Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

Ф. Гётце, А. Ю. Зайцев

РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ КОРОТКИМИ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

1. Введение и результаты

Эта статья представляет собой сокращенный и доработанный вариант препринта [22].

Пусть $\mathbb{R}^d$, $1 \leqslant d \leqslant \infty$, обозначает d-мерное вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Пусть $\mathbb{Q} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ – симметричный ограниченный линейный оператор и пусть $\mathbb{Q}[x] = \langle \mathbb{Q}x, x\rangle$ – соответствующая квадратичная форма. Мы будем говорить, что оператор $\mathbb{Q}$ невырожденный, если $\ker \mathbb{Q} = \{0\}$.

Пусть $X, X_1, X_2, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) $\mathbb{R}^d$-значных случайных векторов. Предположим, что $\mathbf{E}\,X = 0$ и $\mathbf{E}\,\|X\|^2 < \infty$. Пусть G – гауссовский случайный вектор с нулевым средним и такой, что его ковариационный оператор $\mathbb{C} = \operatorname{cov} G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ равен $\operatorname{cov} X$. Хорошо известно, что распределения $\mathcal{L}(S_N)$ сумм $S_N \stackrel{\text{def}}{=} N^{-1/2}\,(X_1 + \dots + X_N)$ слабо сходятся к $\mathcal{L}(G)$.

Обозначим $\beta_q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}\,\|X\|^q$ при $q > 0$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \beta_4$. Введем функции распределения

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}[S_N] \leqslant x\big\}, \qquad H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}[G] \leqslant x\big\}. \tag{1.1}$$

Положим $\Delta_N \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} \big|F(x) - H(x)\big|$.

Ключевые слова: центральная предельная теорема, квадратичные формы, скорость сходимости, функции концентрации.

Работа поддержана SFB 701 Билефельдского университета и грантом РФФИ-ННИО 09-01-91331. Работа второго автора поддержана грантами РФФИ 09-01-12180 и 10-01-00242, грантом НШ 4472.2010.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики” .

Теорема 1.1. *Предположим, что* $\mathbb{Q}$ *и* $\mathbb{C}$ *– невырожденные операторы и* $d \geqslant 5$ *или* $d = \infty$. *Тогда* $\Delta_N \leqslant c(\mathbb{Q}, \mathbb{C})\, \beta/N$. *Постоянная* $c(\mathbb{Q}, \mathbb{C})$ *в этой оценке зависит только от* $\mathbb{Q}$ *и* $\mathbb{C}$.

Теорема 1.1 подтверждает гипотезу В. Бенткуса и Ф. Гётце [5]. Она обобщает на случай $d \geqslant 5$ соответствующий результат из работы [5]. В теореме 1.1 из [5] предполагалось, что $d \geqslant 9$, в то время как наша теорема 1.1 доказана при $d \geqslant 5$.

Функция распределения случайной величины $\|S_N\|^2$ (для ограниченного X со значениями в $\mathbb{R}^d$) может иметь скачки порядка $\mathcal{O}\bigl(N^{-1}\bigr)$ для всех $1 \leqslant d \leqslant \infty$. См., например, [4, с. 468]. Поэтому порядок оценки теоремы 1.1 оптимален. Теорема 1.1 и метод ее доказательства тесно связаны с задачей из теории чисел о подсчете числа целых точек в многомерных множествах (см. работы [2, 6, 14, 17] и [18]).

Для гильбертовых пространств задача об оценивании величины Δ_N в условиях теоремы 1.1 привлекала внимание многих исследователей. В работах [27] и [35] получены оптимальные (в смысле зависимости от собственных чисел оператора $\mathbb{C}$) оценки порядка $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ при $\beta_3 < \infty$. Подробную историю вопроса можно найти в работах [3–5, 7, 32] и [33].

При более ограничительных условиях на размерность и существование моментов оценки $\mathcal{O}(N^{-1+\varepsilon})$ с $\varepsilon \downarrow 0$ при $d \uparrow \infty$, были получены в работе Гётце [16]. Неравенство симметризации для характеристических функций из работы [16] и его обобщения играют важнейшую роль в доказательствах оценок в центральной предельной теореме на эллипсоидах и гиперболоидах в конечномерном и бесконечномерном случаях. Это неравенство аналогично неравенству Вейля [34] для тригонометрических сумм. При некоторых предположениях о гладкости распределения вектора X оценки погрешности порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$ (и даже разложения Эджворта) были получены в работах [1, 9] и [16]. Бенткус и Гётце [3, 4, 5] установили справедливость оценок порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$ без выполнения условий гладкости. Аналогичные оценки для точности безгранично делимой аппроксимации получены в работе [8]. Среди недавних публикаций следует упомянуть статьи С. В. Нагаева и В. И. Чеботарева [28, 29] ($d \geqslant 9$, оценки с более точной зависимостью постоянных от собственных чисел оператора $\mathbb{C}$) и С. А. Богатырева, Ф. Гётце и В. В. Ульянова [11] (неравномерные оценки при $d \geqslant 12$), см. также [19].

Дополнительные ограничения, такие как диагональность матриц операторов $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ и независимость пяти первых координат вектора X, дали возможность применить аналог кругового метода Харди–Литтлвуда и получить оценки порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$ при $d \geqslant 5$ (см. [4]). В работе [20] были получены оценки порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$ для некоторых эллипсоидов в $\mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 5$ в случае решетчатых распределений векторов X. Для общего случая, рассмотренного в теореме 1.1, нам придется разработать и применить новые методы.

То, что именно условие $d \geqslant 5$ является наименее ограничительным требованием на размерность d для точности аппроксимации $\mathcal{O}(N^{-1})$, можно обосновать с помощью оценки снизу порядка $\mathcal{O}(N^{-1} \log N)$ в размерности $d = 4$ для соответствующей задачи о подсчете числа целых точек. Вопрос о правильном порядке оценки при $2 \leqslant d \leqslant 4$ остается полностью открытым (даже в простейшем случае, когда $\mathbb{Q}$ – тождественный оператор $\mathbb{I}_d$, а случайный вектор X имеет независимые координаты с распределениями Радемахера). Следует упомянуть, что в случае $d = 2$ нахождение правильного порядка скорости сходимости приведет к решению знаменитой проблемы круга. Известные оценки снизу в проблеме круга соответствуют оценке $\mathcal{O}(N^{-3/4} \log^{\delta} N)$ с $\delta > 0$ для Δ_N. Харди [24] предположил, что с точностью до логарифмического множителя это правильный порядок.

Чтобы сформулировать результаты, нам потребуются дополнительные обозначения, повторяющие бóльшую часть обозначений из работы [5]. Положим $\sigma^2 \overset{\mathrm{def}}{=} \beta_2$. Пусть $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \dots$ – собственные числа оператора $\mathbb{C}$ с учетом их кратности. Мы имеем $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots$. В дальнейшем $\mathcal{S} = \{e_1, \dots, e_s\} \subset \mathbb{R}^d$ обозначает конечное множество, содержащее s элементов. Мы будем использовать обозначение $\mathcal{S}_o$ вместо $\mathcal{S}$, если система векторов $\{e_1, \dots, e_s\}$ ортонормальна. Пусть $p > 0$ и $\delta \geqslant 0$. Следуя работе [5], введем условие невырожденности распределения d-мерного вектора Y

$$\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}, Y): \ \mathbf{P}\big\{ \|Y - e\| \leqslant \delta \big\} \geqslant p, \quad \text{для всех } \ e \in \mathcal{S} \cup \mathbb{Q}\mathcal{S}. \tag{1.2}$$

Частный случай, когда явная оценка снизу для величины p в (1.2) может быть выписана в терминах собственных чисел операторов $\mathbb{C}$ и $\mathbb{Q}$, описан в работе [5]. Предположим дополнительно, что существует такая ортонормальная система $\mathcal{S}_o = \{e_1, \dots, e_s\}$ собственных векторов оператора $\mathbb{C}$, что $\mathbb{Q}\mathcal{S}_o$ также является системой собственных векторов оператора $\mathbb{C}$. Тогда мы будем говорить, что выполнено условие $\mathcal{B}(\mathcal{S}_o, \mathbb{C})$. В этом случае мы будем обозначать

$$\lambda_s^2 = \min_{e \in \mathcal{S}_o \cup \mathbb{Q}\,\mathcal{S}_o} \sigma_e^2, \tag{1.3}$$

где σ_e^2 – собственное число оператора $\mathbb{C}$, соответствующее собственному вектору e. В частности, такая система векторов $\mathcal{S}_o$ существует, если мы предположим, что матрицы операторов $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{C}$ диагональны в общем ортонормальном базисе. Если, кроме того, оператор $\mathbb{Q}$ изометричен, то мы можем выбрать $\mathcal{S}_o$ таким образом, что $\lambda_s^2 = \sigma_s^2$.

Введем урезанные случайные векторы

$$X^{\diamond} = X\,\mathbf{I}\big\{\,\|X\| \leqslant \sigma\sqrt{N}\,\big\}, \quad X_{\diamond} = X\,\mathbf{I}\big\{\,\|X\| > \sigma\sqrt{N}\,\big\}, \tag{1.4}$$

$$X^{\bullet} = X\,\mathbf{I}\big\{\,\|\mathbb{C}^{-1/2}\,X\| \leqslant \sqrt{N}\,\big\}, \quad X_{\bullet} = X\,\mathbf{I}\big\{\,\|\mathbb{C}^{-1/2}\,X\| > \sqrt{N}\,\big\} \tag{1.5}$$

и их моменты (при $q > 0$)

$$\Lambda_4^{\diamond} = \frac{1}{\sigma^4\,N}\,\mathbf{E}\,\|X^{\diamond}\|^4, \qquad \Pi_q^{\diamond} = \frac{N}{(\sigma\sqrt{N})^q}\,\mathbf{E}\,\|X_{\diamond}\|^q, \tag{1.6}$$

$$\Lambda_4^{\bullet} = \frac{1}{\sigma^4\,N}\,\mathbf{E}\,\|X^{\bullet}\|^4, \qquad \Pi_q^{\bullet} = \frac{N}{(\sigma\sqrt{N})^q}\,\mathbf{E}\,\|X_{\bullet}\|^q. \tag{1.7}$$

Здесь и ниже $\mathbf{I}\{A\}$ обозначает индикатор события A. Ясно, что

$$X^{\diamond} + X_{\diamond} = X^{\bullet} + X_{\bullet} = X, \quad \|X^{\diamond}\|\;\|X_{\diamond}\| = \|X^{\bullet}\|\;\|X_{\bullet}\| = 0 \tag{1.8}$$

и

$$\mathbf{P}\big\{\,\|X^{\bullet}\| \leqslant \sigma_1\sqrt{N}\,\big\} = \mathbf{P}\big\{\,\|X_{\bullet}\| > \sigma_d\sqrt{N}\,\big\} = 1. \tag{1.9}$$

В параграфах 3 и 4 мы будем обозначать

$$X' = X^{\bullet} - \mathbf{E}\,X^{\bullet} + W, \tag{1.10}$$

где W – центрированный гауссовский случайный вектор, который не зависит от остальных случайных векторов и величин и выбран таким образом, что $\operatorname{cov} X' = \operatorname{cov} G$. Такой вектор W существует по лемме 2.3.

Введем обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем. Через $c, c_1, c_2, \ldots$ мы будем обозначать абсолютные положительные постоянные, которые могут быть различными в различных местах текста. Если постоянная зависит от, скажем, s, то мы будем отмечать эту зависимость, используя обозначения c_s, $c(s)$ или $c_j(s)$. Кроме того, в условиях теорем и лемм (см., например, теоремы 1.2, 1.3, 1.4 и 2.1) мы обозначаем через c_0 *произвольные* абсолютные положительные постоянные, например, можно взять $c_0 = 1$. Мы будем писать $A \ll B$, если существует такая абсолютная постоянная c, что $A \leqslant cB$. Аналогично, $A \ll_s B$, если $A \leqslant c(s)B$. Мы будем также писать $A \asymp_s B$, если $A \ll_s B \ll_s A$. Для $a \in \mathbb{R}^d$ мы будем всегда обозначать $b = \sqrt{N}\,a$. Через $\lceil\alpha\rceil$ мы будем обозначать целую часть числа α.

В дальнейшем мы предполагаем, что все случайные величины и векторы независимы в совокупности, если противоположное неясно из контекста. Через $X_1, X_2, \dots$ мы будем обозначать независимые копии случайного вектора X. Аналогично, $G_1, G_2, \dots$ – независимые копии вектора G и т. д. Через $\mathcal{L}(X)$ мы будем обозначать распределение вектора X. Определим симметризацию $\widetilde{X}$ случайного вектора X как случайный вектор с распределением $\mathcal{L}(\widetilde{X}) = \mathcal{L}(X_1 - X_2)$.

Вместо нормированных сумм S_N иногда удобнее рассматривать суммы $Z_N = X_1 + \dots + X_N$. Тогда $S_N = N^{-1/2} Z_N$. Аналогично, через $Z_N^\diamond$ (соответственно $Z_N^\bullet$ и Z_N') мы будем обозначать суммы N независимых копий векторов $X^\diamond$ (соответственно $X^\bullet$ и X'). Например, $Z_N' = X_1' + \dots + X_N'$.

Мы будем отождествлять линейные операторы и соответствующие им матрицы. Через $\mathbb{I}_d : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ мы обозначаем тождественный оператор и, одновременно, диагональную матрицу с единичными элементами на диагонали. Через $\mathbb{O}_d$ мы обозначаем матрицу размера $(d \times d)$ с нулевыми элементами.

Для случайного вектора Y мы определяем математическое ожидание $\mathbf{E}_Y$ как условное математическое ожидание

$$\mathbf{E}_Y\, f(X, Y, Z, \dots) = \mathbf{E}\,\bigl(f(X, Y, Z \dots) \bigm| X, Z, \dots\bigr),$$

когда фиксированы все случайные векторы кроме Y.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\mathrm{e}\{x\} \overset{\text{def}}{=} \exp\{i\,x\}$. Через

$$\widehat{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}\{tx\}\, dF(x) \tag{1.11}$$

мы обозначаем преобразование Фурье–Стилтьеса функции ограниченной вариации F или, другими словами, преобразование Фурье меры с функцией распределения F.

Введем функции распределения

$$F_a(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}[S_N - a] \leqslant x\big\}, \qquad H_a(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}[G - a] \leqslant x\big\}, \qquad a \in \mathbb{R}^d. \tag{1.12}$$

Кроме того, при $d = \infty$ и $a \in \mathbb{R}^d$ определим поправку Эджворта $E_a(x)$ (зависящую от $\mathbb{Q}$ и $\mathcal{L}(X)$) как такую функцию ограниченной вариации, что $E_a(-\infty) = 0$, а ее преобразование Фурье–Стилтьеса равно

$$\widehat{E}_a(t) = \frac{2\,(it)^2}{3\sqrt{N}}\,\mathbf{E}\;\mathrm{e}\big\{t\mathbb{Q}[Y]\big\}\big(3\,\langle \mathbb{Q}X, Y\rangle\langle \mathbb{Q}X, X\rangle + 2it\,\langle \mathbb{Q}X, Y\rangle^3\big), \tag{1.13}$$

где $Y = G - a$.

В конечномерных пространствах (при $1 \leqslant d < \infty$) мы определим поправку Эджворта следующим образом (см. [10]). Пусть $\phi(\cdot)$ – стандартная нормальная плотность в $\mathbb{R}^d$. Тогда $p(x) = \phi(\mathbb{C}^{-1/2}x)/\sqrt{\det \mathbb{C}}$ – плотность вектора G, и, для $a \in \mathbb{R}^d$, $b = \sqrt{N}\,a$, мы имеем

$$E_a(x) \overset{\text{def}}{=} \Theta_b(Nx) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{6\sqrt{N}}\,\chi(A_x), \qquad A_x \overset{\text{def}}{=} \big\{u \in \mathbb{R}^d : \mathbb{Q}[u - a] \leqslant x\big\} \tag{1.14}$$

со знакопеременной мерой

$$\chi(A) \overset{\text{def}}{=} \int_A \mathbf{E}\,p'''(x)X^3\,dx \quad \text{для борелевских множеств} \quad A \subset \mathbb{R}^d, \tag{1.15}$$

где

$$p'''(x)u^3 = p(x)\big(3\,\langle \mathbb{C}^{-1}u, u\rangle\langle \mathbb{C}^{-1}x, u\rangle - \langle \mathbb{C}^{-1}x, u\rangle^3\big) \tag{1.16}$$

обозначает третью производную по Фреше функции p в направлении u. Заметим, что $E_a(x) \equiv 0$, если $a = 0$ или если $\mathbf{E}\,\langle X, y\rangle^3 = 0$ для всех $y \in \mathbb{R}^d$. В частности, $E_a(x) \equiv 0$, если вектор X имеет симметричное распределение. Мы можем выписать аналогичное представление для $E_a^{\bullet}(x) = \Theta_b^{\bullet}(Nx)$, $E_a^{\diamond}(x) = \Theta_b^{\diamond}(Nx)$ и $E_a'(x) = \Theta_b'(Nx)$ просто заменяя X на $X^{\bullet}$, $X^{\diamond}$ и X' в (1.13) или (1.15).

При $b \in \mathbb{R}^d$ введем функции распределения

$$\Psi_b(x) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}[Z_N - b] \leqslant x\big\} \tag{1.17}$$

и

$$\Phi_b(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\bigl\{\mathbb{Q}[\sqrt{N}\,G - b] \leqslant x\bigr\}. \tag{1.18}$$

Для $a \in \mathbb{R}^d$ и $b = \sqrt{N}\,a$ определим

$$\begin{aligned}\Delta_N^{(a)} &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\,F_a(x) - H_a(x) - E_a(x)\,\bigr| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\,\Psi_b(x) - \Phi_b(x) - \Theta_b(x)\,\bigr|\end{aligned} \tag{1.19}$$

(см. (1.12), (1.14), (1.17) и (1.18) для обоснования последнего равенства в (1.19)). Мы будем использовать обозначения $\Delta_{N,\bullet}^{(a)}$ и $\Delta_{N,\diamond}^{(a)}$, заменяя E_a на $E_a^\bullet$ и $E_a^\diamond$ в (1.19).

Цель данной статьи – вывести для $\Delta_N^{(a)}$ оценки порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$ без каких бы то ни было дополнительных предположений гладкости. Теорема 1.2 (доказанная в работе Бенткуса и Гётце [5]) дает решение этой задачи в случае $13 \leqslant d \leqslant \infty$.

В теоремах 1.2, 1.3 и 1.4 мы предполагаем, что симметричный оператор $\mathbb{Q}$ изометричен, то есть, что $\mathbb{Q}^2$ – тождественный оператор $\mathbb{I}_d$. Это не ограничивает общности (см. замечание 1.7 в работе [5]).

Теорема 1.2 ([5], теорема 1.3))**.** *Пусть* $\delta = 1/300$, $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d$, $s = 13$ *и* $13 \leqslant d \leqslant \infty$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *Предположим, что выполнено условие* $\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}_o, c_0\,G/\sigma)$. *Тогда*

$$\Delta_N^{(a)} \leqslant C\,\bigl(\Pi_3^\diamond + \Lambda_4^\diamond\bigr)\bigl(1 + \|a/\sigma\|^6\bigr) \tag{1.20}$$

и

$$\Delta_{N,\diamond}^{(a)} \leqslant C\,\bigl(\Pi_2^\diamond + \Lambda_4^\diamond\bigr)\bigl(1 + \|a/\sigma\|^6\bigr) \tag{1.21}$$

с $C = cp^{-6} + c(\sigma/\theta_8)^8$, *где* $\theta_1^4 \geqslant \theta_2^4 \geqslant \dots$ *– собственные числа оператора* $(\mathbb{C}\mathbb{Q})^2$.

(ii) *Предположим, что выполнено условие* $\mathcal{B}(\mathcal{S}_o, \mathbb{C})$. *Тогда постоянная в* (1.20) *и* (1.21) *удовлетворяет неравенству* $C \leqslant \exp\bigl\{c\sigma^2\lambda_{13}^{-2}\bigr\}$.

К сожалению, мы не можем применять теорему 1.2, когда размерность d принимает значения $d = 5, 6, \dots, 12$. Основной результат данной статьи – теорема 1.3. Она справедлива при $5 \leqslant d < \infty$ только в конечномерных пространствах $\mathbb{R}^d$. При этом оценки теоремы 1.3 зависят от минимального σ_d. Это делает их неустойчивыми, если хотя бы одна из координат вектора X вырождается.

Теорема 1.3. *Пусть* $\delta = 1/300$, $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d$, $s = 5$ *и* $5 \leqslant d < \infty$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *Предположим, что выполнено условие* $\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}_o, c_0\, G/\sigma)$. *Тогда*

$$\Delta_N^{(a)} \leqslant C\left(\sigma_d\,\sigma^{-1}\,\Pi_3^\bullet + \Lambda_4^\bullet\right)\left(1 + \|a/\sigma\|^3\right) \tag{1.22}$$

и

$$\Delta_{N,\bullet}^{(a)} \leqslant C\left(\sigma_d^2\,\sigma^{-2}\,\Pi_2^\bullet + \Lambda_4^\bullet\right)\left(1 + \|a/\sigma\|^3\right) \tag{1.23}$$

с $C = c_d\, p^{-3}\,(\sigma/\sigma_d)^4$.

(ii) *Предположим, что выполнено условие* $\mathcal{B}(\mathcal{S}_o, \mathbb{C})$. *Тогда постоянная в* (1.22) *и* (1.23) *удовлетворяет оценке* $C \leqslant c_d\,\sigma^4\,\sigma_d^{-4}\exp\bigl\{c\sigma^2/\lambda_5^2\bigr\}$.

Из теорем 1.2 и 1.3 вытекает теорема 1.1, поскольку $E_0(x) \equiv 0$,

$$\sigma_d\,\sigma^{-1}\,\Pi_3^\bullet + \Lambda_4^\bullet \leqslant \Pi_3^\diamond + \Lambda_4^\diamond \leqslant \beta_4/(\sigma^4\,N) \tag{1.24}$$

и

$$\sigma_d^2\,\sigma^{-2}\,\Pi_2^\bullet + \Lambda_4^\bullet \leqslant \Pi_2^\diamond + \Lambda_4^\diamond \leqslant \beta_4/(\sigma^4\,N). \tag{1.25}$$

Теорема 1.3 переносит на случай $d \geqslant 5$ теорему 1.5 из работы Бенткуса и Гётце [5], содержащую соответствующие оценки при $d \geqslant 9$. Кроме того, первые неравенства в (1.24) и (1.25) показывают, что теорема 1.3 несколько точнее, чем теорема 1.5 из работы [5], даже в случае $9 \leqslant d < \infty$. В работе [5] $\sigma_d\,\sigma^{-1}\,\Pi_3^\bullet + \Lambda_4^\bullet$ и $\sigma_d^2\,\sigma^{-2}\,\Pi_2^\bullet + \Lambda_4^\bullet$ заменены в (1.22) и (1.23) на $\Pi_3^\diamond + \Lambda_4^\diamond$ и $\Pi_2^\diamond + \Lambda_4^\diamond$ соответственно.

Если в условиях теоремы 1.3 распределение вектора X симметрично или $a = 0$, то поправки Эджворта $E_a(x)$ и $E_a^\bullet(x)$ тождественно равны нулю и

$$\begin{aligned}&\Delta_N^{(a)} = \Delta_{N,\bullet}^{(a)} \leqslant C\left(\sigma_d^2\,\sigma^{-2}\,\Pi_2^\bullet + \Lambda_4^\bullet\right)\left(1 + \|a/\sigma\|^3\right),\\ &\quad C = c_d\, p^{-3}\,(\sigma/\sigma_d)^4.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Соответствующее неравенство теоремы 1.4 из работы [5] дает в случае $s = 9$ и $9 \leqslant d \leqslant \infty$ оценку

$$\Delta_N^{(a)} \leqslant C\left(\Pi_2^\diamond + \Lambda_4^\diamond\right)\left(1 + \|a/\sigma\|^4\right), \qquad C = c\,p^{-4}. \tag{1.27}$$

Ясно, что иногда оценка (1.26) может быть точнее, чем (1.27), но, к сожалению, она зависит от минимального собственного числа σ_d.

В препринте [21] мы доказали теорему 1.3 в случае $a = 0$ и следовательно, теорему 1.1.

Оценки для постоянных в теоремах 1.2 и 1.3 не всегда оптимальны. Более точные оценки в случае d-мерных шаров при $d \geqslant 9$ можно найти в работах [11, 19, 28] и [29]. Оценки снизу для $\Delta_N^{(a)}$ при различных условиях на a и $\mathcal{L}(X)$ содержатся в работе [19]. В недавней работе [23] мы получили новые оценки для постоянных, из которых, впрочем, не вытекает результат теоремы 1.3 в полном объеме.

Заметим, что при доказательстве теоремы 1.2 в работе [5] неравенства (1.20) и (1.21) были выведены для поправки Эджворта $E_a(x)$, определенной формулой (1.13). Однако, из теорем 1.2 и 1.3 следует, что, по крайней мере при $13 \leqslant d < \infty$, формулы (1.13) и (1.14) определяют одну и ту же функцию $E_a(x)$. Действительно, каждая из функций, фигурирующих в этих формулах, может быть представлена в виде $N^{-1/2} K(x)$, где $K(x)$ – функция ограниченной вариации, не зависящая от N. Кроме того, неравенства (1.20) и (1.22) оба дают оценки порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$. Это возможно только если поправки Эджворта $E_a(x)$ в этих неравенствах совпадают. С другой стороны, известно, что формула (1.13) определяет функцию ограниченной вариации только при $d \geqslant 9$ (см. лемму 5.7 из работы [5]) в то время как определение (1.14) не имеет смысла при $d = \infty$.

Введем функцию концентрации

$$Q(X;\,\lambda) = \sup_{a,\,x\in\mathbb{R}^d} \mathbf{P}\bigl\{x \leqslant \mathbb{Q}[X-a] \leqslant x+\lambda\bigr\} \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant 0.$$

Теорема 1.4. *Пусть $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d$, $5 \leqslant s \leqslant d \leqslant \infty$, $s < \infty$ и $0 \leqslant \delta \leqslant 1/(5\,s)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *Если выполнено условие $\mathcal{N}(p,\delta,\mathcal{S}_o,\widetilde{X})$ с некоторым $p > 0$, то*

$$Q(Z_N;\,\lambda) \leqslant c_s\,(pN)^{-1}\,\max\bigl\{1;\,\lambda\bigr\}, \qquad \lambda \geqslant 0. \tag{1.28}$$

(ii) *Если выполнено условие $\mathcal{N}(p,\delta,\mathcal{S}_o,m^{-1/2}\,\widetilde{Z}_m)$ при некотором m, то*

$$Q(Z_N;\,\lambda) \leqslant c_s\,(pN)^{-1}\,\max\bigl\{m;\,\lambda\bigr\}, \qquad \lambda \geqslant 0. \tag{1.29}$$

Теорема 1.4 и более явная теорема 2.1 переносят на случай $d \geqslant 5$ утверждения теорем 1.6 и 2.1 из работы Бенткуса и Гётце [5], которые были доказаны при $d \geqslant 9$.

Мы завершим введение кратким описанием основных элементов доказательства. Прежде всего упомянем, что существенная часть доказательства повторяет рассуждения из работы Бенткуса и Гётце [5]. В частности, в работе [5] дано описание и применение неравенства симметризации, процедуры дискретизации и метода двойного большого решета из теории чисел. Мы не будем использовать мультипликативные неравенства из работы [5]. Мы заменим их применение использованием новых методов из теории чисел. Наиболее оригинальная часть доказательства сосредоточена в параграфах 4–7. По аналогии с работой [5], во втором параграфе мы докажем оценки для функций концентрации. Их доказательства технически проще доказательства теоремы 1.3, но уже используют наиболее важные новые методы. Эти доказательства близки к соответствующим доказательствам из работы [5]. Единственное различие состоит в использовании новой леммы 7.3, которая позволит нам оценить характеристические функции при больших значениях аргумента t. В параграфах 3 и 4 доказывается теорема 1.3. Мы заменим лемму 9.4 из работы [5] ее уточнением, содержащимся в лемме 4.1. Другое различие состоит в выборе $k \asymp_d \sigma_d^{-3} N^{1/4} \overline{\beta}^{3/4}$ в (4.30) и (4.31) вместо $k \asymp_d \sigma_d^{-2} \sqrt{N \overline{\beta}}$ в работе [5].

В параграфах 5–7 мы докажем оценки для характеристических функций. В начале пятого параграфа мы формулируем вспомогательные результаты из работы Бенткуса и Гётце [5] (леммы 5.1–5.3). Их доказательства в [5] основаны на использовании условных математических ожиданий, дискретизации и метода двойного большого решета.

Определим функции

$$\mathcal{M}(t;N) = \begin{cases} 1/\sqrt{|t|\,N} & \text{при } |t| \leqslant N^{-1/2}, \\ \sqrt{|t|} & \text{при } |t| \geqslant N^{-1/2}. \end{cases} \tag{1.30}$$

Легко видеть, что при $s > 0$

$$2^{-1}\big(|tN|^{-s/2} + |t|^{s/2}\big) \leqslant \mathcal{M}^s(t;N) \leqslant |tN|^{-s/2} + |t|^{s/2}. \tag{1.31}$$

Предполагая выполнение условия $\mathcal{N}(p,\delta,\mathcal{S}_o,\widetilde{X})$ с $0 \leqslant \delta \leqslant 1/(5s)$ и ортонормальной системой векторов $\mathcal{S}_o$, мы можем использовать лемму 5.2, из которой следует, что для любых $b \in \mathbb{R}^d$ и $t \in \mathbb{R}$

$$\big|\widehat{\Psi}_b(t)\big| = \big|\mathbf{E}\,\mathrm{e}\big\{t\,\mathbb{Q}[Z_N - b]\big\}\big| \ll_s \mathcal{M}^s(t;k), \qquad k = pN. \tag{1.32}$$

Неравенства типа (1.32) позволяют доказывать в теореме 1.1 только оценки погрешности $\mathcal{O}(N^{-\alpha})$ при некоторых $\alpha < 1$. Эта происходит из-за возможных осцилляций $\bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|$ между нулем и единицей, когда $|t| \sim N^{-\varepsilon}$ с малым $\varepsilon \geqslant 0$. В пятом параграфе мы сведем оценивание $\bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|$ к оцениванию тэта-функций (см. леммы 5.4, 5.6 и неравенство (5.25)). Для этого мы запишем математическое ожидание по отношению к случайным величинам с распределением Радемахера как сумму с биномиальными весами $p(m)$ и $p(\overline{m})$. Затем мы оценим $p(m)$ и $p(\overline{m})$ сверху дискретными гауссовскими экспоненциальными весами $c_s\, q(m)$ и $c_s\, q(\overline{m})$, см. (5.13), (5.16), (5.18) и (5.19). Вместе с неотрицательностью некоторых характеристических функций (см. (5.17) и (5.21)), это позволит нам применить формулу суммирования Пуассона из леммы 5.5. Эта формула сводит оценивание интегралов от $\bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|$ к оцениванию интегралов от тэта-функций. Шестой параграф посвящен изложению некоторых фактов из теории чисел. Мы рассматриваем решетки, их α-характеристики и последовательные минимумы по Минковскому. В седьмом параграфе мы сводим оценивание интегралов от тэта-функций к оцениванию интегралов от α-характеристик. Применение новой леммы 7.2, доказанной в работе Ф. Гётце и Г. А. Маргулиса [18], завершает доказательство.

2. Доказательства оценок для функций концентрации

Сформулируем сначала теорему 2.1, которая (при дополнительных ограничениях) дает более явные оценки для функций концентрации, чем оценки теоремы 1.4. В теореме 2.1 c_0 обозначает произвольную положительную абсолютную постоянную. Напомним также, что $\beta = \beta_4 = \mathbf{E}\, \|X\|^4$.

Теорема 2.1. *Предположим, что $5 \leqslant d \leqslant \infty$ и что оператор $\mathbb{Q}$ изометричен. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *Пусть выполняется условие $\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}_o, c_0\, G/\sigma)$ с $s = 5$ и $\delta = 1/200$. Тогда*

$$Q(Z_N;\, \lambda) \ll p^{-2} \max\bigl\{\Pi_2^\diamond + \Lambda_4^\diamond;\, \lambda\sigma^{-2} N^{-1}\bigr\}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{2.1}$$

и, следовательно, $Q(Z_N;\, \lambda) \ll p^{-2} N^{-1} \max\bigl\{\beta\,\sigma^{-4};\, \lambda\sigma^{-2}\bigr\}$.

(ii) *Пусть выполняется условие $\mathcal{B}(\mathcal{S}_o, \mathbb{C})$ с $s = 5$. Тогда*

$$Q(Z_N;\, \lambda) \ll \exp\bigl\{c\sigma^2/\lambda_5^2\bigr\} \max\bigl\{\Pi_2^\diamond + \Lambda_4^\diamond;\, \lambda\sigma^{-2} N^{-1}\bigr\}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где c – достаточно большая абсолютная постоянная.

Доказательство теорем 1.4 и 2.1. Ниже мы докажем следующие утверждения: (1.28); (1.28) $\Longrightarrow$ (1.29); (1.29) $\Longrightarrow$ (2.1) и (2.1) $\Longrightarrow$ (2.2). Их доказательства близки к соответствующим доказательствам из работы Бенткуса и Гётце [5]. Они приводятся здесь для полноты изложения. Единственное существенное различие состоит в использовании леммы 7.3 в доказательстве леммы 2.2. $\square$

Для $T \geqslant t_0$, $t_1 \geqslant 0$ и $b \in \mathbb{R}^d$ определим интегралы

$$I_0 = \int_{-t_1}^{t_1} \bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|\,dt, \quad I_1 = \int_{t_0 \leqslant |t| \leqslant T} \bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|\,\frac{dt}{|t|},$$

где

$$\widehat{\Psi}_b(t) = \mathbf{E}\,\mathrm{e}\bigl\{t\,\mathbb{Q}[Z_N - b]\bigr\} \tag{2.3}$$

(см. (1.11) и (1.17)). Заметим, что $\bigl|\widehat{\Psi}_b(-t)\bigr| = \bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|$.

Лемма 2.2. *Предположим, что выполняется условие $\mathcal{N}(p,\delta,\mathcal{S}_o,\widetilde{X})$ с некоторыми $0 \leqslant \delta \leqslant 1/(5s)$ и $s \geqslant 5$. Пусть*

$$t_0 = c_1(s)\,(pN)^{-1+2/s}, \quad t_1 = c_2(s)\,(pN)^{-1/2}, \quad c_3(s) \leqslant T \leqslant c_4(s) \tag{2.4}$$

с некоторыми положительными постоянными $c_j(s)$, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Тогда

$$I_0 \ll_s (pN)^{-1}, \qquad I_1 \ll_s (pN)^{-1}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Обозначим $k = pN$. Не нарушая общности, предположим, что $k \geqslant c_s$ с достаточно большой постоянной c_s. Действительно, если $k \leqslant c_s$, то (2.5) вытекает из $|\widehat{\Psi}_b| \leqslant 1$. Выбирая c_s достаточно большим, мы обеспечиваем то, что из $k \geqslant c_s$ следует $1/k \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant T$.

Докажем неравенство (2.5) для I_0. Согласно лемме 5.2 и поскольку $|\widehat{\Psi}_b| \leqslant 1$, справедливо неравенство

$$\bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr| \ll_s \min\bigl\{1;\, \mathcal{M}^s(t;k)\bigr\}, \qquad k = pN. \tag{2.6}$$

Кроме того, обозначая $t_2 = k^{-1/2}\,\max\{1; c_2(s)\}$ и используя (1.30), мы получаем

$$I_0 \ll_s \int_0^{1/k} dt + \int_{1/k}^{\infty} \frac{dt}{(tk)^{s/2}} + \int_0^{t_2} t^{s/2}\,dt = \frac{1}{k} + \frac{c_s}{k} + \frac{c_s}{k^{(s+2)/4}} \ll_s \frac{1}{k}.$$

Тем самым, доказано неравенство (2.5) для I_0.

Остается оценить I_1. Пользуясь (1.31), (2.4) и (2.6), легко убедиться в том, что

$$\int_{t_0}^{k^{-2/s}} \left|\widehat{\Psi}_b(t)\right| \frac{dt}{t} \ll_s \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt}{t\,(t\,k)^{s/2}} + \int_0^{k^{-2/s}} t^{s/2-1}\,dt \ll_s \frac{1}{k}. \tag{2.7}$$

Кроме того, $T \asymp_s 1$ (см. (2.4)). Из леммы 7.3 следует теперь то, что

$$\int_{c_5(s)k^{-1}}^{T} \left|\widehat{\Psi}_b(t)\right| \frac{dt}{t} \ll_s \frac{1}{k} \tag{2.8}$$

с некоторым $c_5(s)$, и $c_5(s)\,k^{-1} < k^{-2/s}$, если $k \geqslant c_s$ с достаточно большим c_s. Второе неравенство в (2.5) следует из (2.7) и (2.8). □

Доказательство (1.28)**.** Пользуясь хорошо известным неравенством для функций концентрации (см., например, [30], лемма 3 гл. 3), мы имеем

$$Q(Z_N;\,\lambda) \leqslant 4 \sup_{b\in\mathbb{R}^d} \max\Big\{\lambda;\ \frac{1}{T}\Big\} \int_0^T \left|\widehat{\Psi}_b(t)\right| dt \tag{2.9}$$

для любого $T > 0$. Чтобы оценить интеграл в (2.9), мы применим лемму 2.2. Выберем $T = 1$. Не нарушая общности, предположим, что $pN \geqslant 1$. Тогда

$$\int_0^T \left|\widehat{\Psi}_b(t)\right| dt \leqslant \int_0^{(pN)^{-1/2}} \left|\widehat{\Psi}_b(t)\right| dt + \int_{(pN)^{-1/2}}^{1} \left|\widehat{\Psi}_b(t)\right| \frac{dt}{|t|} \overset{\text{def}}{=} J_0 + J_1.$$

Из леммы 2.2 вытекают оценки $J_0 \ll_s 1/(pN)$, $J_1 \ll_s 1/(pN)$ и, следовательно, неравенство (1.28). □

Доказательство (1.28) $\Longrightarrow$ (1.29)**.** Не нарушая общности, предположим, что $N/m \geqslant 2$. Пусть $Y_1, Y_2, \ldots$ – независимые копии случайных векторов $m^{-1/2}\,Z_m$. Обозначим $W_k = Y_1 + \cdots + Y_k$. Тогда $\mathcal{L}(Z_N) = \mathcal{L}(\sqrt{m}\,W_k + y)$ с $k = \lceil N/m \rceil$ и с некоторым y, не зависящим от W_k. Поэтому $Q(Z_N;\lambda) \leqslant Q(W_k;\lambda/m)$. Чтобы оценить $Q(W_k;\lambda/m)$, применим (1.28), заменяя Z_N на W_k. Тогда мы получим

$$Q(W_k;\lambda/m) \ll_s (pk)^{-1}\max\{1;\,\lambda/m\} \ll_s (pN)^{-1}\max\{m;\,\lambda\}. \qquad \square$$

Напомним, что урезанные случайные векторы и их моменты были определены равенствами (1.4)–(1.7) и $\mathbb{C} = \operatorname{cov} X = \operatorname{cov} G$.

Лемма 2.3. *Моменты случайных векторов $X^\bullet$ и $X_\bullet$ удовлетворяют равенству $\langle \mathbb{C}x, x\rangle = \langle \operatorname{cov} X^\bullet x, x\rangle + \mathbf{E}\langle X_\bullet, x\rangle^2 + \langle \mathbf{E}\, X^\bullet, x\rangle^2$. Кроме того, существуют такие независимые центрированные гауссовские векторы G_* и W, что $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_* + W)$ и*

$$2\operatorname{cov} G_* = 2\operatorname{cov} X^\bullet = \operatorname{cov} \widetilde{X^\bullet}, \qquad \langle \operatorname{cov} W x, x\rangle = \mathbf{E}\langle X_\bullet, x\rangle^2 + \langle \mathbf{E}\, X^\bullet, x\rangle^2.$$

Кроме того, $\mathbf{E}\,\|G\|^2 = \mathbf{E}\,\|G_*\|^2 + \mathbf{E}\,\|W\|^2$ и $\mathbf{E}\,\|W\|^2 \leqslant 2\sigma^2\,\Pi_2^\bullet$.

Мы опускаем простое доказательство этой леммы (лемма 2.4 из работы [5] представляет собой то же самое утверждение с $\diamond$ вместо $\bullet$). Лемма 2.3 дает нам возможность определить вектор X' равенством (1.10).

Лемма 2.4 ([5], лемма 5.3). *Пусть $\delta > 0$. Предположим, что распределение случайного вектора X симметрично. Тогда существует такая абсолютная положительная постоянная c, что из условия $\mathcal{N}(2p,\delta,\mathcal{S},G)$ следует выполнение условия $\mathcal{N}(p,2\delta,\mathcal{S},S_m)$ при $m \geqslant c\beta/(p\delta^4)$.*

Лемма 2.5 ([5], лемма 5.4). *Предположим, что $0 < 4\varepsilon \leqslant \delta \leqslant 1$. Пусть $e \in \mathbb{R}^d$, $\|e\| = 1$, – собственный вектор ковариационного оператора $\mathbb{C} = \operatorname{cov} G$, для которого $\mathbb{C}e = \sigma_e e$ с некоторым $\sigma_e > 0$. Тогда вероятность $p_e = \mathbf{P}\bigl\{\|\varepsilon\sigma^{-1}G - e\| \leqslant \delta\bigr\}$ удовлетворяет неравенству $p_e \geqslant \exp\bigl\{-c\sigma^2\varepsilon^{-2}\sigma_e^{-2}\bigr\}$ с некоторой абсолютной положительной постоянной c.*

Напомним, что обозначения $Z_N^\bullet$ и $Z_N^\diamond$ применяются для сумм N независимых копий векторов $X^\bullet$ и $X^\diamond$ соответственно.

Лемма 2.6. *Пусть $\varepsilon > 0$. Существуют такие абсолютные положительные постоянные c и c_1, что*

(i) *из выполнения условия $\Pi_2^\bullet \leqslant c_1 p\delta^2/(\varepsilon^2\sigma^2)$ вытекает, что*

$$\mathcal{N}(p,\delta,\mathcal{S},\varepsilon G) \Longrightarrow \mathcal{N}(p/4, 4\delta, \mathcal{S}, \varepsilon(2m)^{-1/2}\widetilde{Z_m^\bullet}),$$

при $m \geqslant c\varepsilon^4\sigma^4 N\,\Lambda_4^\bullet/(p\delta^4)$.

(ii) *утверждение пункта* (i) *справедливо также с заменой* $\bullet$ *на* $\diamond$.

Доказательство. Утверждение (ii) доказано в лемме 2.5 из работы [5]. Мы повторим это доказательство для пункта (i).

Утверждение (i) следует из соотношений (2.10)–(2.11), выписанных ниже, поскольку p, δ и ε в этих соотношениях произвольны и $\mathbf{E}\,\|\widetilde{X^\bullet}\|^4 \leqslant 16\,\mathbf{E}\,\|X^\bullet\|^4 = 16\,N\sigma^4\Lambda_4^\bullet$.

Для гауссовского вектора G_*, определенного в лемме 2.3, мы имеем

$$\mathcal{N}(2p,\delta,\mathcal{S},\varepsilon G) \Longrightarrow \mathcal{N}(p,2\delta,\mathcal{S},\varepsilon G_*), \quad \text{если } \Pi_2^\bullet \leqslant p\delta^2/(2\varepsilon^2\sigma^2). \tag{2.10}$$

Если $m \geqslant c\varepsilon^4\mathbf{E}\,\|\widetilde{X^\bullet}\|^4/(p\delta^4)$ с достаточно большой абсолютной постоянной c, то

$$\mathcal{N}(2p,\delta,\mathcal{S},\varepsilon G_*) \Longrightarrow \mathcal{N}(p,2\delta,\mathcal{S},\varepsilon\,(2m)^{-1/2}\,\widetilde{Z_m^\bullet}). \tag{2.11}$$

Докажем (2.10). Для $e \in \mathbb{R}^d$ определим p_e равенством $2p_e = \mathbf{P}\big\{\,\|\varepsilon G - e\| < \delta\big\}$. Предполагая, что $\Pi_2^\bullet \leqslant p_e\delta^2/(2\varepsilon^2\sigma^2)$, достаточно доказать, что $\mathbf{P}\big\{\,\|\varepsilon G_* - e\| < 2\delta\big\} \geqslant p_e$. Заменяя δ на δ/ε и e на e/ε, мы можем предполагать, что $\varepsilon = 1$. Применяя лемму 2.3, мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big\{\,\|G_* - e\| < 2\delta\big\} &\geqslant \mathbf{P}\big\{\,\|W\| + \|G - e\| < 2\delta\big\} \\
&\geqslant \mathbf{P}\big\{\,\|W\| < \delta \text{ и } \|G - e\| < \delta\big\} \\
&\geqslant 2p_e - \mathbf{P}\big\{\,\|W\| \geqslant \delta\big\} \\
&\geqslant 2p_e - \delta^{-2}\mathbf{E}\,\|W\|^2 \geqslant 2p_e - 2\delta^{-2}\sigma^2\,\Pi_2^\bullet \geqslant p_e.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает (2.10).

Докажем (2.11). Заметим, что $\operatorname{cov}\big(\varepsilon\,\widetilde{X^\bullet}/\sqrt{2}\big) = \operatorname{cov}(\varepsilon G_*)$. Поэтому для доказательства (2.11) достаточно применить лемму 5.3 из работы [5], заменяя в ней X на $\varepsilon\,\widetilde{X^\bullet}/\sqrt{2}$. $\square$

Доказательство (1.29) $\Longrightarrow$ (2.1)**.** Согласно хорошо известному неравенству для урезанных векторов,

$$\big|\,\mathbf{P}\big\{\,Z_N \in A\,\big\} - \mathbf{P}\big\{\,Z_N^\diamond \in A\,\big\}\,\big| \leqslant N\,\mathbf{P}\big\{\,\|X\| > \sigma\sqrt{N}\,\big\} \leqslant \Pi_2^\diamond \tag{2.12}$$

для любого измеримого множества A. Применяя (2.12) к множествам $A = \big\{\,x : \mathbb{Q}[x-a] \in [x, x+\lambda]\,\big\}$, получаем, что

$$Q(Z_N,\lambda) \leqslant \Pi_2^\diamond + Q(Z_N^\diamond,\lambda). \tag{2.13}$$

Напомним, что мы доказываем (2.1), предполагая, что $s = 5$ и $\delta = 1/200$. Следовательно, $4\delta = 1/50 < 1/(5s)$. Положим $K = \varepsilon/\sqrt{2}$ с $\varepsilon = c_0/\sigma$. Тогда, в силу леммы 2.6, мы имеем

$$\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}_o, \varepsilon G) \Longrightarrow \mathcal{N}(p/4, 4\delta, \mathcal{S}_o, m^{-1/2}\, K\, \widetilde{Z_m^{\diamond}}), \tag{2.14}$$

если

$$\Pi_2^{\diamond} \leqslant c_1 p, \qquad m \geqslant cN\, \Lambda_4^{\diamond}/p. \tag{2.15}$$

Не нарушая общности, мы можем предполагать, что $\Pi_2^{\diamond}/p \leqslant c_1$, поскольку в противном случае результат легко следует из тривиальной оценки $Q(Z_N; \lambda) \leqslant 1$.

Выполнение условия невырожденности (2.14) для $K\, \widetilde{Z_m^{\diamond}}$ дает возможность применить неравенство (1.29) теоремы 1.4, согласно которому

$$Q(Z_N^{\diamond}, \lambda) = Q(K\, Z_N^{\diamond}, K^2\, \lambda) \ll (pN)^{-1} \max\{m;\ K^2\, \lambda\}$$

для любого m, для которого выполнено (2.15). Выбирая минимальное m в (2.15), мы получаем

$$Q(Z_N^{\diamond}, \lambda) \ll p^{-2} \max\{\Lambda_4^{\diamond};\ \lambda/(\sigma^2\, N)\}. \tag{2.16}$$

Объединяя оценки (2.13) и (2.16), мы завершаем доказательство. □

Доказательство (2.1) $\Longrightarrow$ (2.2)**.** Заметим, что оценка (2.1) справедлива с p из условия $\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}_o, c_0\, G/\sigma)$. Выберем $4c_0 = \delta = 1/200$. Тогда, используя лемму 2.5 и предположение $\mathcal{B}(\mathcal{S}_o, \mathbb{C})$, мы получаем оценку снизу $p \geqslant \exp\bigl\{c\sigma^2/\lambda_5^2\bigr\}$. □

3. Вспомогательные леммы

В параграфах 3 и 4 мы докажем теорему 1.3. Поэтому мы предположим, что ее условия выполнены. Мы рассматриваем случай, когда размерность d конечна и выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered} \mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d, \quad \sigma^2 = 1, \quad s = 5, \\ \delta = 1/300, \quad b = \sqrt{N}\, a, \quad \mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}_o, c_0\, G). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Заметим, что предположение $\sigma^2 = 1$ не нарушает общности, поскольку из теоремы 1.3 с $\sigma^2 = 1$ мы можем вывести общий результат, заменяя X, G на X/σ, G/σ и т. д. Другие предположения из (3.1) содержатся в условиях теоремы 1.3. Третий параграф посвящен вспомогательным леммам, аналогичным соответствующим леммам из работы Бенткуса и Гётце [5].

В некоторых местах доказательство теоремы 1.3 почти буквально повторяет доказательство теоремы 1.5 в работе [5]. Заметим, впрочем, что мы будем использовать урезанные векторы $X_j^\bullet$, в то время как в работе [5] использовались векторы $X_j^\diamond$. Мы начнем с применения преобразования Фурье к функциям Ψ_b и Φ_b, где $b = \sqrt{N}\,a$. Мы будем оценивать интегралы от преобразования Фурье, используя результаты параграфов 2, 5–7 и некоторые технические леммы из работы [5]. Мы будем также применять стандартные методы оценивания точности аппроксимации в центральной предельной теореме в многомерных пространствах (см., например, [10]).

Мы будем использовать формулы обращения для преобразования Фурье (см. [5]). Из неравенства сглаживания Правица [31] следует (см. [4, параграф 4])), что

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{V.P.}\int\limits_{|t|\leqslant K} \mathrm{e}\bigl\{-xt\bigr\}\widehat{F}(t)\,\frac{dt}{t} + R \tag{3.2}$$

для любого $K > 0$ и любой функции распределения F с характеристической функцией $\widehat{F}$ (см. (1.11)), где

$$|R| \leqslant \frac{1}{K}\int\limits_{|t|\leqslant K} |\widehat{F}(t)|\,dt.$$

Здесь $\mathrm{V.P.}\int f(t)\,dt = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon} f(t)\,dt$ обозначает главное значение интеграла.

Напомним, что случайные векторы $X^\bullet$ и X' определены в (1.5) и (1.10), а $Z_N^\bullet$ и Z_N' – суммы N независимых копий этих векторов. Обозначим через $\Psi_b^\bullet$ и Ψ_b' функции распределения случайных величин $\mathbb{Q}[Z_N^\bullet - b]$ и $\mathbb{Q}[Z_N' - b]$ соответственно. При $0 \leqslant k \leqslant N$ введем функции распределения

$$\Psi_b^{(k)}(x) = \mathbf{P}\bigl\{\mathbb{Q}\bigl[G_1 + \dots + G_k + X_{k+1}' + \dots + X_N' - b\bigr] \leqslant x\bigr\}. \tag{3.3}$$

Заметим, что $\Psi_b^{(0)} = \Psi_b'$, $\Psi_b^{(N)} = \Phi_b$.

Доказательство следующей ниже леммы близко к доказательству леммы 3.1 из работы [5]. Отличие состоит в том, что мы используем урезанные векторы $X_j^\bullet$ вместо $X_j^\diamond$.

Лемма 3.1. *Пусть* $\Pi_2^\bullet \leqslant c_1 p$ *и пусть целое число* $1 \leqslant m \leqslant N$ *удовлетворяет соотношению* $m \geqslant c_2 N \Lambda_4^\bullet / p$ *с некоторой достаточно малой (соответственно большой) положительной абсолютной постоянной* c_1 *(соответственно* c_2*). Пусть* c_3 *– положительная абсолютная постоянная. Положим* $K = c_0^2/(2m)$ *и* $t_1 = c_3\,(pN/m)^{-1/2}$*. Пусть* F *обозначает любую из функций* $\Psi_b^\bullet$*,* Ψ_b'*,* $\Psi_b^{(k)}$ *или* Φ_b*. Тогда мы имеем*

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{V.P.}\int\limits_{|t|\leqslant t_1} \mathrm{e}\{-xtK\}\,\widehat{F}(tK)\,\frac{dt}{t} + R_1 \tag{3.4}$$

с $|R_1| \ll (pN)^{-1}\,m$*.*

Доказательство. Докажем (3.4). Мы будем применять (3.2) вместе с леммой 2.2. Делая замену переменной $t = \tau K$ в приближенной формуле обращения для преобразования Фурье (3.2), мы получаем

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi}\,\mathrm{V.P.}\int\limits_{|t|\leqslant 1} \mathrm{e}\{-xtK\}\,\widehat{F}(tK)\,\frac{dt}{t} + R, \tag{3.5}$$

где

$$|R| \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant 1} \bigl|\widehat{F}(tK)\bigr|\,dt. \tag{3.6}$$

Заметим, что $\Psi^\bullet$, Ψ', $\Psi^{(k)}$ и Φ_b являются функциями распределения случайных величин, которые могут быть записаны в виде $\mathbb{Q}[V+T]$, где

$$V \overset{\mathrm{def}}{=} G_1 + \cdots + G_k + X_{k+1}^\bullet + \cdots + X_N^\bullet$$

с некоторыми k, $0 \leqslant k \leqslant N$, и некоторыми случайными векторами T, не зависящими от совокупности векторов $X_j^\bullet$ и G_j, $j = 1, 2, \dots, N$. Рассмотрим по отдельности два возможных случая: $k \geqslant N/2$ и $k < N/2$.

Случай $k < N/2$. Пусть Y обозначает сумму m независимых копий вектора $K^{1/2} X^\bullet$. Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ – независимые копии вектора Y. Тогда

$$\mathcal{L}(K^{1/2} V) = \mathcal{L}(Y_1 + \cdots + Y_l + T_1) \tag{3.7}$$

с $l = \lceil N/(2m) \rceil$ и некоторым случайным вектором T_1, не зависящим от $Y_1, \dots, Y_l$. Согласно лемме 2.6, мы имеем

$$\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}, c_0 G) \Longrightarrow \mathcal{N}(p/4, 4\delta, \mathcal{S}, \widetilde{Y}), \tag{3.8}$$

если
$$\Pi_2^\bullet \leqslant c_1 p \qquad \text{и} \qquad m \geqslant c_2 N \Lambda_4^\bullet / p. \tag{3.9}$$
Неравенства (3.9) входят в условия леммы 3.1. В силу (3.1), (3.7) и (3.8), мы можем применить лемму 2.2, чтобы оценить интегралы в (3.5) и (3.6). Заменяя в лемме 2.2 X на Y и N на l, мы получим (3.4) в случае $k < N/2$.

Случай $k \geqslant N/2$. Мы можем рассуждать так же как в предыдущем случае, определяя теперь Y как сумму m независимых копий вектора $K^{1/2}G$. Условие $\mathcal{N}(p/4, 4\delta, \mathcal{S}_o, \widetilde{Y})$ выполнено в силу (3.1), поскольку теперь $\mathcal{L}(\widetilde{Y}) = \mathcal{L}(c_0 G)$. $\square$

Следуя работе [5], введем оценки сверху $\varkappa\big(t; N, \mathcal{L}(X), \mathcal{L}(G)\big)$ для характеристических функций квадратичных форм (см. [1] и [9]). Мы определяем $\varkappa\big(t; N, \mathcal{L}(X), \mathcal{L}(G)\big) = \varkappa\big(t; N, \mathcal{L}(X)\big) + \varkappa\big(t; N, \mathcal{L}(G)\big)$, где
$$\begin{gathered} \varkappa(t; N, \mathcal{L}(X)) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \big| \mathbf{E}\, \mathrm{e}\big\{ t\mathbb{Q}[Z_j] + \langle x, Z_j \rangle \big\} \big|, \\ Z_j = X_1 + \dots + X_j \end{gathered} \tag{3.10}$$
с $j = \lceil (N-2)/14 \rceil$. В дальнейшем мы будем использовать то, что
$$\varkappa(t; N, \mathcal{L}(X'), \mathcal{L}(G)) \leqslant \varkappa(t; N, \mathcal{L}(X^\bullet), \mathcal{L}(G)). \tag{3.11}$$
Для доказательства достаточно заметить, что $X' = X^\bullet - \mathbf{E}\, X^\bullet + W$, причем W не зависит от $X^\bullet$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия леммы* 3.1. *Тогда*
$$\int\limits_{|t| \leqslant t_1} \big(|t| K\big)^\alpha \varkappa\big(tK; N, \mathcal{L}(X^\bullet), \mathcal{L}(G)\big) \,\frac{dt}{|t|}$$
$$\ll_\alpha \begin{cases} (Np)^{-\alpha}, & \text{\textit{при} } 0 \leqslant \alpha < s/2, \\ (Np)^{-\alpha} \big(1 + |\log(Np/m)|\big), & \text{\textit{при} } \alpha = s/2, \\ (Np)^{-\alpha} \big(1 + (Np/m)^{(2\alpha - s)/4}\big), & \text{\textit{при} } \alpha > s/2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Лемма 3.2 является обобщением леммы 3.2 из работы [5], содержащей ту же самую оценку при $0 \leqslant \alpha < s/2$.

Доказательство леммы 3.2. Согласно (3.1) и (3.8), выполнено условие $\mathcal{N}(p/4, 4\delta, \mathcal{S}_o, K^{1/2}\widetilde{Z_m^\bullet})$. Поэтому, объединяя независимые копии $K^{1/2}X^\bullet$ в группы так же как в (3.7), мы можем применить теорему 5.2. Согласно этой теореме, $\varkappa(tK; N, \mathcal{L}(X^\bullet)) \ll \mathcal{M}^s(t; pN/m)$.

Аналогичная оценка сверху справедлива для $\varkappa(tK; N, \mathcal{L}(G))$ (см. доказательство (3.4) в случае $k > N/2$). Пользуясь определением (1.30) функции $\mathcal{M}(\cdot\,,\cdot)$ и неравенствами (1.31), мы получаем

$$\varkappa(tK; N, \mathcal{L}(X^\bullet), \mathcal{L}(G)) \ll_s \min\bigl\{1;\ \bigl(m/(tpN)\bigr)^{s/2}\bigr\} \quad \text{при} \quad |t| \leqslant t_1.$$

Интегрируя эту оценку (см. оценивание I_1 в лемме 2.2), мы получаем неравенство (3.12). $\square$

4. Доказательство теоремы 1.3

Чтобы упростить обозначения, в четвертом параграфе мы будем писать $\Pi = \Pi_2^\bullet$ и $\Lambda = \Lambda_4^\bullet$. Из предположения $\sigma^2 = 1$ и соотношений (1.7) и (1.9) вытекают неравенства

$$\Pi + \Lambda\, N \gg 1, \qquad \Pi + \Lambda \leqslant 1, \qquad \sigma_j^2 \leqslant 1, \qquad \lambda_j^2 \leqslant 1. \tag{4.1}$$

Напомним, что $\Delta_N^{(a)}$ и функции Ψ_b, Φ_b и Θ_b определены соотношениями (1.14) и (1.17)–(1.19). Заметим теперь, что $\Theta_b^\bullet(x) = E_a^\bullet(x/N)$ и, в соответствии с (1.19),

$$\Delta_N^{(a)} \leqslant \Delta_{N,\bullet}^{(a)} + \sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\Theta_b(x) - \Theta_b^\bullet(x)\bigr|, \tag{4.2}$$

где $b = \sqrt{N}\, a$ и

$$\Delta_{N,\bullet}^{(a)} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\Psi_b(x) - \Phi_b(x) - \Theta_b^\bullet(x)\bigr|. \tag{4.3}$$

Убедимся в том, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\Theta_b(x) - \Theta_b^\bullet(x)\bigr| \ll_d \sigma_d^{-3}\, \Pi_3^\bullet. \tag{4.4}$$

Для этого мы используем представление (1.14)–(1.15) поправки Эджворта как знакопеременной меры и оценим вариацию этой меры. Действительно, пользуясь (1.14), мы имеем

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\Theta_b(x) - \Theta_b^\bullet(x)\bigr| \ll N^{-1/2}\, I, \\ &I \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \bigl|\mathbf{E}\, p'''(x)X^3 - \mathbf{E}\, p'''(x)X^{\bullet 3}\bigr|\, dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Согласно явной формуле (1.16), функция $u \mapsto p'''(x)u^3$ является 3-линейной формой от переменной u. Поэтому, используя соотношения $\|\mathbb{C}^{-1/2}u\| \leqslant \sigma_d^{-1}\,\|u\|$, $X = X^\bullet + X_\bullet$ и $\|X^\bullet\|\,\|X_\bullet\| = 0$, мы имеем $p'''(x)X^3 - p'''(x)X^{\bullet 3} = p'''(x)X_\bullet^3$ и

$$N^{-1/2}\,I \leqslant 3\,\Pi_3^\bullet\,\sigma_d^{-3}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\bigl(\|\mathbb{C}^{-1/2}x\| + \|\mathbb{C}^{-1/2}x\|^3\bigr)p(x)dx = c_d\,\Pi_3^\bullet\,\sigma_d^{-3}. \quad (4.6)$$

Из неравенств (4.5) и (4.6) теперь вытекает (4.4).

Чтобы доказать утверждение (i) теоремы 1.3, мы покажем, что

$$\Delta_{N,\bullet}^{(a)} \ll_d p^{-3}\,\sigma_d^{-2}\,(\Pi + \Lambda\,\sigma_d^{-2})(1 + \|a\|)^3. \quad (4.7)$$

При доказательстве (4.7) мы предположим, что

$$\Pi \leqslant c_d p\,\sigma_d^2, \qquad \Lambda \leqslant c_d p\,\sigma_d^4 \quad (4.8)$$

с достаточно малой положительной постоянной c_d, зависящей только от d. Эти предположения не ограничивают общности. Действительно, мы имеем $\bigl|\Psi_b(x) - \Phi_b(x)\bigr| \leqslant 1$. Если условия (4.8) не выполнены, то из оценки

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\Theta_b^\bullet(x)\bigr| \ll_d N^{-1/2}\,\mathbf{E}\,\|\mathbb{C}^{-1/2}X^\bullet\|^3 \ll_d \sigma_d^{-2}\Lambda^{1/2} \quad (4.9)$$

непосредственно следует (4.7). Чтобы доказать (4.9), мы можем использовать представление (1.14)–(1.15) для поправки Эджворта. Оценивая вариацию этой меры и используя соотношения

$$\begin{gathered}\beta_3^2 \leqslant \sigma^2\beta, \quad \|\mathbb{C}^{-1/2}u\| \leqslant \sigma_d^{-1}\,\|u\|,\\ \mathbf{E}\,\|\mathbb{C}^{-1/2}X^\bullet\|^2 \leqslant \mathbf{E}\,\|\mathbb{C}^{-1/2}X\|^2 = d,\end{gathered} \quad (4.10)$$

мы получаем (4.9).

Ясно, что

$$\begin{aligned}\Delta_{N,\bullet}^{(a)} \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl(&\bigl|\Psi_b(x) - \Psi_b'(x)\bigr|\\ &+ \bigl|\Theta_b^\bullet(x) - \Theta_b'(x)\bigr| + \bigl|\Psi_b'(x) - \Phi_b(x) - \Theta_b'(x)\bigr|\bigr).\end{aligned} \quad (4.11)$$

По аналогии с (4.5), мы имеем

$$\begin{gathered}\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\Theta_b^{\bullet}(x)-\Theta_b'(x)\bigr|\ll N^{-1/2}\,J,\\ J\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\bigl|\mathbf{E}\,p'''(x)X^{\bullet 3}-\mathbf{E}\,p'''(x)X'^{3}\bigr|\,dx.\end{gathered}\tag{4.12}$$

Напомним, что вектор X' определен равенством (1.10). Согласно лемме 2.3, мы имеем $\mathbf{E}\,\|W\|^2\leqslant 2\Pi$ (следовательно, $\mathbf{E}\,\|W\|^q\ll\Pi^{q/2}$, при $0\leqslant q\leqslant 2$). Кроме того, представляя W как сумму большого числа н.о.р. гауссовских слагаемых и используя неравенство Розенталя (см. [5, неравенство (1.24)]), легко видеть, что

$$\mathbf{E}\,\|W\|^q\ll_q\bigl(\mathbf{E}\,\|W\|^2\bigr)^{q/2}\ll_q\Pi^{q/2},\quad q\geqslant 0.\tag{4.13}$$

Кроме того, в соответствии с (1.7), (1.9) и (4.8),

$$\mathbf{E}\,\|X_\bullet\|\leqslant\Pi\,\sigma_d^{-1}\,N^{-1/2}\ll\Pi^{1/2}\,N^{-1/2}.\tag{4.14}$$

Следовательно, согласно (1.7), (1.10), (4.13) и (4.14),

$$\overline{\beta}\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbf{E}\,\|X'\|^4\ll N\,\Lambda+\Pi^2.\tag{4.15}$$

Пользуясь (1.16), (4.8), (4.10) и (4.12)–(4.14), мы получаем

$$\begin{aligned}N^{-1/2}\,J&\ll\Pi^{1/2}(N^{-1/2}\,\Pi+\Lambda^{1/2})\,\sigma_d^{-3}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\bigl(\|\mathbb{C}^{-1/2}x\|+\|\mathbb{C}^{-1/2}x\|^3\bigr)\,p(x)\,dx\\ &\ll_d(\Pi+\Lambda\,\sigma_d^{-2})\,\sigma_d^{-2}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Таким образом, в соответствии с (4.12) и (4.16),

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\Theta_b^{\bullet}(x)-\Theta_b'(x)\bigr|\ll_d(\Pi+\Lambda\,\sigma_d^{-2})\,\sigma_d^{-2}.\tag{4.17}$$

Тот же подход применим и для оценивания $\bigl|\Theta_b'\bigr|$. Пользуясь (1.10), (1.14)–(1.16), (4.10) и (4.13), мы получаем

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\Theta_b'(x)\bigr|&\ll N^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\bigl|\mathbf{E}\,p'''(x)X'^{3}\bigr|\,dx\\ &\ll_d\Lambda^{1/2}\,\sigma_d^{-2}+N^{-1/2}\,\Pi^{3/2}\,\sigma_d^{-3}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Докажем, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\Psi_b(x)-\Psi_b'(x)\bigr| \ll p^{-2}\,(\Pi\sigma_d^{-2}+\Lambda)(1+\|a\|^2). \tag{4.19}$$

Пользуясь неравенством для урезанных векторов (см. (1.9) и (2.12)), мы имеем $|\Psi_b-\Psi_b^\bullet|\leqslant \Pi\sigma_d^{-2}$ и

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\Psi_b(x)-\Psi_b'(x)\bigr| \leqslant \Pi\sigma_d^{-2}+\sup_{x\in\mathbb{R}} \bigl|\Psi_b^\bullet(x)-\Psi_b'(x)\bigr|. \tag{4.20}$$

Чтобы оценить $|\Psi_b^\bullet-\Psi_b'|$, мы применим леммы 3.1 и 3.2. Число m из этих лемм существует и $N\Lambda/p\gg 1$, как следует из (4.1) и (4.8). Выберем наименьшее возможное m, то есть, $m\asymp N\Lambda/p$. Тогда $(pN)^{-1}m\ll \Lambda/p^2$ и $m/N\ll\Lambda/p$. Поэтому, используя лемму 3.1, мы имеем

$$\sup_x \bigl|\Psi_b^\bullet(x)-\Psi_b'(x)\bigr| \ll p^{-2}\Lambda+\int\limits_{|t|\leqslant t_1} \bigl|\widehat{\Psi}_b^\bullet(\tau)-\widehat{\Psi}_b'(\tau)\bigr|\,\frac{dt}{|t|},\qquad \tau=tK. \tag{4.21}$$

Мы докажем, что

$$\bigl|\widehat{\Psi}_b^\bullet(\tau)-\widehat{\Psi}_b'(\tau)\bigr| \ll \varkappa\Pi\sigma_d^{-1}\,|\tau|\,N\,(1+|\tau|N)(1+\|a\|^2) \tag{4.22}$$

с $\varkappa=\varkappa(\tau;N,\mathcal{L}(X^\bullet))$. Объединяя оценки (4.20)–(4.22), используя $\tau=tK$ и интегрируя неравенство (4.22) с помощью леммы 3.2, мы выводим (4.19).

Докажем (4.22). Напомним, что $X'=X^\bullet-\mathbf{E}\,X^\bullet+W$, где W обозначает центрированный гауссовский случайный вектор, который не зависит от всех других случайных векторов и таков, что $\operatorname{cov}X'=\operatorname{cov}G$ (см. лемму 2.3). Полагая $D=Z_N^\bullet-\mathbf{E}\,Z_N^\bullet-b$, мы имеем

$$Z_N^\bullet-b=D+\mathbf{E}\,Z_N^\bullet,\qquad \mathcal{L}(Z_N'-b)=\mathcal{L}(D+\sqrt{N}\,W)$$

и

$$\bigl|\widehat{\Psi}_b^\bullet(\tau)-\widehat{\Psi}_b'(\tau)\bigr| \leqslant \bigl|f_1(\tau)\bigr|+\bigl|f_2(\tau)\bigr| \tag{4.23}$$

с

$$\begin{aligned} f_1(\tau)&=\mathbf{E}\;\mathrm{e}\bigl\{\tau\,\mathbb{Q}[D+\sqrt{N}\,W]\bigr\}-\mathbf{E}\;\mathrm{e}\bigl\{\tau\,\mathbb{Q}[D]\bigr\},\\ f_2(t)&=\mathbf{E}\;\mathrm{e}\bigl\{\tau\,\mathbb{Q}[D+\mathbf{E}\,Z_N^\bullet]\bigr\}-\mathbf{E}\;\mathrm{e}\bigl\{\tau\,\mathbb{Q}[D]\bigr\}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Теперь мы должны доказать, что каждая из величин $\bigl|\,f_1(\tau)\bigr|$ и $\bigl|\,f_2(\tau)\bigr|$ может быть оценена сверху через правую часть неравенства (4.22).

Рассмотрим сначала f_1. Мы будем использовать представление $\mathbb{Q}[D+\sqrt{N}\,W]=\mathbb{Q}[D]+A+B$ с $A=2\sqrt{N}\,\langle\mathbb{Q}D,W\rangle$ и $B=N\,\mathbb{Q}[W]$. Из разложений Тейлора экспоненты в (4.24) по степеням $i\tau B$ и $i\tau A$ с остаточными членами $\mathcal{O}(\tau B)$ и $\mathcal{O}(\tau^2A^2)$ соответственно вытекает (напомним, что $\mathbf{E}\,W=0$ и $\mathbb{Q}^2=\mathbb{I}_d$), что

$$\bigl|\,f_1(\tau)\bigr|\ll\varkappa|\tau|N\,\mathbf{E}\,\|W\|^2+\varkappa\tau^2N\,\mathbf{E}\,\|W\|^2\,\mathbf{E}\,\|D\|^2,\tag{4.25}$$

где $\varkappa=\varkappa(\tau;N,\mathcal{L}(X^\bullet))$. Оценивание остаточных членов этих разложений основано на технике разбиения сумм на блоки и использования условных математических ожиданий, описанной в параграфе 9 работы [5], см. также [8]. Пользуясь соотношениями $\sigma^2=1$, $\mathbf{E}\,\|W\|^2\ll\Pi$ и $\mathbf{E}\,\|D\|^2\ll N(1+\|a\|^2)$, мы выводим из (4.25) неравенство

$$\bigl|\,f_1(\tau)\bigr|\ll\varkappa\Pi\,|\tau|\,N\,\bigl(1+|\tau|\,N)\bigr)(1+\|a\|^2).\tag{4.26}$$

Заметим, что $\mathbf{E}\,Z_N^\bullet=N\,\mathbf{E}\,X^\bullet=-N\,\mathbf{E}\,X_\bullet$. Разлагая экспоненты $\mathrm{e}\bigl\{\tau\,\mathbb{Q}[D+\mathbf{E}\,Z_N^\bullet]\bigr\}$, используя (4.14) и действуя по аналогии с доказательством (4.26), мы получаем

$$\bigl|\,f_2(\tau)\bigr|\ll\varkappa\Pi\sigma_d^{-1}\,|\tau|\,N(1+\|a\|).\tag{4.27}$$

Из неравенств (4.23), (4.26) и (4.27) теперь вытекает (4.22).

Остается оценить $\bigl|\,\Psi_b'-\Phi_b-\Theta_b'\bigr|$. Напомним, что функции распределения $\Psi_b^{(l)}(x)$ при $0\leqslant l\leqslant N$ определены в (3.3).

Зафиксируем целое число k из интервала $1\leqslant k\leqslant N$. Ясно, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\,\Psi_b'(x)-\Phi_b(x)-\Theta_b'(x)\bigr|\leqslant I_1+I_2+I_3,\tag{4.28}$$

где

$$I_1=\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\,\Psi_b^{(k)}(x)-\Phi_b(x)-(N-k)\,\Theta_b'(x)/N\,\bigr|,\tag{4.29}$$

$$I_2=\sup_{x\in\mathbb{R}}\bigl|\,\Psi_b'(x)-\Psi_b^{(k)}(x)\,\bigr|\tag{4.30}$$

и

$$I_3=\sup_{x\in\mathbb{R}}\;k\,N^{-1}\,\bigl|\,\Theta_b'(x)\bigr|.\tag{4.31}$$

Оценим I_1. Определим распределения

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mathbf{P}\bigl\{ U_k + X'_{k+1} + \cdots + X'_N \in \sqrt{N}\, A \bigr\}, \\ \mu_0(A) &= \mathbf{P}\bigl\{ U_N \in \sqrt{N}\, A \bigr\} = \mathbf{P}\bigl\{ G \in A \bigr\}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

где $U_l = G_1 + \cdots + G_l$. Введем меры χ', заменяя X на X' в (1.15). Для борелевских множеств $A \subset \mathbb{R}^d$ определим поправку Эджворта (к распределению μ) формулой

$$\mu_1^{(k)}(A) = (N-k)\, N^{-3/2} \chi'(A)/6. \tag{4.33}$$

Введем знакопеременную меру

$$\nu = \mu - \mu_0 - \mu_1^{(k)}. \tag{4.34}$$

Используя перенормировку случайных векторов, можно показать (см. соотношения (1.14), (1.17)–(1.19), (3.3) и (4.32)–(4.34)), что

$$\begin{aligned} \bigl| \Psi_b^{(k)}(x) - \Phi_b(x) - (N-k)\, \Theta_b'(x)/N \bigr| &= \nu\bigl(\bigl\{ u \in \mathbb{R}^d : \mathbb{Q}[u-a] \leqslant x/N \bigr\} \bigr) \\ &\leqslant \delta_N \overset{\text{def}}{=} \sup_{A \subset \mathbb{R}^d} \bigl| \nu(A) \bigr|. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Лемма 4.1. *Предположим, что $d < \infty$ и $1 \leqslant k \leqslant N$. Тогда существует такая положительная величина c_d, что определенная в* (4.35) *погрешность δ_N удовлетворяет неравенству*

$$\delta_N \ll_d \frac{\overline{\beta}}{\sigma_d^4 N} + \frac{N^{d/2}}{k^{d/2}} \exp\{-c_d\, k\, \sigma_d^4/\overline{\beta}\} \tag{4.36}$$

с $\overline{\beta} = \mathbf{E}\, \|X'\|^4$.

Схема доказательства. Мы повторим и несколько доработаем доказательство леммы 9.3 из работы [5] (см. доказательство леммы 2.5 в работе [4]). Предполагая, что $\operatorname{cov} X = \operatorname{cov} X' = \operatorname{cov} G = \mathbb{I}_d$, мы докажем, что

$$\delta_N \ll_d \frac{\overline{\beta}}{N} + \frac{N^{d/2}}{k^{d/2}} \exp\{-c_d\, k/\overline{\beta}\}. \tag{4.37}$$

Применяя (4.37) к $\mathbb{C}^{-1/2} X'$ и $\mathbb{C}^{-1/2} G$ и оценивая $\|\mathbb{C}^{-1/2}\| \leqslant 1/\sigma_d$, мы получаем (4.36).

При доказательстве неравенства (4.37) мы можем предполагать, что $\overline{\beta}/N \leqslant c_d$ и $N \geqslant 1/c_d$ с достаточно малой положительной постоянной c_d. В противном случае (4.37) следует из тривиальной оценки $\overline{\beta} \geqslant \sigma^4 = d^2$ и

$$\delta_N \ll_d 1 + (\overline{\beta}/N)^{1/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|x\|^3 p(x)\, dx \ll_d 1 + (\overline{\beta}/N)^{1/2}.$$

Положим $n = N - k$. Обозначая через Z'_j и U'_j суммы j независимых копий X' и G' соответственно, введем многомерные характеристические функции

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle N^{-1/2} t, G\rangle \big\}, \\ f_0(t) &= \mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle N^{-1/2} t, U'_n\rangle \big\} = g^n(t), \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle N^{-1/2} t, X'\rangle \big\}, \\ f(t) &= \mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle N^{-1/2} t, Z'_n\rangle \big\} = h^n(t), \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$f_1(t) = n\, m(t)\, f_0(t), \quad \text{где} \quad m(t) = \frac{1}{6\, N^{3/2}}\, \mathbf{E}\, \langle i t, X'\rangle^3, \tag{4.40}$$

$$\widehat{\nu}(t) = (f(t) - f_0(t) - f_1(t))\, g(\rho t), \quad \rho = \sqrt{k}. \tag{4.41}$$

Легко видеть, что

$$\widehat{\nu}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}\{\langle t, x\rangle\}\, \nu(dx). \tag{4.42}$$

Как следствие урезания, мы имеем

$$\mathbf{E}\, \big\| Z'_l/\sqrt{N} \big\|^\gamma \ll_{\gamma,d} 1, \qquad \gamma > 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant N. \tag{4.43}$$

Действуя по аналогии с доказательством леммы 11.6 в монографии [10], см. также доказательство леммы 2.5 в работе [4], мы получаем

$$\delta_N \ll_d \max_{|\alpha| \leqslant 2d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \big| \partial^\alpha \widehat{\nu}(t) \big|\, dt. \tag{4.44}$$

Здесь $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d|$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \geqslant 0$. Чтобы вывести (4.37) из (4.44), достаточно доказать, что при $|\alpha| \leqslant 2d$

$$\big| \partial^\alpha \widehat{\nu}(t) \big| \ll_d g(c_1 \rho t) \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}^d, \tag{4.45}$$

$$\big| \partial^\alpha \widehat{\nu}(t) \big| \ll_d \overline{\beta}\, N^{-1} (1 + \|t\|^6) \exp\{-c_2 \|t\|^2\} \quad \text{при} \quad \|t\|^2 \leqslant c_3(d) N/\overline{\beta}. \tag{4.46}$$

Действительно, используя (4.45) и обозначая $T = \sqrt{c_3(d)\,N/\overline{\beta}}$, мы получаем

$$\int\limits_{\|t\|\geqslant T} \bigl|\partial^\alpha \widehat{\nu}(t)\bigr|\,dt \ll_d \int\limits_{\|t\|\geqslant T} g(c_1\,\rho t)\,dt$$

$$\ll_d \frac{N^{d/2}}{\rho^d}\,\exp\Bigl\{-\frac{c_1^2\,\rho^2\,T^2}{8\,N}\Bigr\}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\exp\{-c_1^2\,\|t\|^2/8\}\,dt. \tag{4.47}$$

Легко видеть, что правая часть (4.47) ограничена сверху вторым слагаемым в правой части (4.37). Аналогично, используя (4.46), мы можем проинтегрировать $\bigl|\partial^\alpha \widehat{\nu}(t)\bigr|$ по $\|t\| \leqslant T$ и убедиться в том, что интеграл ограничен сверху величиной $c_d\,\overline{\beta}/N$.

Для доказательства (4.45)–(4.47) достаточно применить стандартные методы оценивания из [10]. В частности, мы пользуемся тождеством Бергстрёма

$$f-f_0-f_1 = \sum_{j=0}^{n-1}(h-g-m)\,h^j\,g^{n-j-1}+\sum_{j=0}^{n-1} m\sum_{l=0}^{j-1}(h-g)\,h^l\,g^{n-l-1}, \tag{4.48}$$

и соотношениями (4.38)–(4.43), $\bigl|\partial^\alpha \exp\{-c_4\,\|t\|^2\}\bigr| \ll_\alpha \exp\{-c_5\,\|t\|^2\}$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $\sqrt{N}/\overline{\beta}^{1/2} \gg_d 1$, и $y^{c_d}\exp\{-y\} \ll_d 1$ при $y>0$. $\square$

Применяя (4.29), (4.35) и лемму 4.1, мы получаем

$$I_1 \ll_d \frac{\overline{\beta}}{\sigma_d^4\,N} + \frac{N^{d/2}}{k^{d/2}}\exp\{-c_d\,k\,\sigma_d^4/\overline{\beta}\}. \tag{4.49}$$

Для оценивания I_2 мы используем лемму 4.2, представляющую собой простое следствие неравенства (3.11) и леммы 9.3 из работы [5].

Лемма 4.2. *Мы имеем*

$$\bigl|\,\widehat{\Psi}_b'(t)-\widehat{\Psi}_b^{(l)}(t)\bigr| \ll \varkappa t^2\,l\,\bigl(\overline{\beta}+|t|\,N\,\overline{\beta}+|t|\,N\sqrt{N\,\overline{\beta}}\bigr)(1+\|a\|^3)$$

при $0\leqslant l\leqslant N$, *где* $\varkappa=\varkappa(t;N,\mathcal{L}(X^\bullet),\mathcal{L}(G))$ (*см.* (3.10)).

Так же как при доказательстве (4.21), пользуясь леммой 3.1 (выбирая при этом $m \asymp N(\Lambda+\Pi)/p$), мы получаем

$$I_2 \ll p^{-2}\,(\Lambda+\Pi) + \int\limits_{|t|\leqslant t_1}\bigl|\,\widehat{\Psi}_b'(\tau)-\widehat{\Psi}_b^{(k)}(\tau)\bigr|\,dt/|t|, \qquad \tau = t\,K.$$

Применяя лемму 4.2 и заменяя в этой лемме t на τ, мы имеем

$$\big|\,\widehat{\Psi}'_b(\tau)-\widehat{\Psi}^{(k)}_b(\tau)\,\big|\ll \varkappa\tau^2 k\,\big(\overline{\beta}+|\tau|N\,\overline{\beta}+|\tau|N\sqrt{N\,\overline{\beta}}\big)(1+\|a\|^3). \quad (4.50)$$

Интегрируя с помощью леммы 3.2, мы получаем

$$I_2\ll p^{-2}(\Pi+\Lambda)+p^{-3}\,k\,N^{-2}\big(\overline{\beta}+\sqrt{N\,\overline{\beta}}\big) \times\big(1+p^{1/2}/(\Pi+\Lambda)^{1/4}\big)(1+\|a\|^3). \quad (4.51)$$

Выберем $k\asymp_d\ \sigma_d^{-3}N^{1/4}\,\overline{\beta}^{3/4}$. Такое $k\leqslant N$ существует согласно соотношению $\overline{\beta}\gg\sigma^4=1$, неравенству (4.15) и предположению (4.8). Тогда неравенства (4.49) и (4.51) превращаются в

$$I_1\ll_d\ \frac{\overline{\beta}}{\sigma_d^4 N}+\Big(\frac{\sigma_d^4 N}{\overline{\beta}}\Big)^{3d/8}\exp\Big\{-c_d\Big(\frac{\sigma_d^4 N}{\overline{\beta}}\Big)^{1/4}\Big\}\ll_d\ \frac{\overline{\beta}}{\sigma_d^4 N} \quad (4.52)$$

и

$$I_2\ll_d p^{-2}(\Pi+\Lambda) +\frac{1}{\sigma_d^3p^3}\Big(\Big(\frac{\overline{\beta}}{N}\Big)^{5/4}+\Big(\frac{\overline{\beta}}{N}\Big)^{7/4}\Big)\big(1+p^{1/2}/(\Pi+\Lambda)^{1/4}\big)(1+\|a\|^3). \quad (4.53)$$

Пользуясь (4.8), (4.15) и (4.53), мы получаем

$$I_2\ll_d p^{-2}(\Pi+\Lambda)+\frac{\overline{\beta}}{\sigma_d^3p^3N}(1+\|a\|^3). \quad (4.54)$$

Наконец, согласно (4.8), (4.15), (4.18) и (4.31),

$$I_3\ll_d\ \frac{k}{N}\big(\Lambda^{1/2}\sigma_d^{-2}+N^{-1/2}\,\Pi^{3/2}\sigma_d^{-3}\big)\ll\Lambda\,\sigma_d^{-4}+\Pi\,\sigma_d^{-2}. \quad (4.55)$$

Из неравенств $\sigma_d\leqslant 1$, $\Pi+\Lambda\leqslant 1$, (4.8), (4.11), (4.15), (4.17), (4.19), (4.28), (4.52), (4.54) и (4.55) теперь вытекает (4.7) (и, следовательно, (1.23)). Заметим, что, согласно (1.7) и (1.9), мы имеем $\sigma_d\Pi\leqslant\Pi_3^{\bullet}$. Вместе с (4.2) и (4.4), неравенство (4.7) влечет (1.22). Утверждение (i) теоремы 1.3 доказано.

Докажем (i)$\Longrightarrow$(ii). Чтобы доказать неравенство $p\geqslant\exp\{c\lambda_5^{-2}\}$, мы можем использовать (i) в случае когда выполнено условие $\mathcal{N}(p,\delta,\mathcal{S}_o,c_0\,G)$ с $c_0=\delta/4=1/1200$. Действительно, условие $\mathcal{B}(\mathcal{S}_o,\mathbb{C})$ гарантирует то, что $e\in\mathcal{S}_o\cup\mathbb{Q}\mathcal{S}_o$ являются собственными векторами ковариационного оператора $\mathbb{C}$, и мы получим оценку снизу для p с помощью леммы 2.5, учитывая то, что $c_0=\delta/4$. $\square$

5. От теории вероятностей к теории чисел

В этом параграфе мы сведем оценивание интегралов от $\bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|$ к оцениванию интегралов от тэта-функций. Мы будем использовать следующие леммы, считая, что $1 \leqslant d \leqslant \infty$ и $1 \leqslant s < \infty$.

Лемма 5.1 ([5, лемма 5.1])**.** *Пусть $L, C \in \mathbb{R}^d$. Пусть Z, U, V и W – независимые случайные векторы со значениями в $\mathbb{R}^d$. Пусть*

$$P(x) = \langle \mathbb{Q}x, x\rangle + \langle L, x\rangle + C \qquad \text{при } x \in \mathbb{R}^d$$

– вещественнозначный полином второго порядка. Тогда

$$2\,\Bigl|\mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{t\,P(Z+U+V+W)\bigr\}\Bigr|^2 \leqslant \mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{2\,t\,\langle \mathbb{Q}\widetilde{Z}, \widetilde{U}\rangle\bigr\} + \mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{2\,t\,\langle \mathbb{Q}\widetilde{Z}, \widetilde{V}\rangle\bigr\}.$$

Лемма 5.2 ([5, теорема 7.1])**.** *Предположим, что $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d$ и выполнено условие $\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}_o, \widetilde{X})$ с некоторыми $0 < p \leqslant 1$ и $0 \leqslant \delta \leqslant 1/(5s)$. Тогда для любых $b \in \mathbb{R}^d$ и $t \in \mathbb{R}$*

$$\bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr| \ll_s \mathcal{M}^s\bigl(t; pN\bigr),$$

где функции $\mathcal{M}$ и $\widehat{\Psi}_b(t)$ определены в (1.30) и (2.3) соответственно.

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ – н.о.р. случайные величины, имеющие симметричное распределение Радемахера. Пусть $\delta > 0$ и $\mathcal{S} = \{e_1, \dots, e_s\} \subset \mathbb{R}^d$. Мы будем писать $\mathcal{L}(Y) \in \Gamma(\delta; \mathcal{S})$, если дискретный случайный вектор Y распределен так же как $\varepsilon_1 z_1 + \dots + \varepsilon_s z_s$ с некоторыми (неслучайными) $z_j \in \mathbb{R}^d$, такими, что $\|z_j - e_j\| \leqslant \delta$ при всех $1 \leqslant j \leqslant s$.

Лемма 5.3 ([5], следствие 6.3)**.** *Предположим, что $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d$ и что выполнено условие $\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}, \widetilde{X})$ с некоторыми $0 < p \leqslant 1$ и $\delta > 0$. Положим $n = \bigl\lceil pN/(5\,s)\bigr\rceil$. Тогда для любых $0 < A \leqslant B$, $b \in \mathbb{R}^d$ и $\gamma > 0$ мы имеем*

$$\int_A^B \bigl|\widehat{\Psi}_b(t)\bigr|\ \frac{dt}{|t|} \leqslant I + c_\gamma(s)\,(pN)^{-\gamma}\ \log\frac{B}{A}$$

с

$$I = \sup_{\Gamma}\ \sup_{b \in \mathbb{R}^d} \int_A^B \sqrt{\varphi(t/4)}\ \frac{dt}{|t|}, \quad \varphi(t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Bigl|\mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{t\,\mathbb{Q}[Y + \mathbb{Q}Y' + b]\bigr\}\Bigr|^2, \ (5.1)$$

где $Y = U_1 + \dots + U_n$ и $Y' = U_1' + \dots + U_n'$ – суммы независимых (неодинаково распределенных) случайных векторов, а супремум $\sup_\Gamma$ берется по всевозможным $\bigl\{\mathcal{L}(U_j), \mathcal{L}(U_j') :\ 1 \leqslant j \leqslant n\bigr\} \subset \Gamma(\delta; \mathcal{S})$.

Лемма 5.4. *Предположим, что* $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d$ *и что условие* $\mathcal{N}(p, \delta, \mathcal{S}, \widetilde{X})$ *выполнено с некоторыми* $0 < p \leqslant 1$ *и* $\delta > 0$. *Пусть*

$$n \overset{\mathrm{def}}{=} \lceil pN/(11\,s) \rceil \geqslant 1. \tag{5.2}$$

Тогда для любых $0 < A \leqslant B$, $b \in \mathbb{R}^d$ *и* $\gamma > 0$

$$\int_A^B \bigl|\,\widehat{\Psi}_b(t)\,\bigr|\,\frac{dt}{|t|} \leqslant c_\gamma(s)\,(pN)^{-\gamma}\,\log\frac{B}{A} + \sup_{\Gamma}\int_A^B \sqrt{\mathbf{E}\;\mathrm{e}\bigl\{t\,\langle \widetilde{W}, \widetilde{W}'\rangle/2\bigr\}}\;\frac{dt}{|t|}, \tag{5.3}$$

где $W = V_1 + \dots + V_n$ *и* $W' = V_1' + \dots + V_n'$ *– независимые сумм независимых копий случайных векторов* V *и* V' *соответственно, а супремум* $\sup_\Gamma$ *берется по всевозможным* $\mathcal{L}(V), \mathcal{L}(V') \in \Gamma(\delta;\, \mathcal{S})$.

Заметим, что эта лемма будет доказана для произвольной системы $\mathcal{S}$, хотя в данной статье нам потребуется она только для $\mathcal{S} = \mathcal{S}_o$. Напомним, что $\mathcal{S}_o = \{e_1, \dots, e_s\} \subset \mathbb{R}^d$ обозначает ортонормальную систему векторов.

Доказательство леммы 5.4. Покажем, что

$$\int_A^B \bigl|\,\widehat{\Psi}_b(t)\,\bigr|\,\frac{dt}{|t|} \leqslant c_\gamma(s)\,(pN)^{-\gamma}\,\log\frac{B}{A} + \sup_{\Gamma}\int_A^B \sqrt{\mathbf{E}\;\mathrm{e}\bigl\{t\,\langle \widetilde{W}, \widetilde{W}'\rangle/2\bigr\}}\;\frac{dt}{|t|}, \tag{5.4}$$

где $W = V_1 + \dots + V_n$ и $W' = V_1' + \dots + V_n'$ – независимые суммы независимых (*неодинаково распределенных*) случайных векторов, а супремум $\sup_\Gamma$ берется по всевозможным $\bigl\{\mathcal{L}(V_j), \mathcal{L}(V_j') :\ 1 \leqslant j \leqslant n\bigr\} \subset \Gamma(\delta;\, \mathcal{S})$. Сравнивая (5.3) и (5.4), мы видим, что неравенство (5.4) относится к суммам *неодинаково распределенных* случайных векторов $\{V_j\}$ и $\{V_j'\}$, в то время как в неравенстве (5.3) мы имеем дело с н.о.р. векторами. Тем не менее, мы выведем неравенство (5.3) из (5.4).

При доказательстве (5.4) мы можем предполагать, что $pN \geqslant c_s$ с достаточно большой постоянной c_s, поскольку в противном случае неравенство (5.4) тривиально.

Пусть функция $\varphi(t)$ определена в (5.1), где $Y = U_1 + \dots + U_n$ и $Y' = U_1' + \dots + U_n'$ – суммы независимых (неодинаково распределенных) случайных векторов с $\bigl\{\mathcal{L}(U_j), \mathcal{L}(U_j') :\ 1 \leqslant j \leqslant n\bigr\} \subset \Gamma(\delta; \mathcal{S})$.

Мы будем применять симметризационную лемму 5.1. Разобьем $Y = T + T_1$ и $Y' + \mathbb{Q}b = R + R_1 + R_2$ на суммы независимых сумм независимых слагаемых так, что каждая из сумм T, R и R_1 содержит $n = \lceil pN/(11\,s)\rceil$ независимых слагаемых U_j и U_j' соответственно. Такое n существует, поскольку $pN \geqslant c_s$ с достаточно большой c_s. Из леммы 5.1 и симметрии $\mathbb{Q}$ следует, что

$$2\,|\varphi(t)|^2 \leqslant \mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{2\,t\,\langle \widetilde{T}, \mathbb{Q}^2\widetilde{R}\rangle\bigr\} + \mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{2\,t\,\langle \widetilde{T}, \mathbb{Q}^2\widetilde{R}_1\rangle\bigr\}. \tag{5.5}$$

Напомним, что $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{I}_d$. Неравенство (5.4) следует теперь из (5.5) и леммы 5.3.

Пусть теперь $W = V_1 + \dots + V_n$ и $W' = V_1' + \dots + V_n'$ – независимые суммы независимых (неодинаково распределенных) случайных векторов с $\bigl\{\mathcal{L}(V_j), \mathcal{L}(V_j') :\ 1 \leqslant j \leqslant n\bigr\} \subset \Gamma(\delta; \mathcal{S})$. Пользуясь тем, что все распределения $\mathcal{L}(\widetilde{V}_j)$ симметризованы и имеют неотрицательные характеристические функции, и применяя неравенство Гёльдера, мы получаем, что для любого t

$$\mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{t\,\langle \widetilde{W}, \widetilde{W}'\rangle\bigr\} = \mathbf{E}_{\widetilde{W}'}\Bigl(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{\widetilde{V}_j}\ \mathrm{e}\bigl\{t\,\langle \widetilde{V}_j, \widetilde{W}'\rangle\bigr\}\Bigr) \tag{5.6}$$

$$\leqslant \Bigl(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{\widetilde{W}'}\bigl(\mathbf{E}_{\widetilde{V}_j}\ \mathrm{e}\bigl\{t\,\langle \widetilde{V}_j, \widetilde{W}'\rangle\bigr\}\bigr)^n\Bigr)^{1/n} \tag{5.7}$$

$$= \Bigl(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}_{\widetilde{W}'}\bigl(\mathbf{E}_{\widetilde{T}_j}\ \mathrm{e}\bigl\{t\,\langle \widetilde{T}_j, \widetilde{W}'\rangle\bigr\}\bigr)\Bigr)^{1/n} \tag{5.8}$$

$$= \Bigl(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{E}\ \mathrm{e}\bigl\{t\,\langle \widetilde{T}_j, \widetilde{W}'\rangle\bigr\}\Bigr)^{1/n}, \tag{5.9}$$

где $\widetilde{T}_j = \sum\limits_{l=1}^{n} \widetilde{V}_{jl}$ – суммы независимых копий $\widetilde{V}_{jl}$ случайных векторов $\widetilde{V}_j$, не зависящие от всех других случайных векторов и величин.

Повторяя шаги (5.6)–(5.9) по отдельности для каждого из множителей $\mathbf{E}\,\mathrm{e}\{t\,\langle\widetilde{T}_j,\widetilde{W}'\rangle\}$, мы получаем (с $\widetilde{T}'_k \overset{\mathrm{def}}{=} \sum\limits_{l=1}^{n}\widetilde{V}'_{kl}$, где $\widetilde{V}'_{kl}$ – независимые копии случайных векторов $\widetilde{V}'_k$, не зависящие от всех других случайных векторов)

$$\mathbf{E}\,\mathrm{e}\{t\,\langle\widetilde{W},\widetilde{W}'\rangle\} \leqslant \Big(\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\mathrm{e}\{t\,\langle\widetilde{T}_j,\widetilde{T}'_k\rangle\}\Big)^{1/n^2}. \tag{5.10}$$

Таким образом, используя (5.10) и неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, мы имеем

$$\begin{aligned}\int_A^B \sqrt{\mathbf{E}\,\mathrm{e}\{t\,\langle\widetilde{W},\widetilde{W}'\rangle/2\}}\,\frac{dt}{|t|} &\leqslant \int_A^B \Big(\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\mathrm{e}\{t\,\langle\widetilde{T}_j,\widetilde{T}'_k\rangle/2\}\Big)^{1/2n^2}\,\frac{dt}{|t|}\\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_A^B\Big(\mathbf{E}\,\mathrm{e}\{t\,\langle\widetilde{T}_j,\widetilde{T}'_k\rangle/2\}\Big)^{1/2}\,\frac{dt}{|t|}\\ &\leqslant \sup_{\Gamma}\int_A^B\sqrt{\mathbf{E}\,\mathrm{e}\{t\,\langle\widetilde{T},\widetilde{T}'\rangle/2\}}\,\frac{dt}{|t|},\end{aligned} \tag{5.11}$$

где $T = U_1 + \dots + U_n$ и $T' = U'_1 + \dots + U'_n$ – независимые суммы независимых копий случайных векторов U и U' соответственно, а супремум $\sup_\Gamma$ берется по всевозможным $\mathcal{L}(U),\mathcal{L}(U') \in \Gamma\,(\delta;\mathcal{S})$. Из неравенств (5.4) и (5.11) теперь вытекает утверждение леммы. $\square$

Следующая лемма 5.5 дает формулу суммирования Пуассона.

Лемма 5.5. *Пусть* $\mathrm{Re}\,z > 0$, $a,b \in \mathbb{R}^s$ *и* $\mathbb{S} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ *– положительно определенный симметричный невырожденный линейный оператор. Тогда*

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}\exp\{-z\,\mathbb{S}[m+a]+2\pi i\,\langle m,b\rangle\} &= \big(\det(\mathbb{S}/\pi)\big)^{-1/2}\\ \times\, z^{-s/2}\exp\{-2\pi i\,\langle a,b\rangle\}&\sum_{l\in\mathbb{Z}^s}\exp\Big\{-\frac{\pi^2}{z}\,\mathbb{S}^{-1}[l+b]-2\pi i\,\langle a,l\rangle\Big\},\end{aligned}$$

где $\mathbb{S}^{-1} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ *обозначает обратный положительно определенный оператор для* $\mathbb{S}$.

Доказательство. См., например, [15, с. 116], или [26, с. 189], формула (5.1), и с. 197, формула (5.9). $\square$

Пусть выполнены условия леммы 5.4. Введем одномерные решетчатые вероятностные распределения $H_n = \mathcal{L}(\xi_n)$ с целочисленнозначными ξ_n, полагая

$$\mathbf{P}\{\,\xi_n = k\,\} = A_n\, n^{-1/2} \exp\{-k^2/2n\} \quad \text{при } k \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что $A_n \asymp 1$. Кроме того, согласно лемме 5.5,

$$\widehat{H}_n(t) \geqslant 0 \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Введем s-мерный случайный вектор ζ_n, имеющий в качестве координат независимыми копии вектора ξ_n. Тогда при $m = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$ мы имеем

$$q(m) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\,\zeta_n = m\,\} = A_n^s\, n^{-s/2} \exp\{-\|m\|^2/2n\}. \tag{5.13}$$

Лемма 5.6. *Пусть* $W = V_1 + \cdots + V_n$ *и* $W' = V_1' + \cdots + V_n'$ *– такие независимые суммы независимых копий случайных векторов* V *и* V', *определяемых равенствами*

$$V = \varepsilon_1 z_1 + \cdots + \varepsilon_s z_s, \quad V' = \varepsilon_{s+1} z_1' + \cdots + \varepsilon_{2s} z_s'$$

с некоторыми $z_j, z_j' \in \mathbb{R}^d$. *Введем матрицы* $\mathbb{B}_t = \{b_{ij}(t) : 1 \leqslant i, j \leqslant s\}$ *с* $b_{ij}(t) = t\,\langle z_i, z_j'\rangle$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\ \mathrm{e}\{\,t\,\langle \widetilde{W}, \widetilde{W'}\rangle/4\,\} \ll_s \mathbf{E}\ \mathrm{e}\{\,\langle \mathbb{B}_t\,\zeta_n, \zeta_n'\rangle\,\} + \exp\{-cn\} \qquad \text{для всех } t \in \mathbb{R},$$

где ζ_n' *– независимые копии векторов* ζ_n, *а* c *– абсолютная положительная постоянная.*

Доказательство. Не нарушая общности, предположим, что $n \geqslant c_1$, где c_1 – абсолютная постоянная, которая настолько велика, насколько это будет необходимо для справедливости проводимых ниже рассуждений. Рассмотрим случайный вектор $Y = (\widetilde{\varepsilon}_1, \ldots, \widetilde{\varepsilon}_s) \in \mathbb{R}^s$, координаты которого являются н.о.р. симметризациями случайных величин с распределениями Радемахера. Пусть $R = (R_1, \ldots, R_s)$ и T – независимые суммы n независимых копий вектора $Y/2$. Тогда

$$\mathbf{E}\ \mathrm{e}\{\,t\,\langle \widetilde{W}, \widetilde{W'}\rangle/4\,\} = \mathbf{E}\ \mathrm{e}\{\,\langle \mathbb{B}_t\, R, T\rangle\,\} \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}. \tag{5.14}$$

Заметим, что скалярное произведение $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ в $\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t R, T\rangle\big\}$ означает скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^s$. Чтобы оценить это математическое ожидание, мы запишем его в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t R, T\rangle\big\} &= \mathbf{E}\,\mathbf{E}_R\ \mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t R, T\rangle\big\}\\ &= \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} p(\overline{m}) \sum_{m\in\mathbb{Z}^s} p(m)\,\mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t m, \overline{m}\rangle\big\},\end{aligned}\tag{5.15}$$

где суммирование проводится по $m = (m_1,\dots,m_s) \in \mathbb{Z}^s$, $\overline{m} = (\overline{m}_1,\dots,\overline{m}_s) \in \mathbb{Z}^s$, а

$$p(m) = \mathbf{P}\big\{R = m\big\} = \prod_{j=1}^{s}\mathbf{P}\big\{R_j = m_j\big\} = \prod_{j=1}^{s} 2^{-2n}\binom{2n}{m_j+n},\tag{5.16}$$

если $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}|m_j| \leqslant n$ и $p(m) = 0$ в противном случае. Ясно, что при фиксированном $T = \overline{m}$

$$\mathbf{E}_R\ \mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t R, T\rangle\big\} = \sum_{m\in\mathbb{Z}^s} p(m)\,\mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t m, \overline{m}\rangle\big\} \geqslant 0\tag{5.17}$$

является значением характеристической функции симметризованного случайного вектора $\mathbb{B}_t R$. Пользуясь формулой Стирлинга, легко показать, что существуют такие абсолютные положительные постоянные c_2 и c_3, что

$$\mathbf{P}\big\{R_j = m_j\big\} \ll n^{-1/2}\exp\big\{-m_j^2/2n\big\} \qquad \text{при } |m_j| \leqslant c_2 n\tag{5.18}$$

и

$$\mathbf{P}\big\{|R_j| \geqslant c_2 n\big\} \ll \exp\{-c_3 n\}.\tag{5.19}$$

Пользуясь (5.15)–(5.19), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t R, T\rangle\big\} &\ll_s \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} q(\overline{m}) \sum_{m\in\mathbb{Z}^s} p(m)\,\mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t m, \overline{m}\rangle\big\} + \exp\{-c_3 n\}\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^s} p(m) \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} q(\overline{m})\,\mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t m, \overline{m}\rangle\big\} + \exp\{-c_3 n\}\\ &= \mathbf{E}\,\mathbf{E}_{\zeta_n}\ \mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t R, \zeta_n\rangle\big\} + \exp\{-c_3 n\}\\ &= \mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t R, \zeta_n\rangle\big\} + \exp\{-c_3 n\}.\end{aligned}\tag{5.20}$$

Теперь мы повторим наши предыдущие рассуждения, замечая, что

$$\mathbf{E}_{\zeta_n}\, \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t R, \zeta_n\rangle \big\} = \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} q(\overline{m})\ \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t R, \overline{m}\rangle \big\} \geqslant 0 \tag{5.21}$$

является значением неотрицательной характеристической функции случайного вектора ζ_n (см. (5.12)). Снова пользуясь (5.18) и (5.19), мы получаем

$$\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t R, \zeta_n\rangle \big\} \ll_s \mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t \zeta_n, \zeta_n'\rangle \big\} + \exp\{-c_3 n\}\,. \tag{5.22}$$

Из соотношений (5.14), (5.20) и (5.22) следует утверждение леммы. $\square$

Оценим математическое ожидание $\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t \zeta_n, \zeta_n'\rangle \big\}$ при выполнении условий лемм 5.4 и 5.6, предполагая, что $\delta \leqslant 1/(5s)$ и $n \geqslant c_4$, где c_4 – достаточно большая абсолютная постоянная и

$$\|z_j - e_j\| \leqslant \delta, \qquad \|z_j' - e_j\| \leqslant \delta \qquad \text{при } 1 \leqslant j \leqslant s \tag{5.23}$$

с ортонормальной системой векторов $\mathcal{S} = \mathcal{S}_o = \big\{ e_1, e_2, \dots, e_s \big\}$, участвующей в условиях леммы 5.4. Мы можем переписать математическое ожидание $\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t \zeta_n, \zeta_n'\rangle \big\}$ в виде

$$\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t \zeta_n, \zeta_n'\rangle \big\} = \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} q(\overline{m}) \sum_{m\in\mathbb{Z}^s} q(m)\, \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t \overline{m}, m\rangle \big\}.$$

Таким образом, согласно (5.13),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\ &\mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t \zeta_n, \zeta_n'\rangle \big\} \\ &= A_n^{2s}\, n^{-s} \sum_{\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} \sum_{m\in\mathbb{Z}^s} \exp\big\{ i\,\langle \mathbb{B}_t \overline{m}, m\rangle - \|m\|^2/2n - \|\overline{m}\|^2/2n \big\}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$r = \sqrt{2\pi^2 n}. \tag{5.24}$$

Применяя лемму 5.5 с $\mathbb{S} = \mathbb{I}_s$, $z = 1/2n$, $a = 0$, $b = (2\pi)^{-1}\, \mathbb{B}_t \overline{m}$ и используя то, что $A_n \asymp 1$, мы получим

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\ \mathrm{e}\big\{ \langle \mathbb{B}_t \zeta_n, \zeta_n'\rangle \big\} \\ &\ll_s n^{-s/2} \sum_{l,m\in\mathbb{Z}^s} \exp\big\{ -2\pi^2 n\, \big\| l + (2\pi)^{-1}\mathbb{B}_t m \big\|^2 - \|m\|^2/2n \big\} \\ &\ll_s r^{-s} \sum_{m,\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} \exp\big\{ -r^2\, \|m - t\,\mathbb{V}\overline{m}\|^2 - \|\overline{m}\|^2/r^2 \big\},\end{aligned} \tag{5.25}$$

где $\mathbb{V} : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ – оператор с матрицей

$$\mathbb{V} = (2\pi)^{-1}\mathbb{B}_1. \tag{5.26}$$

Заметим, что правую часть (5.25) можно рассматривать как тэта-функцию.

Покажем, что (см. доказательство леммы 7.4 в работе [5])

$$\|\mathbb{B}_1\| \leqslant 3/2 \quad \text{и} \quad \left\|\mathbb{B}_1^{-1}\right\| \leqslant 2. \tag{5.27}$$

Действительно, элементами матрицы $\mathbb{B}_1$ являются $b_{ij}(1) = \langle z_i, z_j' \rangle$ с некоторыми $z_j, z_j' \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющими соотношениям (5.23). Поскольку $\mathcal{S}_o = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ является ортонормальной системой векторов, из неравенства (5.23) следует, что $\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}_s + \mathbb{A}$ с некоторой матрицей $\mathbb{A} = \{a_{ij}\}$, такой, что $|a_{ij}| \leqslant 2\delta + \delta^2$. Таким образом, мы имеем $\|\mathbb{A}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_2 \leqslant 2s\delta + s\delta^2$, где $\|\mathbb{A}\|_2$ обозначает норму Гильберта–Шмидта матрицы $\mathbb{A}$. Поэтому из условия $\delta \leqslant 1/(5s)$ следует то, что $\|\mathbb{A}\| \leqslant 1/2$, а также неравенства (5.27).

Согласно (5.26) и (5.27), для любого $x \in \mathbb{R}^s$ мы имеем

$$\|x\| \ll \|\mathbb{V}x\| + \left\|\mathbb{V}^{-1}x\right\| \ll \|x\|. \tag{5.28}$$

6. Некоторые факты из теории чисел

В шестом параграфе мы рассмотрим некоторые факты из геометрии чисел (см. [12] или [13]). Они помогут нам оценивать интегралы от правой части неравенства (5.25).

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_d$ – линейно независимые векторы в $\mathbb{R}^d$, $d < \infty$. Множество

$$\Lambda = \Big\{\sum_{j=1}^{d} n_j e_j : n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, 2, \dots, d\Big\}$$

называется решеткой с базисом $e_1, e_2, \dots, e_d$. Определитель $\det(\Lambda)$ решетки Λ – это модуль определителя матрицы, составленной из координат векторов $e_1, e_2, \dots, e_d$. Определитель решетки не зависит от выбора базиса. Любая решетка $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ может быть представлена как $\Lambda = \mathbb{A}\,\mathbb{Z}^d$, где $\mathbb{A}$ – невырожденный линейный оператор. Ясно, что $\det(\Lambda) = |\det \mathbb{A}|$.

Пусть $m_1, \dots, m_l \in \Lambda$ – линейно независимые элементы решетки Λ. Тогда множество

$$\Lambda' = \Big\{ \sum_{j=1}^{l} n_j m_j : n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, 2, \dots, l \Big\}$$

является l-мерной подрешеткой решетки Λ. Ее определитель $\det(\Lambda')$ равен $\big(\det\big(\langle m_i, m_j\rangle, i, j = 1, \dots, l\big)\big)^{1/2}$.

Пусть $F : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ – некоторая норма в $\mathbb{R}^d$. Последовательные минимумы по Минковскому $M_1 \leqslant \dots \leqslant M_d$ нормы F по отношению к решетке Λ определяются следующим образом. Пусть $M_1 = \inf\big\{ F(m) : m \neq 0,\ m \in \Lambda \big\}$ и определим M_j как точную нижнюю грань тех $\lambda > 0$, для которых множество $\big\{ m \in \Lambda : F(m) < \lambda \big\}$ содержит j линейно независимых векторов. Следующая лемма 6.1 доказана в работе [13], лемма 1, см. также [18].

Лемма 6.1. *Пусть $M_1 \leqslant \dots \leqslant M_d$ – последовательные минимумы нормы F по отношению к решетке $\mathbb{Z}^d$. Обозначим $M_{d+1} = \infty$. Предположим, что $1 \leqslant j \leqslant d$ и $M_j \leqslant b \leqslant M_{j+1}$ при некотором $b > 0$. Тогда*

$$\#\big\{ m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}^d :\ F(m) < b \big\} \asymp_d b^j (M_1 \cdot M_2 \cdots M_j)^{-1}.$$

Представляя $\Lambda = \mathbb{A}\,\mathbb{Z}^d$, мы видим, что решетку $\mathbb{Z}^d$ можно заменить в лемме 6.1 на произвольную решетку $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Достаточно применить эту лемму к норме $G(m) = F(\mathbb{A} m)$, $m \in \mathbb{Z}^d$.

Лемма 6.2. *Пусть $F_j(m)$, $j = 1, 2$, – некоторые нормы в $\mathbb{R}^d$ и $M_1 \leqslant \dots \leqslant M_d$ и $N_1 \leqslant \dots \leqslant N_d$ – последовательные минимумы нормы F_1 по отношению к решетке Λ_1 и нормы F_2 по отношению к решетке Λ_2 соответственно. Пусть $C > 0$. Предположим, что $M_k \gg_d C\, F_2(n_k)$, $k = 1, 2, \dots, d$, для некоторых линейно независимых векторов $n_1, n_2, \dots, n_d \in \Lambda_2$. Тогда $M_k \gg_d C\, N_k$ при $k = 1, 2, \dots, d$.*

Мы опускаем элементарное доказательство этой леммы.

Пусть $\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant d} |x_j|$ при $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Доказательство следующей простой леммы можно найти в работе [18].

Лемма 6.3. *Пусть Λ – решетка в $\mathbb{R}^d$ и пусть $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Тогда*

$$e^{-\varepsilon}\, \#H \leqslant \sum_{v \in \Lambda} \exp\big\{ -\varepsilon\, \|v\|^2 \big\} \ll_d \varepsilon^{-d/2} \#H,$$

где $H \overset{\text{def}}{=} \big\{ v \in \Lambda : \|v\|_\infty < 1 \big\}$.

Легко видеть, что из леммы 6.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.4. *Пусть Λ – решетка в $\mathbb{R}^d$ и пусть $c_j(d)$, $j = 1, 2, 3, 4$, – положительные величины, зависящие только от d. Пусть $F(\cdot)$ – такая норма в $\mathbb{R}^d$, что $F(\cdot) \asymp_d \|\cdot\|$. Тогда*

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\Lambda} \exp\bigl\{-c_1(d)\,\|v\|^2\bigr\} &\asymp_d \sum_{v\in\Lambda} \exp\bigl\{-c_2(d)\,(F(v))^2\bigr\} \\ &\asymp_d \#\bigl\{v\in\Lambda : \|v\| < c_3(d)\bigr\} \\ &\asymp_d \#\bigl\{v\in\Lambda : F(v) < c_4(d)\bigr\}.\end{aligned}$$

Мы опускаем элементарное доказательство следствия 6.4. Заметим только, что

$$\#\bigl\{v\in\Lambda : F(v) < \lambda\bigr\} = \#\bigl\{v\in\mu^{-1}\Lambda : F(v) < \lambda/\mu\bigr\} \quad \text{при } \lambda, \mu > 0.$$

Для решетки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ определим при $1 \leqslant l \leqslant d$ ее α_l-характеристики равенством

$$\alpha_l(\Lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup\bigl\{\,\bigl|\det(\Lambda')\bigr|^{-1} : \Lambda' \subset \Lambda,\ \ \Lambda' - l\text{-мерная подрешетка } \Lambda\bigr\}. \tag{6.1}$$

Обозначим

$$\alpha(\Lambda) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{1\leqslant l\leqslant d} \alpha_l(\Lambda). \tag{6.2}$$

Лемма 6.5. *Пусть $F(\cdot)$ – норма в $\mathbb{R}^d$, причем $F(\cdot) \asymp_d \|\cdot\|$. Пусть $c(d)$ – положительная величина, зависящая только от d. Пусть $M_1 \leqslant \cdots \leqslant M_d$ – последовательные минимумы нормы F по отношению к решетке $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Тогда*

$$\alpha_l(\Lambda) \asymp_d (M_1 \cdot M_2 \cdots M_l)^{-1}, \quad l = 1, \dots, d. \tag{6.3}$$

Кроме того,

$$\alpha(\Lambda) \asymp_d \#\bigl\{v\in\Lambda : \|v\| < c(d)\bigr\}, \tag{6.4}$$

если $M_1 \ll_d 1$.

Для доказательства леммы 6.5 мы будем использовать следующую лемму, сформулированную в предложении (с. 517) и замечании (с. 518) в работе [25].

Лемма 6.6. *Пусть* $M_1 \leqslant \cdots \leqslant M_d$ *– последовательные минимумы стандартной евклидовой нормы по отношению к решетке* $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. *Тогда существует такой базис* $e_1, e_2, \ldots, e_d$ *решетки* Λ, *что*

$$M_l \asymp_d \|e_l\|, \quad l = 1, \ldots, d.$$

Кроме того,

$$\det(\Lambda) \asymp_d \prod_{l=1}^{d} \|e_l\|.$$

Доказательство леммы 6.5. Согласно лемме 6.2, мы можем заменить евклидову норму $\|\cdot\|$ на норму $F(\cdot)$ в формулировке леммы 6.6. Пусть $\Lambda' \subset \Lambda$ – произвольная l-мерная подрешетка решетки Λ, а $N_1 \leqslant \cdots \leqslant N_l$ – последовательные минимумы нормы $F(\cdot)$ по отношению к Λ'. Ясно, что $M_j \leqslant N_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$. С другой стороны, $M_j = F(m_j)$ для некоторых линейно независимых векторов $m_1, m_2, \ldots, m_l \in \Lambda$. В случае, когда

$$\Lambda' = \Big\{ \sum_{j=1}^{l} n_j m_j : n_j \in \mathbb{Z},\ j = 1, 2, \ldots, l \Big\},$$

мы имеем $N_j = M_j$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Чтобы обосновать соотношение (6.3), остается принять во внимание определение (6.1) и применить лемму 6.6. Соотношение (6.4) является простым следствием (6.3), леммы 6.1 и следствия 6.4. □

7. От теории чисел к теории вероятностей

В этом параграфе мы будем использовать теоретико-числовые результаты параграфа 6, чтобы оценивать интегралы от правой части неравенства (5.25). Напомним, что мы предполагаем выполнение условий лемм 5.4 и 5.6, $\delta \leqslant 1/(5s)$, $n \geqslant c_4$ и соотношений (5.23) для ортонормальной системы векторов $\mathcal{S} = \mathcal{S}_o$. Обозначение $\mathrm{SL}(d, \mathbb{R})$ используется ниже для множества всех матриц размера $(d \times d)$ с вещественными элементами и единичным определителем.

Определим матрицы

$$\mathbb{D}_r \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} r\,\mathbb{I}_s & \mathbb{O}_s \\ \mathbb{O}_s & r^{-1}\,\mathbb{I}_s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2s, \mathbb{R}), \quad r > 0, \tag{7.1}$$

$$\mathbb{K}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & -t\,\mathbb{I}_s \\ t\,\mathbb{I}_s & \mathbb{I}_s \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7.2}$$

$$\mathbb{U}_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & -t\,\mathbb{I}_s \\ \mathbb{O}_s & \mathbb{I}_s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2s,\mathbb{R}), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7.3}$$

и решетки

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & \mathbb{O}_s \\ \mathbb{O}_s & \mathbb{V} \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{2s}, \tag{7.4}$$

$$\Lambda_j = \mathbb{D}_j\,\mathbb{U}_{j^{-1}}\,\Lambda = \begin{pmatrix} j\,\mathbb{I}_s & -\mathbb{V} \\ \mathbb{O}_s & j^{-1}\,\mathbb{V} \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{2s}, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{7.5}$$

где $\mathbb{V}$ – матрица, определенная в (5.26). Ниже мы будем использовать следующие простые свойства этих матриц:

$$\mathbb{D}_a\,\mathbb{D}_b = \mathbb{D}_{ab}, \quad \mathbb{U}_a\,\mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a+b} \ \text{ и } \ \mathbb{D}_a\,\mathbb{U}_b = \mathbb{U}_{a^2 b}\,\mathbb{D}_a \ \text{ при } a, b > 0. \tag{7.6}$$

В дальнейшем обозначение $(m,\overline{m})$ при $m,\overline{m} \in \mathbb{R}^s$ означает, что $(m,\overline{m}) \in \mathbb{R}^{2s}$, а координатами вектора $(m,\overline{m})$ являются координаты векторов m и $\overline{m}$ в соответствующем порядке, то есть, $(m,\overline{m}) = (m_1, m_2, \dots, m_s, \overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_s)$.

Пусть $M_{j,t}$, $j = 1, 2, \dots, 2s$, – последовательные минимумы нормы $\|\cdot\|_\infty$ по отношению к решетке

$$\Xi_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r\,\mathbb{I}_s & -r\,t\,\mathbb{V} \\ \mathbb{O}_s & r^{-1}\,\mathbb{I}_s \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{2s}. \tag{7.7}$$

Пользуясь леммами 6.2 и 6.6 и равенством $\det(\Xi_t) = 1$, легко показать, что

$$M_{1,t} \ll_s 1. \tag{7.8}$$

Кроме того, $M_{j,t}$ являются одновременно последовательными минимумами нормы $F^*(\cdot)$, определяемой для $(m,\overline{m}) \in \mathbb{R}^{2s}$, $m,\overline{m} \in \mathbb{R}^s$, соотношением

$$F^*((m,\overline{m})) \stackrel{\text{def}}{=} \max\bigl\{\|m\|_\infty, \bigl\|\mathbb{V}^{-1}\overline{m}\bigr\|_\infty\bigr\},$$

по отношению к решетке

$$\Omega_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r\,\mathbb{I}_s & -r\,t\,\mathbb{V} \\ \mathbb{O}_s & r^{-1}\,\mathbb{V} \end{pmatrix} \mathbb{Z}^{2s} = \mathbb{D}_r\,\mathbb{U}_t\,\Lambda. \tag{7.9}$$

Заметим, что, в соответствии с (5.28), $F^*(\,\cdot\,) \asymp_s \|\cdot\|$.

Согласно соотношениям (7.7), (7.8), леммам 6.1, 6.5 и следствию 6.4,

$$\sum_{m,\overline{m}\in\mathbb{Z}^s} \exp\big\{-r^2\,\|m-t\,\mathbb{V}\overline{m}\|^2 - \|\overline{m}\|^2/r^2\big\} = \sum_{v\in\Xi_t} \exp\big\{-\|v\|^2\big\}$$
$$\ll_s R_t \overset{\text{def}}{=} \#\big\{v\in\Xi_t \,:\, \|v\|<1\big\}$$
$$\ll_s \alpha(\Xi_t) \asymp_s \alpha(\Omega_t). \tag{7.10}$$

Теперь, согласно (5.25), (7.9) и (7.10), мы имеем

$$\mathbf{E}\,\mathrm{e}\big\{\langle\mathbb{B}_t\,\zeta_n,\zeta_n'\rangle\big\} \ll_s r^{-s}\,\alpha(\Omega_t) = r^{-s}\,\alpha(\mathbb{D}_r\,\mathbb{U}_t\,\Lambda). \tag{7.11}$$

Пользуясь (7.11) и леммами 5.4 и 5.6, мы выводим следующую лемму.

Лемма 7.1. *Пусть выполнены условия леммы* 5.4 *с* $\delta\leqslant 1/(5s)$ *и с ортонормальной системой векторов* $\mathcal{S}=\mathcal{S}_o=\{e_1,\dots,e_s\}\subset\mathbb{R}^d$. *Тогда для любых* $b\in\mathbb{R}^d$ *и* $r\geqslant 1$

$$\int_{r^{-1}}^{1}\big|\,\widehat{\Psi}_b(t/2)\,\big|\,\frac{dt}{t} \ll_s (pN)^{-1} + r^{-s/2}\,\sup_{\Gamma}\int_{r^{-1}}^{1}\big(\alpha(\mathbb{D}_r\,\mathbb{U}_t\,\Lambda)\big)^{1/2}\,\frac{dt}{t}, \tag{7.12}$$

где r, $\alpha(\,\cdot\,)$, $\mathbb{D}_r$ $\mathbb{U}_t$ *и решетка* Λ *определены соотношениями* (5.2), (5.24), (5.26), (6.1), (6.2), (7.1), (7.3) *и* (7.4) *и в лемме* 5.6. *Супремум* $\sup_\Gamma$ *означает здесь супремум по всевозможным векторам* $z_j, z_j'\in\mathbb{R}^d$ (*участвующим в определениях матриц* $\mathbb{B}_t$ *и* $\mathbb{V}$) *и таким, что*

$$\|z_j-e_j\|\leqslant\delta,\qquad \|z_j'-e_j\|\leqslant\delta\qquad \text{при } 1\leqslant j\leqslant s.$$

Пусть $v=(m,\overline{m})\in\mathbb{R}^{2s}$, $m,\overline{m}\in\mathbb{R}^s$ и $t\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\overline{m}+t\,m = (1+t^2)\,\overline{m} + t\,(m-t\overline{m}). \tag{7.13}$$

Из равенства (7.13) следует, что $\|\overline{m}+t\,m\| \ll_s \|\overline{m}\| + \|m-t\overline{m}\|$ при $|t|\ll_s 1$. Следовательно,

$$r\,\|m-t\overline{m}\| + r^{-1}\,\|\overline{m}+t\,m\| \ll_s r\,\|m-t\overline{m}\| + r^{-1}\,\|\overline{m}\| \tag{7.14}$$

при $r \gg 1$, $|t| \ll_s 1$. Согласно (7.1)–(7.3), мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_r \mathbb{U}_t v &= (r(m - t\overline{m}),\, r^{-1}\,\overline{m}), \\ \mathbb{D}_r \mathbb{K}_t v &= (r(m - t\overline{m}),\, r^{-1}\,(\overline{m} + t m)). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Ясно, что операторы $\mathbb{D}_r \mathbb{U}_t$ и $\mathbb{D}_r \mathbb{K}_t$ обратимы. Поэтому, используя (7.14) и (7.15) и применяя леммы 6.2 и 6.5, мы выводим неравенство

$$\alpha(\mathbb{D}_r \mathbb{U}_t\, \Omega) \ll_s \alpha(\mathbb{D}_r \mathbb{K}_t\, \Omega) \quad \text{при } r \gg 1,\ |t| \ll_s 1, \tag{7.16}$$

справедливое для любой решетки $\Omega \subset \mathbb{R}^{2s}$.

Пусть $\mathbb{T}$ – перестановочная матрица размера $(2s \times 2s)$, которая переставляет строки $(2s \times 2s)$-матрицы $\mathbb{A}$ таким образом, что новый порядок (соответствующий матрице $\mathbb{T}\mathbb{A}$) таков:

$$1, s+1, 2, s+2, \ldots, s, 2s.$$

Заметим, что оператор $\mathbb{T}$ изометричен, а $\mathbb{A} \mapsto \mathbb{A}\,\mathbb{T}^{-1}$ переставляет столбцы $\mathbb{A}$ в упомянутом выше порядке. Легко видеть, что

$$\alpha_j(\mathbb{T}\Omega) = \alpha_j(\Omega), \quad j = 1, \ldots 2s, \quad \text{и} \quad \alpha(\mathbb{T}\Omega) = \alpha(\Omega) \tag{7.17}$$

для любой решетки $\Omega \subset \mathbb{R}^{2s}$.

Заметим теперь, что

$$\mathbb{T}\mathbb{D}_r \mathbb{K}_t\, \Lambda_j = \mathbb{T}\mathbb{D}_r \mathbb{K}_t \mathbb{T}^{-1}\mathbb{T}\,\Lambda_j = \mathbb{W}_t \Delta_j, \tag{7.18}$$

где Δ_j – решетка, определяемая равенством

$$\Delta_j = \mathbb{T}\,\Lambda_j, \tag{7.19}$$

и где $\mathbb{W}_t$ – $(2s \times 2s)$-матрица вида

$$\mathbb{W}_t = \begin{pmatrix} \mathbb{G}_{r,t} & \mathbb{O}_2 & : & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{G}_{r,t} & : & \mathbb{O}_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{O}_2 & : & \mathbb{G}_{r,t} \end{pmatrix},$$

построенная из (2×2)-матриц $\mathbb{O}_2$ (с нулевым элементами) и

$$\mathbb{G}_{r,t} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r & -rt \\ r^{-1}t & r^{-1} \end{pmatrix}.$$

Пусть $|t| \leqslant 2$ и

$$\theta = \arcsin\bigl(t\,(1+t^2)^{-1/2}\bigr) \quad \text{или, что то же самое,} \quad t = \tan\theta. \tag{7.20}$$

Тогда мы имеем

$$\begin{gathered} |\theta| \leqslant c^* \stackrel{\text{def}}{=} \arcsin(2/\sqrt{5}), \\ \cos\theta = (1+t^2)^{-1/2}, \quad \sin\theta = t\,(1+t^2)^{-1/2}. \end{gathered} \tag{7.21}$$

Легко видеть, что

$$\mathbb{G}_{r,t} = (1+t^2)^{1/2}\,\overline{\mathbb{D}}_r\,\overline{\mathbb{K}}_\theta \quad \text{и} \quad \mathbb{W}_t = (1+t^2)^{1/2}\,\widetilde{\mathbb{D}}_r\,\widetilde{\mathbb{K}}_\theta, \tag{7.22}$$

где

$$\widetilde{\mathbb{D}}_r = \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{D}}_r & \mathbb{O}_2 & : & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & \overline{\mathbb{D}}_r & : & \mathbb{O}_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{O}_2 & : & \overline{\mathbb{D}}_r \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbb{K}}_\theta = \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{K}}_\theta & \mathbb{O}_2 & : & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & \overline{\mathbb{K}}_\theta & : & \mathbb{O}_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{O}_2 & : & \overline{\mathbb{K}}_\theta \end{pmatrix} \tag{7.23}$$

– $(2s \times 2s)$-матрицы с

$$\overline{\mathbb{D}}_r \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{\mathbb{K}}_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}). \tag{7.24}$$

Подставляя (7.22) в равенство (7.18), мы получаем

$$\mathbb{T}\mathbb{D}_r\mathbb{K}_t\,\Lambda_j = (1+t^2)^{1/2}\,\widetilde{\mathbb{D}}_r\,\widetilde{\mathbb{K}}_\theta\,\Delta_j. \tag{7.25}$$

Ниже мы будем также использовать следующую важную лемму из работы Ф. Гётце и Г. А. Маргулиса [18].

Лемма 7.2. *Пусть* $\widetilde{\mathbb{K}}_\theta$ *и*

$$\widetilde{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbb{H}} & \mathbb{O}_2 & : & \mathbb{O}_2 \\ \mathbb{O}_2 & \overline{\mathbb{H}} & : & \mathbb{O}_2 \\ .. & .. & .. & .. \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{O}_2 & : & \overline{\mathbb{H}} \end{pmatrix}$$

– такие $(2d \times 2d)$*-матрицы, что* $\overline{\mathbb{H}} \in \mathcal{G} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$*, а матрица* $\widetilde{\mathbb{K}}_\theta$ *определена в* (7.23) *и* (7.24)*. Пусть* β *– такое положительное число, что* $\beta\, d > 2$*. Тогда для всех* $\overline{\mathbb{H}} \in \mathcal{G}$ *и любой решетки* $\Delta \subset \mathbb{R}^{2d}$

$$\int\limits_0^{2\pi} \big(\alpha(\widetilde{\mathbb{H}}\, \widetilde{\mathbb{K}}_\theta\, \Delta)\big)^\beta d\theta \ll_{\beta,d} \big(\alpha(\Delta)\big)^\beta\ \big\|\overline{\mathbb{H}}\big\|^{\beta d-2}.$$

Здесь $\big\|\overline{\mathbb{H}}\big\|$ *– стандартная норма линейного оператора* $\mathbb{H} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*.*

Рассмотрим, в условиях леммы 7.1,

$$I_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{r^{-1}/2}^{1/2} \big|\,\widehat{\Psi}_b(t)\,\big|\, \frac{dt}{t} = \int\limits_{r^{-1}}^{1} \big|\,\widehat{\Psi}_b(t/2)\,\big|\, \frac{dt}{t}. \tag{7.26}$$

Согласно лемме 7.1, мы имеем

$$I_0 \ll_s (pN)^{-1} + r^{-s/2} \sup_\Gamma\ J, \tag{7.27}$$

где

$$J = \int\limits_{r^{-1}}^{1} \big(\alpha(\mathbb{D}_r\, \mathbb{U}_t\, \Lambda)\big)^{1/2}\, \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{j=2}^{\rho} I_j \tag{7.28}$$

с

$$I_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{j^{-1}}^{(j-1)^{-1}} \big(\alpha(\mathbb{D}_r\, \mathbb{U}_t\, \Lambda)\big)^{1/2}\, \frac{dt}{t}, \quad j = 2, 3, \dots, \rho \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lceil r \rceil + 1. \tag{7.29}$$

Делая замены переменных $t = v j^{-2}$ и $v = w + j$ в I_j и используя свойства (7.6) матриц $\mathbb{D}_r$ и $\mathbb{U}_t$, мы имеем

$$\begin{aligned} I_j &= \int\limits_{j}^{j^2(j-1)^{-1}} \big(\alpha(\mathbb{D}_r\, \mathbb{U}_{vj^{-2}}\, \Lambda)\big)^{1/2}\, \frac{dv}{v} \leqslant \int\limits_{j}^{j+2} \big(\alpha(\mathbb{D}_r\, \mathbb{U}_{vj^{-2}}\, \Lambda)\big)^{1/2}\, \frac{dv}{v} \\ &= \int\limits_0^2 \big(\alpha(\mathbb{D}_r\, \mathbb{U}_{wj^{-2}}\, \mathbb{U}_{j^{-1}}\, \Lambda)\big)^{1/2}\, \frac{dw}{w+j}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Согласно (7.6),

$$\mathbb{D}_r\,\mathbb{U}_{wj^{-2}} = \mathbb{D}_{rj^{-1}}\,\mathbb{D}_j\,\mathbb{U}_{wj^{-2}} = \mathbb{D}_{rj^{-1}}\,\mathbb{U}_w\,\mathbb{D}_j. \tag{7.31}$$

В силу (7.30) и (7.31),

$$I_j \ll \frac{1}{j}\int_0^2 \big(\alpha(\mathbb{D}_{rj^{-1}}\,\mathbb{U}_t\,\Lambda_j)\big)^{1/2}\,dt, \tag{7.32}$$

где решетки Λ_j определены в (7.5) (см. также (7.1), (7.3) и (7.4)). Пусть $N_1^{(j)} \leqslant \cdots \leqslant N_{2s}^{(j)}$ – последовательные минимумы евклидовой нормы по отношению к решетке Λ_j. Пользуясь (5.28) и (7.5), легко показать, что

$$\det(\Lambda_j) = \big|\det\mathbb{V}\big| \asymp_s 1 \quad \text{и} \quad N_1^{(j)} \gg_s 1. \tag{7.33}$$

Поэтому, согласно леммам 6.5 и 6.6, $N_k^{(j)} \asymp_s 1$, $k = 1, 2, \ldots, 2s$, и

$$\alpha(\Lambda_j) \ll_s 1. \tag{7.34}$$

Согласно (7.16), (7.17) и (7.25), мы имеем

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbb{D}_{rj^{-1}}\,\mathbb{U}_t\,\Lambda_j) &\ll_s \alpha(\mathbb{D}_{rj^{-1}}\,\mathbb{K}_t\,\Lambda_j) = \alpha(\mathbb{T}\mathbb{D}_{rj^{-1}}\,\mathbb{K}_t\,\Lambda_j)\\ &\ll_s \alpha(\widetilde{\mathbb{D}}_{rj^{-1}}\,\widetilde{\mathbb{K}}_\theta\,\Delta_j)\end{aligned} \tag{7.35}$$

при $|t| \ll_s 1$, $r \geqslant 1$, $j = 2, 3, \ldots, \rho$, где величина θ определена в (7.20). Пользуясь (7.20), (7.21), (7.23), (7.35) и леммой 7.2 (с $d = s$), мы получаем

$$\begin{aligned}\int_0^2 \big(\alpha(\mathbb{D}_{rj^{-1}}\,\mathbb{U}_t\,\Lambda_j)\big)^{1/2}\,dt &\ll_s \int_0^{c^*} \big(\alpha(\widetilde{\mathbb{D}}_{rj^{-1}}\,\widetilde{\mathbb{K}}_\theta\,\Delta_j)\big)^{1/2}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\ &\ll \int_0^{2\pi} \big(\alpha(\widetilde{\mathbb{D}}_{rj^{-1}}\,\widetilde{\mathbb{K}}_\theta\,\Delta_j)\big)^{1/2}\,d\theta \ll_s \big\|\overline{\mathbb{D}}_{rj^{-1}}\big\|^{s/2-2}\,\big(\alpha(\Delta_j)\big)^{1/2},\end{aligned} \tag{7.36}$$

если $s \geqslant 5$. Ясно, что $\big\|\overline{\mathbb{D}}_{rj^{-1}}\big\| = rj^{-1}$. Поэтому, в соответствии с (7.17), (7.19), (7.31) и (7.36),

$$I_j \ll_s \frac{1}{j}\,(rj^{-1})^{s/2-2}\,\big(\alpha(\Lambda_j)\big)^{1/2}. \tag{7.37}$$

Согласно (7.28), (7.34) и (7.37), мы получаем при $s \geqslant 5$, что

$$J \ll_s \sum_{j=2}^{\rho} \frac{1}{j} (rj^{-1})^{s/2-2} \ll_s r^{s/2-2}. \tag{7.38}$$

В силу (5.2), (5.24), (7.27) и (7.38), мы имеем $r \asymp_s (Np)^{1/2}$ и

$$I_0 \ll_s r^{-2} \ll_s (Np)^{-1}. \tag{7.39}$$

Ясно, что мы можем аналогично установить, что

$$\int_1^{c(s)} \left| \widehat{\Psi}_b(t/2) \right| \frac{dt}{t} \ll_s r^{-2} \ll_s (Np)^{-1} \tag{7.40}$$

для любой величины $c(s)$, зависящей только от s. Доказательство будет только проще благодаря тому, что переменная t не может быть малой в этом интеграле.

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 7.3. *Пусть выполнены условия леммы* 5.4 *с* $s \geqslant 5$ *и ортонормальной системой векторов* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_o$, *а* $c(s)$ *– величина, зависящая только от* s. *Тогда существует такая* c_s, *что*

$$\int_{r^{-1}}^{c(s)} \left| \widehat{\Psi}_b(t) \right| \frac{dt}{t} \ll_s (Np)^{-1}, \tag{7.41}$$

если $Np \gg_s c_s$, *где величина* r *определена в* (5.2) *и* (5.24).

Мы благодарим В. В. Ульянова за полезные обсуждения.

Литература

1. V. Bentkus, *Asymptotic expansions for distributions of sums of independent random elements in a Hilbert space.* — Lithuanian Math. J. **24** (1984), 305–319.
2. В. Бенткус, Ф. Гетце, *О числе целых точек в большом эллипсоиде.* — Доклады РАН **343** (1995), 4, 439–440.
3. V. Bentkus, F. Götze, *Optimal rates of convergence in functional limit theorems for quadratic forms*, Preprint 95-091 SFB 343, Universität Bielefeld, (1995).
4. V. Bentkus, F. Götze, *Optimal rates of convergence in the CLT for quadratic forms.* — Ann. Probab. **24** (1996), 1, 466–490.

5. V. Bentkus, F. Götze, *Uniform rates of convergence in the CLT for quadratic forms in multidimensional spaces.* — Probab. Theory Rel. Fields **109** (1997), 3, 367–416.
6. V. Bentkus, F. Götze, *On the lattice point problem for ellipsoids.* — Acta Arithmetica **80** (1997), 2, 101–125.
7. В. Бенткус, Ф. Гётце, В. Паулаускас, А. Рачкаускас, *Точность гауссовской аппроксимации в банаховых пространствах.* — Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления **81** (1991), 39–139.
8. V. Bentkus, F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Approximations of quadratic forms of independent random vectors by accompanying laws.* — Теория вероятн. и ее примен. **42** (1997), 2, 308–335.
9. V. Bentkus, F. Götze, R. Zitikis, *Asymptotic expansions in the integral and local limit theorems in Banach spaces with applications to ω-statistics.* — J. Theor. Probab. **6** (1993), 4, 727–780.
10. R. N. Bhattacharya, R. Ranga Rao, *Normal Approximation and Asymptotic Expansions.* Wiley, New York, 1986.
11. S. A. Bogatyrev, F. Götze, V. V. Ulyanov, *Non-uniform bounds for short asymptotic expansions in the CLT for balls in a Hilbert space.* — J. Multivariate Anal. **97** (2006), 9, 2041–2056.
12. J. W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers.* Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959.
13. H. Davenport, *Indefinite quadratic forms in many variables* (II). — Proc. London Math. Soc. **8** (1958), 3, 109–126.
14. C.-G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions.* — Acta Math. **77** (1945), 1–125.
15. F. Fricker, *Einführung in die Gitterpunktlehre.* Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1982.
16. F. Götze, *Asymptotic expansions for bivariate von Mises functionals.* — Z. Wahrsch. verw. Geb. **50** (1979), 333–355.
17. F. Götze, *Lattice point problem and values of quadratic forms.* — Invent. Math. **157** (2004), 1, 195–226.
18. F. Götze, G. A. Margulis, *Distribution of values of quadratic forms at integral points.* Preprint http://arxiv.org/abs/1004.5123 (2010).
19. F. Götze, V. Ulyanov, *Uniform approximations in the CLT for balls in Euclidian spaces.* Preprint 00-034 SFB 343, Universität Bielefeld, Bielefeld (2000).
20. F. Götze, V. Ulyanov, *Asymptotic disrtribution of χ^2-type statistics.* Preprint 03-033, Research group “Spectral analysis, asymptotic distributions and stochastic dynamics” (2003).
21. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Uniform rates of convergence in the CLT for quadratic forms.* Preprint 08119 SFB 701, Universität Bielefeld, Bielefeld (2008).
22. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Uniform rates of approximation by short asymptotic expansions in the CLT for quadratic forms of sums of i.i.d. random vectors.* Preprint 09073 SFB 701, Universität Bielefeld, Bielefeld (2009).
23. F. Götze, A. Yu. Zaitsev, *Uniform rates of approximation by short asymptotic expansions in the CLT for quadratic forms of sums of i.i.d. random vectors.* Preprint 10086 SFB 701, Universität Bielefeld, Bielefeld (2010).

24. G. H. Hardy, *The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$.* — Proc. London Math. Soc. **15** (1916), 2, 192–213.
25. A. K. Lenstra, H. W. Jr. Lenstra, L. Lovász, *Factoring polynomials with rational coefficients.* — Math. Ann. **261** (1982), 4, 515–534.
26. D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I.* Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1983.
27. S. V. Nagaev, *On a new approach to the study of the distribution of the norm of random element in Hilbert space.* Abstracts of the Fifth Intern. Vilnius Conf. in Probab. Theory and Math. Stat. **4**, Mokslas, VSP, Vilnius (1989), pp. 77–78.
28. S. V. Nagaev, V. I. Chebotarev, *On the accuracy of Gaussian approximation in Hilbert space.* Limit theorems of probability theory (Vilnius, 1999). Acta Appl. Math. **58** (1999), 1–3, 189–215.
29. S. V. Nagaev, V. I. Chebotarev, *On the accuracy of Gaussian approximation in Hilbert space.* — Siberian Adv. Math. **15** (2005), 1, 11–73.
30. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
31. H. Prawitz, *Limits for a distribution, if the characteristic function is given in a finite domain.* — Skand. AktuarTidskr. (1972), 138–154.
32. В. В. Сенатов, *Качественные эффекты в оценках скорости сходимости в центральной предельной теореме в многомерных пространствах.* — Труды МИАН **215** (1997), 1–239.
33. V. V. Senatov, *Normal approximation: new results, methods and problems.* Modern Probability and Statistics. VSP, Utrecht (1998).
34. H. Weyl, *Über die Gleichverteilung der Zahlen mod-Eins.* — Math. Ann., **77** (1915/16), 313–352.
35. Б. А. Залесский, В. В. Сазонов, В. В. Ульянов, *Нормальная аппроксимация в гильбертовом пространстве.* I; II. — Теория вероятн. и ее примен. **33** (1988), 2, 225–245; 3, 508–521.

Götze F., Zaitsev A. Yu. Uniform rates of approximation by short asymptotic expansions in the CLT for quadratic forms.

Let $X, X_1, X_2, \dots$ be i.i.d. $\mathbb{R}^d$-valued real random vectors. Assume that $\mathbf{E}\, X = 0$ and that X has a non-degenerate distribution. Let G be a mean zero Gaussian random vector with the same covariance operator as that of X. We investigate the distributions of non-degenerate quadratic forms $\mathbb{Q}[S_N]$ of the normalized sums $S_N = N^{-1/2}\,(X_1 + \dots + X_N)$ and show that, without any additional conditions, for any $a \in \mathbb{R}^d$,

$$\Delta_N^{(a)} = \sup_x \big|\, \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}[S_N - a] \leqslant x\big\} - \mathbf{P}\big\{\mathbb{Q}[G - a] \leqslant x\,\big\} - E_a(x)\big| = \mathcal{O}\big(N^{-1}\big),$$

provided that $d \geqslant 5$ and $\mathbf{E}\, \|X\|^4 < \infty$. Here $E_a(x)$ is the Edgeworth type correction of order $\mathcal{O}\big(N^{-1/2}\big)$. Furthermore, we provide explicit bounds of order $\mathcal{O}\big(\,N^{-1}\big)$ for $\Delta_N^{(a)}$ and for the concentration function of the random variable $\mathbb{Q}[S_N + a]$, $a \in \mathbb{R}^d$. Our results extend the corresponding results of Bentkus and Götze (1997) ($d \geqslant 9$) to the case $d \geqslant 5$.

Поступило 12 ноября 2010 г.

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld, Postfach 100131,
D-33501 Bielefeld, Germany

E-mail: goetze@math.uni-bielefeld.de

St. Petersburg Branch Steklov Mathematical Institute,
Fontanka 27, St. Petersburg 191011, Russia

E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru