle x,s\rangle=0\}} dy$$

$$\times \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{\{x+ts\in F\}} \cos[ug(x+ts)]|g_t'(x+ts)|\,dt.$$

Так как все области интегрирования конечномерны, а интегрируемые функции ограничены, можно применить теорему Фубини:

$$\lambda_{d-1}(g^{-1}(0)) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{\{\langle x,s\rangle=0\}} dy$$

$$\times \int\limits_{\{x+ts\in F\}} \cos[ug(x+ts)]|g_t'(x+ts)|\,dt$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{F} \cos[ug(x)]|\langle\nabla g(x),s\rangle|\,dx$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\pi^{\frac{d+1}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mu_{d-1}(ds) \int\limits_{F} \cos[ug(x)]|\langle\nabla g(x),s\rangle|\,dx.$$

Для завершения доказательства осталось применить лемму 2. □

Перейдем к доказательству второй теоремы.

Доказательство теоремы 2. Применим теорему 1. Для этого покажем, что с вероятностью единица для G выполнены условия (a) и (b). Из (a') очевидным образом следует, что (a) выполнено п.н. Далее, учитывая (b') и $\lambda_{d-1}[\partial F] < \infty$, по теореме Фубини имеем

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}[G^{-1}(0)\cap\partial F] = \mathbf{E}\int\limits_{\partial F} \mathbf{1}\{G(y)=0\}\,d\lambda_{d-1}(y)$$

$$= \int\limits_{\partial F} \mathbf{P}\,\{G(y)=0\}\,d\lambda_{d-1}(y) = 0,$$

что влечет выполнение (b) п.н.

Докажем сначала теорему для случая $\sigma \equiv 1$. Из (2) получаем

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \mathbf{E}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} du \int\limits_{F} \cos[uG(x)]\|\nabla G(x)\|\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathbf{E}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{F} \cos[uG(x)]\|\nabla G(x)\|\,dx.$$

Из (17), условия (a') и выбора F следует, что применима теорема Лебега:

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\mathbf{E}\int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{F} \cos[uG(x)]\|\nabla G(x)\|\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{F} dx \int\limits_{-R}^{R} \mathbf{E}\Big\{\cos[uG(x)]\|\nabla G(x)\|\Big\}du.$$

В последнем равенстве мы применили теорему Фубини, что законно, так как выполнено

$$|\cos[uG(x)]|\,\|\nabla G(x)\| \leqslant \|\nabla G(x)\| \leqslant \sum_{j=1}^{d}|G'_j(x)|$$

и

$$\mathbf{E}\int\limits_{-R}^{R} du \int\limits_{F}\sum_{j=1}^{d}|G'_j(x)|\,dx \leqslant 2R|F|\sum_{j=1}^{d}\mathbf{E}\sup_{x\in F}|G'_j(x)| < \infty.$$

Конечность правой части следует из суммируемости супремума непрерывного гауссовского поля на компакте (см.[10]).

Продифференцировав $\sigma^2 \equiv 1$, получаем

$$\frac{\partial(\mathbf{E}\,G^2)}{\partial x_i} - 2\mathbf{E}\,G\frac{\partial(\mathbf{E}\,G)}{\partial x_i} = 0,$$

следовательно, по теореме о дифференцировании математического ожидания по параметру (см. [4, гл. IV, §5]) выполнено

$$\mathbf{E}\,GG'_i = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\,\frac{\partial G^2}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial(\mathbf{E}\,G^2)}{\partial x_i} = \mathbf{E}\,G\frac{\partial(\mathbf{E}\,G)}{\partial x_i} = \mathbf{E}\,G\,\mathbf{E}\,G'_i,$$

т.е. G не коррелирует с компонентами вектора ∇G, что в гауссовском случае равносильно независимости. Таким образом,

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\left\{\cos[uG(x)]\|\nabla G(x)\|\right\} = \mathbf{E}\,\cos[uG(x)]\mathbf{E}\,\|\nabla G(x)\|\\&= \mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}\,e^{iuG(x)}\right\}\mathbf{E}\,\|\nabla G(x)\| = \mathrm{Re}\left\{e^{ium(x)-\frac{u^2}{2}}\right\}\mathbf{E}\,\|\nabla G(x)\|\\&= \cos[um(x)]e^{-\frac{u^2}{2}}\mathbf{E}\,\|\nabla G(x)\|,\end{aligned}$$

что влечет

$$\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}(G^{-1}(0)) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to\infty}\int\limits_F \mathbf{E}\,\|\nabla G(x)\|\,dx\int\limits_{-R}^{R}\cos[um(x)]e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Используя теорему Лебега и формулу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos[um(x)]e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}\,e^{im(x)\mathcal{N}(0,1)}\right\} = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{m^2(x)}{2}},$$

получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,\lambda_{d-1}(G^{-1}(0))\\&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_F \mathbf{E}\,\|\nabla G(x)\|\,dx\lim_{R\to\infty}\int\limits_{-R}^{R}\cos[um(x)]e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_F e^{-\frac{m^2(x)}{2}}\mathbf{E}\,\|\nabla G(x)\|\,dx.\end{aligned}\tag{21}$$

Случай $\sigma \equiv 1$ разобран. Чтобы перейти к общему случаю, рассмотрим поле G/σ. Оно имеет единичную дисперсию, и множество его нулей совпадает с множеством нулей исходного, поэтому для завершения доказательства осталось применить (21) к G/σ. $\square$

5. Благодарности

Авторы благодарны С. В. Иванову, А. И. Назарову, Е. М. Рудо и Д. С. Челкаку за полезные консультации.

Часть работы выполнена во время пребывания в Университете Билефельда. Авторы признательны Ф. Гетце и А. Кол за проявленное гостеприимство.

Литература

1. А. В. Ефимов, *Математический анализ (специальные разделы)*, Т. 1. Высшая школа (1980).
2. И. А. Ибрагимов, С. С. Подкорытов, *О случайных вещественных алгебраических поверхностях.* — Докл. Акад. Наук, **343** No. 6 (1995), 734–736.
3. М. Кац, *Вероятность и смежные вопросы в физике.* Едиториал УРСС (2003).
4. А. Н. Колмогоров, *Основные понятия теории вероятностей.* ФАЗИС (1998).
5. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир (1989).
6. A. Edelman and E. Kostlan, *How many zeros of a random polynomial are real.* — Bull. Amer. Math. Soc., **32** No. 1 (1995), 1–37.
7. H. Federer, *Curvature measures.* — Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 418–491.
8. M. Kac, *On the average number of real roots of a random algebraic equation.* — Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), 314–320.
9. E. Kostlan, *On the distribution of roots of random polynomials.* — In: From Topology to Computation: Proceedings of the Smalefest, Springer (1993), pp. 419–431.
10. H. J. Landau and L. A. Shepp, *On the supremum of a Gaussian process.* — Sankhya Ser. A, **32** (1970), 369–378.
11. C. Qualls, *On the number of zeros of a stationary Gaussian random trigonometric polynomial.* — J. London Math. Soc., **2** No. 2 (1970), 216–220.
12. S. O. Rice, *Mathematical analysis of random noise.* — Bell System Technical Journal, **24** (1945), 46–156.
13. M. Shub and S. Smale, *Complexity of Bézout's theorem II: volumes and probabilities.* — Computational Algebraic Geometry, **109** (1993), 267–285.

Zaporozhets D. N., Ibragimov I. A. On random surface area.

Consider a random smooth Gaussian field $G(x) : F \to \mathbb{R}$, where F is a compact in $\mathbb{R}^d$. We derive a formula for average area of a surface set by the equation $G(x) = 0$ and give some applications. As an auxiliary result we obtain an integral expression for area of a surface induced by zeros of any *non-random* smooth field.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: zap1979@gmail.com
ibr32@pdmi.ras.ru

Поступило 10 ноября 2010 г.