Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

А. Н. Бородин

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ДИФФУЗИЙ СО СКАЧКАМИ, ОСТАНОВЛЕННЫХ В МОМЕНТЫ ДОСТИЖЕНИЯ МАКСИМУМА ИЛИ МИНИМУМА

1. Диффузии со скачками. В работе рассматриваются диффузионные процессы со скачками. Для таких процессов максимальные и минимальные значения достигаются только в одной точке. Нас интересуют распределения интегральных функционалов от диффузий со скачками в моменты времени, в которые достигаются максимальные или минимальные значения диффузии. Эта работа продолжает исследования, начатые в [1]. Для диффузий без скачков задача о совместном распределении максимума и его положения была рассмотрена в [2].

Мы рассматриваем широкий класс однородных диффузий со скачками. Детальное описание этого класса дано в [3]. Такая диффузия начинается как однородная диффузия X, которая является решением стохастического дифференциального уравнения: п.н. для любого $s \leqslant t \leqslant T$

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mu(X(u))\,du + \int_s^t \sigma(X(u))\,dW(u), \tag{1.1}$$

где W – броуновское движение, а функции $\mu(x)$, $\sigma(x)$ удовлетворяют условию Липшица и ограничению на не более чем линейный рост на $\pm\infty$. Предполагается, что $\sigma(x) > 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и $X(0) = x$.

Пусть τ_k, $k = 1, 2, \ldots$, – независимые экспоненциально распределенные с параметром 1 случайные величины ($\mathbf{P}(\tau_k \geqslant t) = e^{-t}$), и

Ключевые слова: распределение функционалов, диффузия со скачками, инфимумы, супремумы.

Настоящая работа частично поддерживалась грантами РФФИ-ННИО 09-01-91331, НШ-4472.2010.1 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

Y_k, $k = 1, 2, \dots$, – независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от τ_k, $k = 1, 2, \dots$. Мы предполагаем, что броуновское движение W не зависит от величин τ_k и Y_k, $k = 1, 2, \dots$.

Для неотрицательной кусочно непрерывной функции h момент

$$\varkappa_1 := \min\left\{s : \int_0^s h(X(v))\,dv = \tau_1\right\}$$

является моментом обратным к интегральному функционалу от диффузии X.

Обобщенная диффузия со скачками (обозначается J) определяется рекуррентно следующим образом. Пусть $\rho(x, y)$ – некоторая измеримая функция. Для $0 \leqslant t \leqslant \varkappa_1$ полагаем $J(t) = X(t)$, где X – решение уравнения (1.1). Для $l = 1, 2, \dots$, процесс J является решением следующего стохастического дифференциального уравнения:

$$J(t) = \rho\bigl(J(\varkappa_l-), Y_l\bigr) + \int_{\varkappa_l}^t \mu(J(u))\,du + \int_{\varkappa_l}^t \sigma(J(u))\,dW(u)$$

на интервале времени $\varkappa_l \leqslant t < \varkappa_{l+1}$, где

$$\varkappa_{l+1} := \min\left\{s \geqslant \varkappa_l : \int_{\varkappa_l}^s h(J(v))\,dv = \tau_{l+1}\right\}.$$

В любой момент $\varkappa_l$ диффузия со скачками J начинается заново как обычная диффузия X, выходящая из точки $\rho\bigl(J\bigl(\varkappa_l -\bigr), Y_l\bigr)$.

Пусть τ – случайный момент времени, не зависящий от процесса $J(s)$, $s \geqslant 0$, и распределенный экспоненциально с параметром $\lambda > 0$.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ вероятность и математическое ожидание относительно процесса J при условии $J(0) = x$. В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение $\mathbf{E}\{\xi; A\} := \mathbf{E}\{\xi \mathbb{I}_A\}$.

Обозначим $H_b := \min\{s : J(s) \geqslant b\}$ – момент первого превышения уровня b. Для диффузий со скачками момент первого превышения уровня может происходить либо посредством пересечения уровня, либо посредством перескока.

Важным для рассматриваемой задачи является случай, когда превышение осуществляется посредством пересечения уровня. Поэтому часто мы рассматриваем условие $J(H_b) = b$.

Для неотрицательной кусочно непрерывной функции g обозначим

$$I(s) := \int\limits_0^s g(J(v))\,dv.$$

Момент $\nu(t) := \min\{s : I(s) = t\}$ является моментом обратным к интегральному функционалу от диффузии J.

Из строго марковского свойства процесса J следует, что при условии $J(H_b) = b$, процесс $\widetilde{J}(s) := J(s + H_b)$, $s \geqslant 0$, распределен как процесс $J(s)$, $s \geqslant 0$, с начальным значением $J(0) = b$. Ясно, что при условии $\nu(t) \geqslant H_b$

$$\nu(t) = \min\Big\{s \geqslant H_b : I(H_b) + \int\limits_{H_b}^s g(J(v))\,dv = t\Big\}$$

$$= H_b + \min\Big\{s : \int\limits_0^s g(\widetilde{J}(v))\,dv = t - I(H_b)\Big\} = H_b + \widetilde{\nu}(t - I(H_b)), \quad (1.2)$$

где $\widetilde{\nu}(t)$ определен аналогично $\nu(t)$, но для процесса $\widetilde{J}$.

Пусть $\wp_l(J(s), u \leqslant s \leqslant v)$, $l = 1, 2$, – ограниченные измеримые функционалы от процесса J, заданного на интервале $[u, v]$.

Если для всех $t \geqslant 0$ и $h > 0$ выполняется

$$\wp_l(J(s), t \leqslant s \leqslant t + h) = \wp_l(J(s + t), 0 \leqslant s \leqslant h),$$

то функционал $\wp_l(J(s), u \leqslant s \leqslant t)$ называется однородным.

Для однородного функционала $\wp_l(J(s), 0 \leqslant s \leqslant h)$ мы предполагаем, что он п.н. кусочно непрерывен относительно h.

Лемма 1.1. *Для однородных ограниченных п.н. кусочно непрерывных функционалов $\wp_l$, $l = 1, 2$,*

$$\mathbf{E}_x\big\{\wp_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant H_b)\,\wp_2(J(u), H_b \leqslant u \leqslant \nu(\tau)); J(H_b) = b, H_b \leqslant \nu(\tau)\big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\big\{e^{-\lambda I(H_b)}\wp_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant H_b); J(H_b) = b\big\}\mathbf{E}_b\wp_2(J(u), 0 \leqslant u \leqslant \nu(\tau)). \quad (1.3)$$

Доказательство. Используя независимость τ от диффузии со скачками и равенство $\mathbb{I}_{[I(H_b)<t)} = \mathbb{I}_{[H_b<\nu(t))}$, левую часть в (1.3) мы преобразуем следующим образом

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbf{E}_x\Big\{\mathbb{I}_{[0,t)}(I(H_b))\wp_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b)$$

$$\times\wp_2(J(u),H_b\leqslant u\leqslant\nu(t));J(H_b)=b\Big\}dt$$

$$=\mathbf{E}_x\Big\{\lambda\wp_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b)\int_{I(H_b)}^\infty e^{-\lambda t}\wp_2(J(u),H_b\leqslant u\leqslant\nu(t))dt\Big|J(H_b)=b\Big\}$$

$$\times\mathbf{P}_x(J(H_b)=b)=\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_b)}\wp_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b)\lambda\int_{I(H_b)}^\infty e^{-\lambda(t-I(H_b))}$$

$$\times\wp_2(\widetilde{J}(s),0\leqslant s\leqslant\widetilde{\nu}(t-I(H_b)))\,dt\Big|J(H_b)=b\Big\}\mathbf{P}_x(J(H_b)=b).$$

По строго марковскому свойству диффузии со скачками, правая часть этого равенства преобразуется к виду

$$\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_b)}\wp_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b);J(H_b)=b\Big\}$$

$$\times\mathbf{E}_b\Big\{\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\wp_2(\widetilde{J}(u),0\leqslant u\leqslant\widetilde{\nu}(t))\,dt\Big\}$$

$$=\mathbf{E}_x\big\{e^{-\lambda I(H_b)}\wp_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b);J(H_b)=b\big\}$$

$$\times\mathbf{E}_b\Big\{\wp_2(J(u),0\leqslant u\leqslant\nu(\tau))\Big\}.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Вычисление распределений положений максимума и минимума основано на общих результатах, касающихся распределений функционалов от диффузий со скачками. Мы сформулируем некоторые из них (см. [3], [4]).

Теорема 1.1. *Пусть* $\varPhi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ *и* $h(x)$, $x \in [a,b]$, *– кусочно непрерывные функции. Предположим, что* $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $h \geqslant 0$. *Тогда функция*

$$Q(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu(\tau)))\exp\Big(-\int\limits_0^{\nu(\tau)} f(J(s))\,ds\Big);$$

$$a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant \nu(\tau)} J(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \nu(\tau)} J(s) \leqslant b\Big\}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$Q(x) = M(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}Q(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{1.4}$$

где $M(x)$, $x \in (a,b)$, *– единственное решение задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - (\lambda g(x) + h(x) + f(x))M(x) = -\lambda g(x)\varPhi(x), \tag{1.5}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 0, \tag{1.6}$$

а $G_z(x)$, $x \in (a,b)\setminus\{z\}$ *– единственное непрерывное решение задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)G''(x) + \mu(x)G'(x) - (\lambda g(x) + h(x) + f(x))G(x) = 0, \tag{1.7}$$

$$G'(z+0) - G'(z-0) = -2h(z)/\sigma^2(z), \tag{1.8}$$

$$G(a) = 0, \qquad G(b) = 0. \tag{1.9}$$

Полагаем $M(x) = 0$, $G_z(x) = 0$ *при* $x \notin (a,b)$ *или* $z \notin (a,b)$.

Замечание 1.1. Если $a = -\infty$ или $b = \infty$, то предполагается, что функция $\varPhi(x)$ является ограниченной, а соответствующее граничное условие в (1.6) и (1.9) заменяется условием ограниченности решения на соответствующем конце.

Следующий результат является основополагающим для задачи вычисления распределений интегральных функционалов и функционалов минимума и максимума от мостов диффузий со скачками, т. е. для процессов, у которых конец траектории фиксируется.

Теорема 1.2. *Пусть $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $h \geqslant 0$. Тогда функция*

$$B_y(x) := \frac{d}{dy}\mathbf{E}_x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\nu(\tau)} f(J(s))\,ds\Big); a \leqslant \inf_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)} J(s),$$

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)} J(s) \leqslant b, J(\nu(\tau)) < y\Big\}$$

существует и является единственным ограниченным решением уравнения

$$B_y(x) = G_y^{\lambda}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z(x)\,\mathbf{E}B_y(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{1.10}$$

где $G_z(x)$ – единственное непрерывное решение задачи (1.7) – (1.9), а $G_y^{\lambda}(x)$ при $x \in (a,b)\setminus\{y\}$ является единственным непрерывным решением задачи (1.7) – (1.9), в которой соотношение (1.8) заменено на следующее:

$$G'(y+0) - G'(y-0) = -2\lambda g(y)/\sigma^2(y). \tag{1.11}$$

Полагаем $G_z(x) = 0$ при $x \notin (a,b)$ или $z \notin (a,b)$ и полагаем $G_y^{\lambda}(x) = 0$ при $x \notin (a,b)$ или $y \notin (a,b)$.

Ясно, что

$$Q(x) = \int\limits_a^b \Phi(y) B_y(x)\,dy. \tag{1.12}$$

Основную роль для вычисления распределений моментов достижения максимумов и минимумов играют результаты, позволяющие нам вычислять распределения функционалов от диффузий со скачками, остановленных в моменты первого выхода из интервала.

Обозначим $H_{a,b} := \min\{s : J(s) \notin (a,b)\}$ – момент первого выхода из интервала (a,b).

Для диффузий со скачками момент первого выхода может происходить или посредством пересечения границы, или посредством перескока границы.

Для рассматриваемой задачи важное значение имеет случай, когда выход осуществляется посредством пересечения границы. В этом случае справедлив следующий результат (см. [5]).

Теорема 1.3. *Пусть $f(x)$, $h(x)$, $x \in [a,b]$, – кусочно непрерывные функции. Предположим, что $f \geqslant 0$, $h \geqslant 0$. Тогда функция*

$$R^\circ(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(J(s))\,ds\Big); J(H_{a,b}) = b\Big\}\mathbb{I}_{[a,b]}(x)$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$R^\circ(x) = M_b(x)\mathbb{I}_{[a,b]}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_z^\circ(x)\mathbf{E}R^\circ(\rho(z,Y_1))\,dz, \tag{1.13}$$

где $M_b(x)$ – единственное решение задачи

$$\frac{\sigma^2(x)}{2}M''(x) + \mu(x)M'(x) - (h(x)+f(x))M(x) = 0, \quad x \in (a,b), \tag{1.14}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1. \tag{1.15}$$

Функция $G_z^\circ(x)$ при $x \in (a,b)\setminus\{z\}$ является единственным непрерывным решением задачи (1.7)–(1.9) для $\lambda = 0$, и $G_z^\circ(x) = 0$, если или $x \notin (a,b)$, или $z \notin (a,b)$.

Замечание 1.2. Аналогичный результат верен для случая, когда $J(H_{a,b}) = a$.

2. Оценки для вероятностей попадания диффузий со скачками в интервалы. Мы докажем некоторые оценки с помощью теорем 1.1–1.3. В [1] такие оценки были получены для диффузий с $g(x) \equiv 1$ и $h(x) \equiv \lambda_1$.

Пусть $\psi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – возрастающее положительное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Y''(x) + \mu(x)Y'(x) - (\lambda g(x) + h(x))Y(x) = 0, \tag{2.1}$$

а $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – убывающее положительное решение этого уравнения.

Предположим, что $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} h(x) < \infty$, $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} g(x) < \infty$ и $\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} g(x) > 0$.

Лемма 2.1. *Пусть* $R^\circ_{a-\delta,b}(x) := \mathbf{E}_x\{e^{-\lambda I(H_{a-\delta,b})}; J(H_{a-\delta,b}) = b\}$. *Тогда для некоторой постоянной* $C_{a,b}$

$$R^\circ_{a-\delta,b}(a) \sim \delta C_{a,b}, \qquad \text{\textit{при}} \quad \delta \downarrow 0. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Поскольку $-J(s)$, $s \geqslant 0$, является снова диффузией со скачками, то для $\widetilde{R}^\circ_{a,b+\delta}(x) := \mathbf{E}_x\{e^{-\lambda I(H_{a,b+\delta})}; J(H_{a,b+\delta}) = a\}$ имеем аналогичный результат: для некоторой постоянной $\widetilde{C}_{a,b}$

$$\widetilde{R}^\circ_{a,b+\delta}(b) \sim \delta \widetilde{C}_{a,b}, \qquad \text{при} \quad \delta \downarrow 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для того, чтобы вычислить $R^\circ_{a-\delta,b}(x)$, применим теорему 1.3. Очевидно, что решение задачи (1.18), (1.19) для $f(x) = \lambda g(x)$ и $a-\delta$ вместо a имеет вид

$$M_b(x) = \frac{\rho(x, a-\delta)}{\rho(b, a-\delta)}, \qquad x \in (a-\delta, b),$$

где $\rho(x,y) := \psi(x)\varphi(y) - \psi(y)\varphi(x) > 0$ для $y < x$. Функция $\rho(x,y)$ возрастает по x для фиксированного y и убывает по y для фиксированного x. Решение задачи (1.7)–(1.9) в нашем случае ($f(x) \equiv 0$) следующее

$$G^\circ_z(x) = \begin{cases} \dfrac{2h(z)}{\sigma^2(z)} \dfrac{\rho(b,z)\rho(x,a-\delta)}{\Delta(z)\rho(b,a-\delta)}, & a-\delta \leqslant x \leqslant z, \\ \dfrac{2h(z)}{\sigma^2(z)} \dfrac{\rho(b,x)\rho(z,a-\delta)}{\Delta(z)\rho(b,a-\delta)}, & z \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\Delta(z) := \psi'(z)\varphi(z) - \psi(z)\varphi'(z) > 0$ – вронскиан.

При $\delta \downarrow 0$

$$M_b(a) \sim \frac{\delta\Delta(a)}{\rho(b,a)},$$

для $a \leqslant z$

$$G^\circ_z(a) \sim \frac{\delta 2h(z)}{\sigma^2(z)} \frac{\rho(b,z)\Delta(a)}{\Delta(z)\rho(b,a)},$$

и для $a-\delta < z < a$

$$G^\circ_z(a) \leqslant C\delta.$$

Согласно (1.13),

$$R^\circ_{a-\delta,b}(a) = M_b(a) + \int\limits_{a-\delta}^{b} G^\circ_z(a)\mathbf{E}R^\circ_{a-\delta,b}(\rho(z,Y_1))\,dz$$

и

$$R^\circ_{a-\delta,b}(a) \sim \delta\frac{\Delta(a)}{\rho(b,a)}\Big(1+\int\limits_a^b \frac{2h(z)\rho(b,z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\mathbf{E}R^\circ_{a,b}(\rho(z,Y_1))\,dz\Big). \qquad (2.5)$$

Это влечет (2.2). □

Лемма 2.2. *Для некоторых постоянных C_b, K_b справедливы следующие соотношения*

$$\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)} J(s)\leqslant b+\delta\Big)\sim\delta C_b \qquad \textit{при} \quad \delta\downarrow 0, \qquad (2.6)$$

$$\sup_{x\leqslant b+\delta}\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)} J(s)\in[b,b+\delta)\Big)\leqslant\delta K_b. \qquad (2.7)$$

Доказательство. Пусть

$$Q_b(x):=\mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)} J(s)\leqslant b\Big).$$

Для того, чтобы вычислить эту вероятность, рассмотрим задачи (1.5), (1.6) и (1.7)–(1.9) для $f(x)\equiv 0$, $\varPhi(x)\equiv 1$, $a=-\infty$. Случай ($a=-\infty$) регулируется замечанием 1.1. Согласно (1.4),

$$Q_b(x)=M_b(x)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{h(z)}_{b,z}(x)\,\mathbf{E}Q_b(\rho(z,Y_1))\,dz, \qquad (2.8)$$

где $M_b(x)$ – решение (1.5), (1.6), а $G^{h(z)}_{b,z}(x)$ является решением (1.7)–(1.9) согласно вышеприведенным ограничениям.

Нетрудно проверить, что решение задачи (1.7)–(1.9) имеет вид

$$G^{h(z)}_{b,z}(x)=\begin{cases}\dfrac{2h(z)}{\sigma^2(z)}\dfrac{\rho(b,z)\psi(x)}{\Delta(z)\psi(b)}, & x\leqslant z,\\[2mm] \dfrac{2h(z)}{\sigma^2(z)}\dfrac{\rho(b,x)\psi(z)}{\Delta(z)\psi(b)}, & z\leqslant x\leqslant b.\end{cases} \qquad (2.9)$$

Аналогично, функция Грина для задачи (1.5), (1.6) (т.е. решение в случае, когда $\varPhi(x)$ заменяется δ-функцией Дирака) имеет вид

$G^{\lambda g(z)}_{b,z}(x)$, где в правой части (2.9) стоит $\lambda g(z)$ вместо $h(z)$. Тогда имеем

$$M_b(x) = \int\limits_{-\infty}^{b} G^{\lambda g(z)}_{b,z}(x)\, dz. \tag{2.10}$$

При $\delta \downarrow 0$, для $z \leqslant b$

$$G^{h(z)}_{b+\delta,z}(b) \sim \frac{2h(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)} \frac{\Delta(b)}{\psi(b)}\delta, \tag{2.11}$$

и для $b \leqslant z \leqslant b+\delta$

$$G^{h(z)}_{b+\delta,z}(b) \leqslant L_b\delta \tag{2.12}$$

с некоторой постоянной L_b. Теперь из (2.10)–(2.12) следует, что

$$M_{b+\delta}(b) \sim \delta\frac{2\lambda\Delta(b)}{\psi(b)} \int\limits_{-\infty}^{b} \frac{g(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)} dz.$$

Используя (2.8) и (2.11), (2.12), получаем

$$Q_{b+\delta}(b) \sim \delta\frac{2\Delta(b)}{\psi(b)}\Big(\lambda\int\limits_{-\infty}^{b} \frac{g(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}dz + \int\limits_{-\infty}^{b} \frac{h(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\mathbf{E}Q_b(\rho(z,Y_1))\, dz\Big). \tag{2.13}$$

Это доказывает (2.6).

Обозначим

$$D_\delta(x) := \mathbf{P}_x\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)} J(s) \in [b, b+\delta)\Big) = Q_{b+\delta}(x) - Q_b(x),$$

$$\widetilde{M}_\delta(x) := M_{b+\delta}(x) - M_b(x) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(G^{h(z)}_{b+\delta,z}(x) - G^{h(z)}_{b,z}(x)\big)\, \mathbf{E}Q_{b+\delta}(\rho(z,Y_1))\, dz. \tag{2.14}$$

Из (2.8) следует, что

$$D_\delta(x) = \widetilde{M}_\delta(x) + \int\limits_{-\infty}^{b} G^{h(z)}_{b,z}(x)\, \mathbf{E}D_\delta(\rho(z,Y_1))\, dz. \tag{2.15}$$

Согласно предположению, $\sup_{x\in\mathbf{R}} h(x) \leqslant K$ и $\inf_{x\in\mathbf{R}} g(x) \geqslant \eta > 0$ для некоторых постоянных K и η. Тогда $\varkappa_1 \geqslant \tau_1/K$. В [3], пункт 4, установлено, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{b,z}^{h(z)}(x)\,dz \leqslant \mathbf{E}_x \exp\Big(-\lambda\int\limits_0^{\varkappa_1} g(X(s))\,ds\Big) \leqslant \mathbf{E}e^{-\lambda\eta\tau_1/K} = \frac{1}{1+\lambda\eta/K}$$

для всех x. Эта оценка влечет, что интегральное уравнение (2.15) имеет единственное ограниченное решение, и для этого решения верна следующая оценка

$$\sup_{x\leqslant b+\delta} D_\delta(x) \leqslant \frac{K+\lambda\eta}{\lambda\eta}\sup_{x\leqslant b+\delta}\widetilde{M}_\delta(x). \tag{2.16}$$

Для $z \leqslant b$, $x \leqslant b$

$$G_{b+\delta,z}^{h(z)}(x) - G_{b,z}^{h(z)}(x) = \frac{2h(z)\psi(z)\psi(x)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\Big(\frac{\varphi(b)}{\psi(b)} - \frac{\varphi(b+\delta)}{\psi(b+\delta)}\Big), \tag{2.17}$$

$$\sup_{x\leqslant b}\big(G_{b+\delta,z}^{h(z)}(x) - G_{b,z}^{h(z)}(x)\big) = \frac{2h(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\frac{\rho(b+\delta,b)}{\psi(b+\delta)}. \tag{2.18}$$

Помимо этого, для $z \in (b, b+\delta)$

$$\sup_{x\leqslant b+\delta} G_{b+\delta,z}^{h(z)}(x) = G_{b+\delta,z}(z) = \frac{2h(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)}\frac{\rho(b+\delta,z)}{\Delta(z)\psi(b)}, \tag{2.19}$$

и для $z \leqslant b$

$$\sup_{x\in(b,b+\delta)} G_{b+\delta,z}^{h(z)}(x) = \frac{2h(z)}{\sigma^2(z)}\frac{\rho(b+\delta,b)\psi(z)}{\Delta(z)\psi(b)}. \tag{2.20}$$

Из (2.18)–(2.20) имеем, что для $z \leqslant b+\delta$

$$\sup_{x\leqslant b+\delta}\big(G_{b+\delta,z}^{h(z)}(x) - G_{b,z}^{h(z)}(x)\big) \leqslant \frac{2h(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\frac{\rho(b+\delta,b)}{\psi(b)}. \tag{2.21}$$

Из (2.10) и (2.21) для $\lambda g(z)$ вместо $h(z)$ получаем

$$\sup_{x\leqslant b+\delta}\big(M_{b+\delta}(x) - M_b(x)\big) \leqslant \frac{2\lambda\rho(b+\delta,b)}{\psi(b)}\int\limits_{-\infty}^{b+\delta}\frac{g(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}dz.$$

Теперь из (2.14) и (2.21) следует, что

$$\sup_{x\leqslant b+\delta}\widetilde{M}_\delta(x)\leqslant\frac{2\rho(b+\delta,b)}{\psi(b)}\int\limits_{-\infty}^{b+\delta}\frac{(\lambda g(z)+h(z))\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}dz$$

$$\sim\frac{2\delta\Delta(b)}{\psi(b)}\int\limits_{-\infty}^{b}\frac{(\lambda g(z)+h(z))\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}dz.$$

Поскольку интеграл в правой части конечен, эта оценка вместе с (2.16) влечет (2.7). □

Нам также нужны некоторые другие вспомогательные оценки.

Лемма 2.3. *Для некоторой константы $K_{a,b}$ верна следующая оценка*

$$\mathbf{P}_a\Big(a-\delta_1\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)}J(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)}J(s)\in[b,b+\delta_2),J(H_{a-\delta_1,b})=b\Big)$$
$$\leqslant\delta_1\delta_2K_{a,b}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Используя (1.3), имеем

$$\mathbf{P}_a\Big(a-\delta_1\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)}J(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)}J(s)\in[b,b+\delta_2),J(H_{a-\delta_1,b})=b\Big)$$
$$=\mathbf{E}_a\big\{e^{-\lambda I(H_{a-\delta_1,b})};J(H_{a-\delta_1,b})=b\big\}$$
$$\times\mathbf{P}_b\Big(a-\delta_1\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)}J(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)}J(s)\leqslant b+\delta_2\Big)$$
$$\leqslant\mathbf{E}_a\big\{e^{-\lambda I(H_{a-\delta_1,b})};J(H_{a-\delta_1,b})=b\big\}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu(\tau)}J(s)\leqslant b+\delta_2\Big). \tag{2.23}$$

Теперь, согласно (2.2) и (2.6), правая часть (2.23) оценивается величиной $\delta_1\delta_2C_{a,b}C_b$. □

3. Положение максимума или минимума для диффузий со скачками. Рассмотрим неотрицательные непрерывные однородные аддитивные функционалы от диффузий со скачками следующего вида

$$\mathfrak{f}_l(J(u),s\leqslant u\leqslant t)=\int\limits_s^t f_l(J(u))\,dv,\qquad l=1,2,3. \tag{3.1}$$

Предполагается, что $f_l \geqslant 0$, $l = 1, 2, 3$, являются кусочно непрерывными функциями.

Для процесса $J(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, величина $\check{H}(t) := \inf\{u \leqslant t : J(u) = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} J(s)\}$ является положением максимума до момента t, а величина $\hat{H}(t) := \inf\{u \leqslant t : J(u) = \inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} J(s)\}$ является положением минимума до момента t.

Ввиду (1.2), ясно, что при условии $H_b \leqslant \nu(t)$ для $J(0) < b$

$$\check{H}(\nu(t)) = H_b + \check{H}_\circ(\widetilde{\nu}(t - I(H_b))), \tag{3.2}$$

и для $J(0) > b$

$$\hat{H}(\nu(t)) = H_b + \hat{H}_\circ(\widetilde{\nu}(t - I(H_b))),$$

где $\check{H}_\circ(t) := \inf\{u \leqslant t : \widetilde{J}(u) = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \widetilde{J}(s)\}$, $\hat{H}_\circ(t) := \inf\{u \leqslant t : \widetilde{J}(u) = \inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} \widetilde{J}(s)\}$.

Обозначим для краткости $\nu := \nu(\tau)$.

Теорема 3.1. *Для кусочно непрерывных ограниченных функций $\Phi(x)$, $f_l(x)$, $l = 1, 2$, и $x \leqslant b$*

$$\frac{d}{db}\mathbf{E}_x\Big\{\Phi(J(\nu))\, e^{-\mathfrak{f}_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant \check{H}(\nu))} e^{-\mathfrak{f}_2(J(u), \check{H}(\nu) \leqslant u \leqslant \nu)}; \sup_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) < b\Big\}$$

$$= \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_b) - \mathfrak{f}_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant H_b)}; J(H_b) = b\Big\}$$

$$\times \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{\Phi(J(\nu))\, e^{-\mathfrak{f}_2(J(u), 0 \leqslant u \leqslant \nu)}; \sup_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) < b + \delta\Big\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Сначала мы докажем, что предел в правой части (3.3) существует. Пусть $\psi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – возрастающее положительное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Y''(x) + \mu(x)Y'(x) - (\lambda g(x) + h(x) + f(x))Y(x) = 0, \tag{3.4}$$

а $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – убывающее положительное решение этого уравнения. Пусть $\Delta(z) := \psi'(z)\varphi(z) - \psi(z)\varphi'(z) > 0$ – вронскиан.

Пусть

$$Q_b(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))\exp\Big(-\int\limits_0^{\nu} f(J(s))\,ds\Big);\ \sup_{0\leqslant s\leqslant \nu} J(s) < b\Big\}.$$

Тогда, по теореме 1.1 совместно с замечанием 1.1, функция Q_b – единственное ограниченное решение уравнения (2.8), где $G_{b,z}^{h(z)}(x)$ имеет вид (2.9). Аналогично (2.10), функция $M_b(x)$ имеет выражение

$$M_b(x) = \int\limits_{-\infty}^{b} \varPhi(z)\, G_{b,z}^{\lambda g(z)}(x)\,dz.$$

Теперь, аналогично (2.13), имеем

$$Q_{b+\delta}(b) \sim \delta\frac{2\Delta(b)}{\psi(b)}\Big(\lambda\int\limits_{-\infty}^{b}\varPhi(z)\frac{g(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}dz + \int\limits_{-\infty}^{b}\frac{h(z)\psi(z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)}\mathbf{E}Q_b(\rho(z,Y_1))\,dz\Big).$$

Это доказывает, что предел в правой части (3.3) существует.

Важно, что момент первого превышения уровня b может осуществляться как посредством пересечения, так и посредством скачка через уровень. Так как диффузия со скачками в момент скачка имеет плотность распределения, то при скачке через уровень b вероятность попасть в интервал $(b, b+\delta)$ имеет порядок δ. Это влечет, что основное значение имеет момент первого превышения уровня b, который осуществляется посредством пересечения. Можно написать

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant \check H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)};\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu} J(s)\in[b,b+\delta)\Big\}\\
&\quad= \mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant \check H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)}\Big(\mathbb{1}_{\{J(H_b)=b\}}\\
&\quad+\mathbb{1}_{\{J(H_b)\in(b,b+\delta)\}}\Big);H_b<\nu,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu} J(s)<b+\delta\Big\} =: \Delta_\delta^{(1)} + \Delta_\delta^{(2)}. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (3.5) можно преобразовать следующим образом

$$\Delta_\delta^{(1)} = \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b)}\,\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),H_b\leqslant u\leqslant \check H(\nu))}$$

$$\times e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check{H}(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)}; J(H_b)=b, \sup_{H_b\leqslant s\leqslant\nu} J(s)<b+\delta, H_b<\nu\Big\}.$$

Ввиду (3.2), при условии $H_b \leqslant \nu(t)$ функционал

$$\wp(J(u), H_b\leqslant u\leqslant \nu(t)) = \Phi(J(\nu(t)))\, e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),H_b\leqslant u\leqslant \check{H}(\nu(t)))}$$

$$\times e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check{H}(\nu(t))\leqslant u\leqslant\nu(t))}\, \mathbb{I}_{\big\{\sup\limits_{H_b\leqslant s\leqslant\nu(t)} J(s)<b+\delta\big\}}$$

удовлетворяет равенству

$$\wp(J(u), H_b\leqslant u\leqslant \nu(t)) = \wp(\widetilde{J}(s), 0\leqslant s\leqslant \widetilde{\nu}(t-I(H_b))).$$

Поэтому, применяя (1.3), имеем

$$\Delta^{(1)}_\delta = \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_b)-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b)}; J(H_b)=b\Big\}$$

$$\times \mathbf{E}_b\Big\{\Phi(J(\nu))\, e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant\check{H}(\nu))} e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check{H}(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)}; \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu} J(s)<b+\delta\Big\}.$$

Для того, чтобы доказать (3.3), необходимо убедиться, что для $l=1,2$,

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{\Phi(J(\nu))\big(1-e^{-\mathfrak{f}_l(J(u),0\leqslant u\leqslant\check{H}(\nu))}\big); \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu} J(s)<b+\delta\Big\}=0.$$

Обозначим

$$\wp_l := \big(1-e^{-\mathfrak{f}_l(J(u),0\leqslant u\leqslant\check{H}(\nu))}\big)$$

и выберем произвольное маленькое число $q>0$. Тогда для $l=1,2$

$$\mathbf{E}_b\Big\{\wp_l; \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu} J(s)<b+\delta\Big\} = \mathbf{E}_b\Big\{\wp_l; \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu} J(s)<b+\delta, \nu<q\Big\}$$

$$+\mathbf{E}_b\Big\{\wp_l; \sup_{0\leqslant s\leqslant q} J(s)<b+\delta, \sup_{q\leqslant s\leqslant\nu} J(s)<b, \nu\geqslant q\Big\}$$

$$+\mathbf{E}_b\Big\{\wp_l; \sup_{0\leqslant s\leqslant q} J(s)<b+\delta, \sup_{q\leqslant s\leqslant\nu} J(s)\in[b,b+\delta), \nu\geqslant q\Big\}$$

$$=: I_{1,l}+I_{2,l}+I_{3,l}. \tag{3.6}$$

Поскольку $\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_l(x)|\leqslant L$ для некоторого L, то для $k=1,2$, $l=1,2$,

$$I_{k,l}\leqslant \mathbf{E}_b\Big\{\wp_l;\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\leqslant b+\delta, \check{H}(\nu)\leqslant q\Big\}$$

$$\leqslant qL\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\leqslant b+\delta\Big)<\delta qLC_b. \tag{3.7}$$

Здесь мы использовали оценку (2.6).

Используя марковское свойство, для третьего слагаемого ($l=1,2$) получаем

$$I_{3,l}\leqslant \sup_{y\leqslant b+\delta}\mathbf{P}_y\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in[b,b+\delta)\Big)\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant q}J(s)<b+\delta\Big).$$

Поскольку

$$C_\delta\delta\geqslant \mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\tau}J(s)<b+\delta\Big)\geqslant\int\limits_0^q e^{-\lambda t}\mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}J(s)<b+\delta\Big)dt$$

$$\geqslant \mathbf{P}_b\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant q}J(s)<b+\delta\Big)\frac{1-e^{-\lambda q}}{\lambda},$$

и справедлива оценка (2.7), то $\lim\limits_{\delta\downarrow0}\frac{I_{3,l}}{\delta}=0$. Так как $\limsup\limits_{\delta\downarrow0}\frac{I_{k,l}}{\delta}$, $k=1,2$, $l=1,2$, меньше, чем произвольное наперед заданное малое число $C_\delta Lq$, мы имеем, что $\lim\limits_{\delta\downarrow0}\frac{1}{\delta}\Delta_\delta^{(1)}$ равняется правой части (3.3).

Рассмотрим асимптотическое поведение слагаемого $\Delta_\delta^{(2)}$. Имеем

$$\Delta_\delta^{(2)}=\int\limits_b^{b+\delta}\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant\check{H}(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check{H}(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)};$$

$$J(H_b)\in dy, H_b<\nu,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta\Big\}$$

$$=\int\limits_b^{b+\delta}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_b)-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_b)};J(H_b)\in dy\Big\}$$

$$\times\mathbf{E}_y\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant\check H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)};\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta\Big\}.$$

Здесь мы воспользовались строго марковским свойством процесса J. Принимая во внимание (2.6), окончательно получаем

$$|\Delta_\delta^{(2)}|\leqslant K\int\limits_b^{b+\delta}\mathbf{P}_x\big(J(H_b)\in dy\big)\mathbf{P}_y\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta\Big)=\mathrm{o}(\delta). \qquad (3.8)$$

В силу (3.5), теорема доказана. □

Для момента достижения минимума справедлив аналогичный результат.

Теорема 3.2. *Для кусочно непрерывных ограниченных функций* $\varPhi(x)$, $f_l(x)$, $l=1,2$, *и* $a\leqslant x$

$$-\frac{d}{da}\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant\hat H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)};\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)>a\Big\}$$

$$=\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_a)-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant\hat H_a)};J(H_a)=a\Big\}$$

$$\times\lim_{\delta\downarrow0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_a\Big\{\varPhi(J(\nu))e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant\nu)};\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)>a-\delta\Big\}. \qquad (3.9)$$

4. Совместное положение моментов достижения максимальных и минимальных значений. Как в предыдущем пункте важным является условие, что в момент первого выхода из интервала (a,b) диффузия J пересекает границу.

Теорема 4.1. *Для кусочно непрерывной ограниченной функции* $\varPhi(x)$ *и* $a\leqslant x\leqslant b$

$$-\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant\check H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant\hat H(\nu))}$$

$$\times e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)};\check H(\nu)<\hat H(\nu),a<\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s),\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b\Big\}$$

$$=\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_{a,b})-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_{a,b})};J(H_{a,b})=b\Big\}$$

$$\times\lim_{\delta\downarrow0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{e^{-\lambda I(H_{a,b+\delta})-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant H_{a,b+\delta})};J(H_{a,b+\delta})=a\Big\} \qquad (4.1)$$

$$\times \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta} \mathbf{E}_a \Big\{ \varPhi(J(\nu)) e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),0\leqslant u\leqslant \nu)}; a-\delta < \inf_{0\leqslant s\leqslant \nu} J(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \nu} J(s) < b \Big\}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что пределы в правой части (4.1) существуют. Что касается первого предела, то можно применить (2.3) в случае, когда решение задачи (1.14), (1.15) рассматривается для функции $f(x) = \lambda g(x) + f_2(x)$.

Рассмотрим второй предел. Пусть

$$Q_{a,b}(x) := \mathbf{E}_x \Big\{ \varPhi(J(\nu))\, e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),0\leqslant u\leqslant \nu)}; a < \inf_{0\leqslant s\leqslant \nu} J(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \nu} J(s) < b \Big\}.$$

Тогда, по теореме 1.1, функция $Q_{a,b}$ – единственное ограниченное решение уравнения

$$Q_{a,b}(x) = M_{a,b}(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{h(z)}_{a,b,z}(x)\, \mathbf{E} Q_{a,b}(\rho(z,Y_1))\, dz, \tag{4.2}$$

где функции $M_{a,b}$, $G^{h(z)}_{a,b,z}$ – решения задач (1.5)–(1.9) с $f(x) = f_3(x)$. В терминах решений ψ и φ уравнения (3.4) с $f(x) = f_3(x)$ можно написать

$$G^{h(z)}_{a,b,z}(x) = \begin{cases} \dfrac{2h(z)}{\sigma^2(z)} \dfrac{\rho(b,z)\rho(x,a)}{\Delta(z)\rho(b,a)}, & a \leqslant x \leqslant z, \\ \dfrac{2h(z)}{\sigma^2(z)} \dfrac{\rho(b,x)\rho(z,a)}{\Delta(z)\rho(b,a)}, & z \leqslant x \leqslant b. \end{cases} \tag{4.3}$$

Аналогично (2.10), функция $M_{a,b}(x)$ имеет выражение

$$M_{a,b}(x) = \int\limits_a^b \varPhi(z)\, G^{\lambda g(z)}_{a,b,z}(x)\, dz. \tag{4.4}$$

При $\delta \downarrow 0$ для $a \leqslant z$

$$G^{h(z)}_{a-\delta,b,z}(a) \sim \frac{\delta 2h(z)}{\sigma^2(z)} \frac{\rho(b,z)\Delta(a)}{\Delta(z)\rho(b,a)},$$

и для $a - \delta < z < a$

$$G^{h(z)}_{a-\delta,b,z}(a) \leqslant C\delta.$$

Кроме того, ввиду (4.4)

$$M_{a-\delta,b}(a) \sim \delta \frac{2\lambda\Delta(a)}{\rho(b,a)} \int_a^b \frac{g(z)\rho(b,z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)} dz.$$

Тогда, согласно (4.3),

$$Q_{a-\delta,b}(a) \sim \delta \frac{2\Delta(a)}{\rho(b,a)} \Big(\lambda \int_a^b \varPhi(z) \frac{g(z)\rho(b,z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)} dz + \int_a^b \frac{h(z)\rho(b,z)}{\sigma^2(z)\Delta(z)} \mathbf{E} Q_b(\rho(z,Y_1))\, dz \Big).$$

Это доказывает существование второго предела в правой части (4.1).

Как и при доказательстве теоремы 3.1 (см. соотношения (3.5) и (3.8)), нам нужно рассматривать момент первого выхода из интервала (a,b) только в тех случаях, когда диффузия пересекает уровни a и b. Пусть $\delta_1 \downarrow 0$, $\delta_2 \downarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x \Big\{ \varPhi(J(\nu))\, e^{-\mathfrak{f}_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant \check{H}(\nu))} e^{-\mathfrak{f}_2(J(u), \check{H}(\nu) \leqslant u \leqslant \hat{H}(\nu))} e^{-\mathfrak{f}_2(J(u), \hat{H}(\nu) \leqslant u \leqslant \nu)}; \\
&\qquad \check{H}(\nu) < \hat{H}(\nu), \inf_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) \in (a-\delta_1, a], \sup_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) \in [b, b+\delta_2) \Big\} \\
&\quad = o(\delta_1\delta_2) + \mathbf{E}_x \Big\{ \varPhi(J(\nu))\, e^{-\mathfrak{f}_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant \check{H}(\nu))} e^{-\mathfrak{f}_2(J(u), \check{H}(\nu) \leqslant u \leqslant \hat{H}(\nu))} \\
&\qquad\qquad \times e^{-\mathfrak{f}_2(J(u), \hat{H}(\nu) \leqslant u \leqslant \nu)}; \check{H}(\nu) < \hat{H}(\nu), J(H_{a,b}) = b, \\
&\inf_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) \in (a-\delta_1, a], \sup_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) \in [b, b+\delta_2) \Big\} = o(\delta_1\delta_2) + \Delta_{\delta_1,\delta_2}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Используя небольшую модификацию (1.3), мы преобразовываем второе слагаемое в правой части (4.5) следующим образом

$$\begin{aligned}
\Delta_{\delta_1,\delta_2} &= \mathbf{E}_x \Big\{ e^{-\lambda I(H_{a,b}) - \mathfrak{f}_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant H_{a,b})}; J(H_{a,b}) = b \Big\} \mathbf{E}_b \Big\{ \varPhi(J(\nu)) \\
&\quad \times e^{-\mathfrak{f}_1(J(u), 0 \leqslant u \leqslant \check{H}(\nu))} e^{-\mathfrak{f}_2(J(u), \check{H}(\nu) \leqslant u \leqslant \hat{H}(\nu))} e^{-\mathfrak{f}_3(J(u), \hat{H}(\nu) \leqslant u \leqslant \nu)}; \\
&\quad \check{H}(\nu) < \hat{H}(\nu), \inf_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) \in (a-\delta, a], \sup_{0 \leqslant s \leqslant \nu} J(s) < b+\delta_2 \Big\}. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Можно написать, что

$$\mathbf{E}_b\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant \check H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant \hat H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant \nu)};$$

$$\check H(\nu)<\hat H(\nu),\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in(a-\delta_1,a],\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta_2\Big\}=\mathbf{E}_b\Big\{\varPhi(J(\nu))$$

$$\times\Big(e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant \check H(\nu))}-1\Big)e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant \hat H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant \nu)};$$

$$\check H(\nu)<\hat H(\nu),\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in(a-\delta_1,a],\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta_2\Big\}+\mathbf{E}_b\Big\{\varPhi(J(\nu))$$

$$\times\Big(e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant \hat H(\nu))}-e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant \hat H(\nu))}\Big)e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant \nu)};$$

$$\check H(\nu)<\hat H(\nu),\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in(a-\delta_1,a],\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta_2\Big\}$$

$$+\mathbf{E}_b\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant \hat H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant \nu)}$$

$$\times\mathbb{I}_{\{\check H(\nu)\geqslant\hat H(\nu)\}};\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in(a-\delta_1,a],\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta_2\Big\}$$

$$+\mathbf{E}_b\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant \hat H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant \nu)};$$

$$\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in(a-\delta_1,a],\sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta_2\Big\}:=\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4.$$

Имеем очевидные оценки: для $l=1,2$

$$\Delta_l\leqslant \mathrm{o}(\delta_1\delta_2)$$

$$+L\mathbf{E}_b\Big\{\wp_l;J(H_{a,b+\delta_2})=a,\inf_{H_a\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in(a-\delta_1,a],\sup_{H_a\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta_2\Big\}.$$

Аналогично (3.6) и (3.7), можно доказать, что $\limsup\limits_{\delta_1\downarrow 0,\delta_2\downarrow 0}\dfrac{\Delta_l}{\delta_1\delta_2}$ будет меньше произвольного наперед заданного малого числа $C_{\delta_1,\delta_2}Lq$.

Применяя (1.3) и принимая во внимание оценки (2.3), (2.22), имеем

$$\Delta_3\leqslant \mathrm{o}(\delta_1\delta_2)+L\mathbf{P}_b\Big(J(H_{a,b+\delta_2})=a,H_{a,b+\delta_2}\leqslant\nu,$$

$$\inf_{H_{a,b+\delta_2}\leqslant s\leqslant\nu} J(s)\in(a-\delta_1,a],\ \sup_{H_{a,b+\delta_2}\leqslant s\leqslant\nu} J(s)\in[b,b+\delta_2)\Big)$$
$$\leqslant \mathrm{o}(\delta_1\delta_2)+L\mathbf{E}_b\Big\{e^{-\lambda I(H_{a,b+\delta_2})};\,J(H_{a,b+\delta_2})=a\Big\}$$
$$\times\mathbf{P}_a\Big(a-\delta_1\leqslant\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\in[b,b+\delta_2),\ J(H_{a-\delta_1,b})=b\Big)\leqslant L_{a,b}\delta_1\delta_2^2.$$

Снова применяя (1.3), окончательно получаем

$$\Delta_4=\mathrm{o}(\delta_1\delta_2)+\mathbf{E}_b\Big\{e^{-\lambda I(H_{a,b+\delta_2})-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant H_{a,b+\delta_2})};\,J(H_{a,b+\delta_2})=a\Big\}$$
$$\times\mathbf{E}_a\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant\hat H(\nu))}\,e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)};$$
$$a-\delta_1<\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)\leqslant b\Big\}.$$

Теперь, принимая во внимание соотношения (4.5) и (4.6), мы видим, что выполняется (4.1). □

Аналогом теоремы 4.1 для другого порядка положений экстремальных значений является следующий результат.

Теорема 4.2. *Для кусочно непрерывной ограниченной функции* $\varPhi(x)$ *и* $a\leqslant x\leqslant b$

$$-\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\mathbf{E}_x\Big\{\varPhi(J(\nu))\,e^{-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant\hat H(\nu))}e^{-\mathfrak{f}_2(J(u),\hat H(\nu)\leqslant u\leqslant\check H(\nu))}$$
$$\times e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),\check H(\nu)\leqslant u\leqslant\nu)};\,\hat H(\nu)<\check H(\nu),\,a<\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b\Big\}$$
$$=\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda I(H_{a,b})-\mathfrak{f}_1(J(u),0\leqslant u\leqslant H_{a,b})};\,J(H_{a,b})=a\Big\}$$
$$\times\lim_{\delta\downarrow0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_a\Big\{e^{-\lambda I(H_{a-\delta,b})-\mathfrak{f}_2(J(u),0\leqslant u\leqslant H_{a-\delta,b})};\,J(H_{a-\delta,b})=b\Big\}\tag{4.7}$$
$$\times\lim_{\delta\downarrow0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{\varPhi(J(\nu))e^{-\mathfrak{f}_3(J(u),0\leqslant u\leqslant\nu)};\,a<\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s),\ \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu}J(s)<b+\delta\Big\}.$$

5. Пример вычисления преобразования Лапласа совместного положения экстремальных точек для классической диффузии. Нас интересует вычисление следующего выражения

$$L_{a,b}^{\mu,\eta}:=-\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\mu\hat H(\nu)-\eta\check H(\nu)};\,\check H(\nu)<\hat H(\nu),$$

$$a < \inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s) < b\Big\}$$

для диффузии X, определенной в (1.1). Вместо $\nu(\tau)$ мы рассмотрим момент τ, то есть полагаем $g(x) \equiv 1$.

Очевидно, что

$$L^{\mu,\eta}_{a,b} = -\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\mu+\eta)\check{H}(\nu)-\mu(\hat{H}(\nu)-\check{H}(\nu))};$$

$$\check{H}(\nu) < \hat{H}(\nu), a < \inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s) < b\Big\}.$$

Мы можем применить теорему 4.1 с $\varPhi \equiv 1$, $\mathfrak{f}_1(X(s), 0 \leqslant s \leqslant v) = (\mu+\eta)v$, $\mathfrak{f}_2(X(s), u \leqslant s \leqslant v) = \mu(v-u)$, $\mathfrak{f}_3(X(s), 0 \leqslant s \leqslant v) = 0$.

Согласно этому результату,

$$L^{\mu,\eta}_{a,b} = \mathbf{E}_x\Big\{e^{-(\lambda+\mu+\eta)H_{a,b}}; X(H_{a,b}) = b\Big\}$$

$$\times \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{e^{-(\lambda+\mu)H_{a,b+\delta}}; X(H_{a,b+\delta}) = a\Big\}$$

$$\times \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{P}_a\Big(a-\delta < \inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s) < b\Big). \tag{5.1}$$

Пусть $\psi_\gamma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – возрастающее положительное решение уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Y''(x) + \mu(x)Y'(x) - \gamma Y(x) = 0, \tag{5.2}$$

а $\varphi_\gamma(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – убывающее положительное решение уравнения (5.2), и $\Delta_\gamma(z) = \psi'_\gamma(z)\varphi_\gamma(z) - \psi_\gamma(z)\varphi'_\gamma(z) > 0$ – их вронскиан. Пусть

$$\rho_\gamma(x,y) := \psi_\gamma(x)\varphi_\gamma(y) - \psi_\gamma(y)\varphi_\gamma(x) > 0$$

для $y < x$.

Согласно классическому результату для однородной диффузии, функция

$$M^{(\gamma)}_{a,b}(x) := \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma H_{a,b}}; X(H_{a,b}) = b\Big\}$$

при $x \in (a,b)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)M''(x) + \mu(x)M'(x) - \gamma M(x) = 0, \tag{5.3}$$

$$M(a) = 0, \qquad M(b) = 1. \tag{5.4}$$

Легко понять, что

$$M_{a,b}^{(\gamma)}(x) = \frac{\rho_\gamma(x,a)}{\rho_\gamma(b,a)}.$$

Аналогично

$$\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\gamma H_{a,b}}; X(H_{a,b}) = a\Big\} = \frac{\rho_\gamma(b,x)}{\rho_\gamma(b,a)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{e^{-(\lambda+\mu)H_{a,b+\delta}}; X(H_{a,b+\delta})=a\Big\}=\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\frac{\rho_{\lambda+\mu}(b+\delta,b)}{\rho_{\lambda+\mu}(b+\delta,a)}=\frac{\Delta_{\lambda+\mu}(b)}{\rho_{\lambda+\mu}(b,a)}.$$

Функция

$$U_{a,b}(x) := \mathbf{P}_x\Big(a < \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) < b\Big)$$

при $x \in (a,b)$ является единственным решением задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - \lambda U(x) = -\lambda, \tag{5.5}$$

$$M(a) = 0, \qquad\qquad M(b) = 0. \tag{5.6}$$

Легко понять, что

$$U_{a,b}(x) = 1 - \frac{\rho_\lambda(b,x) + \rho_\lambda(x,a)}{\rho_\lambda(b,a)}.$$

Тогда

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\mathbf{P}_a\Big(a-\delta < \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} X(s) < b\Big)$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0}\frac{1}{\delta}\Big(1 - \frac{\rho_\lambda(b,a) + \rho_\lambda(a,a-\delta)}{\rho_\lambda(b,a-\delta)}\Big) = -\frac{\frac{\partial}{\partial a}\rho_\lambda(b,a) + \Delta_\lambda(a)}{\rho_\lambda(b,a)}.$$

Подставляя соответствующие выражения в (5.1), получаем

$$L_{a,b}^{\mu,\eta} = -\frac{\rho_{\lambda+\mu+\eta}(x,a)}{\rho_{\lambda+\mu+\eta}(b,a)}\frac{\Delta_{\lambda+\mu}(b)}{\rho_{\lambda+\mu}(b,a)}\frac{\big(\frac{\partial}{\partial a}\rho_\lambda(b,a) + \Delta_\lambda(a)\big)}{\rho_\lambda(b,a)}. \tag{5.7}$$

Аналогом формулы (5.7) для другого порядка следования экстремальных точек является следующий результат. Пусть

$$G_{a,b}^{\mu,\eta} := -\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\mathbf{E}_x\Big\{e^{-\mu\hat{H}(\nu)-\eta\check{H}(\nu)}; \hat{H}(\nu)<\check{H}(\nu),$$

$$a < \inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} X(s) < b\Big\}.$$

Тогда

$$G^{\mu,\eta}_{a,b} = \frac{\rho_{\lambda+\mu+\eta}(b,x)}{\rho_{\lambda+\mu+\eta}(b,a)} \frac{\Delta_{\lambda+\eta}(a)}{\rho_{\lambda+\eta}(b,a)} \frac{\left(\frac{\partial}{\partial b}\rho_\lambda(b,a) - \Delta_\lambda(b)\right)}{\rho_\lambda(b,a)}. \tag{5.8}$$

6. Пример вычисления распределения положений экстремальных точек для броуновского движения со скачками. Явные формулы для распределений функционалов от диффузий со скачками можно получить только для узкого класса процессов. Мы рассмотрим процесс, который является суммой броуновского движения и сложного пуассоновского процесса.

Пусть $W(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс броуновского движения. Пусть

$$J^\circ(t) := W(t) + \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k, \qquad W(0) = x,$$

где $N(t)$, $t \geqslant 0$, является процессом Пуассона с параметром λ_1, и Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, не зависящими от процесса N.

Предполагается, что броуновское движение $W(t)$, $t \geqslant 0$, независимо от процесса N и величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$.

Процесс J° – частный случай диффузии со скачками для $\sigma(x) \equiv 1$, $\mu(x) \equiv 0$, $h(x) \equiv \lambda_1$, $\rho(x,y) = x + y$.

Этому процессу посвящено много работ. Интересные результаты о распределении супремума процесса J° были получены Э. Мордецким [6].

Пусть плотность распределения величин Y_k, $k = 1, 2, \ldots$, имеет вид

$$\frac{d}{dy}\mathbf{P}(Y_1 < y) = \frac{1}{2}\eta e^{-\eta|y|}, \qquad \eta > 0.$$

В этом случае $J^\circ(t)$ – симметричный случайный процесс ($-J^\circ(t)$ распределен так же, как $J^\circ(t)$).

Нас интересует вычисление выражения

$$P^{<}_{a,b} := -\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\mathbf{P}_x\Big(\check{H}(\nu) < \hat{H}(\nu), a < \inf_{0\leqslant s\leqslant \tau} J^\circ(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant \tau} J^\circ(s) < b\Big)$$

для диффузии J°. Вместо момента $\nu(\tau)$ мы рассматриваем τ, то есть $g(x) \equiv 1$.

Как в пункте 5, мы можем применить теорему 4.1 для $\varPhi(x) \equiv 1$ и $\mathfrak{f}_l(\cdot) \equiv 0$, $l = 1, 2, 3$. Согласно этому результату,

$$P^{<}_{a,b} = \mathbf{E}_x\Big\{e^{-\lambda H_{a,b}}; J^{\circ}(H_{a,b}) = b\Big\} \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta}\mathbf{E}_b\Big\{e^{-\lambda H_{a,b+\delta}}; J^{\circ}(H_{a,b+\delta}) = a\Big\}$$

$$\times \lim_{\delta\downarrow 0} \frac{1}{\delta}\mathbf{P}_a\Big(a - \delta < \inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^{\circ}(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^{\circ}(s) < b\Big). \tag{6.1}$$

Пусть ρ_1, ρ_2 – корни уравнения

$$\frac{\eta^2}{(\eta^2 - \rho^2)} \frac{2\lambda_1}{(2\lambda + 2\lambda_1 - \rho^2)} = 1.$$

Тогда

$$\rho_1 = \sqrt{\lambda + \lambda_1 + \frac{\eta^2}{2} - \Big(\Big(\lambda + \lambda_1 + \frac{\eta^2}{2}\Big)^2 - 2\lambda\eta^2\Big)^{1/2}},$$

$$\rho_2 = \sqrt{\lambda + \lambda_1 + \frac{\eta^2}{2} + \Big(\Big(\lambda + \lambda_1 + \frac{\eta^2}{2}\Big)^2 - 2\lambda\eta^2\Big)^{1/2}},$$

и $0 < \rho_1 < \eta < \rho_2$. Также ясно, что $\rho_1\rho_2 = \sqrt{2\lambda}\eta$.

Пусть

$$D_+ := \frac{\frac{\rho_2 \operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2} + \frac{1}{\eta}}{\frac{\rho_1 \operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2 \operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}, \tag{6.2}$$

$$D_+^{\circ} := \frac{\frac{\rho_2 \operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}{\frac{\rho_1 \operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2 \operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}, \tag{6.3}$$

$$D_-^{\circ} := \frac{\frac{\rho_2 \operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}{\frac{\rho_1 \operatorname{cth}((b-a)\rho_1/2)+\eta}{\eta^2-\rho_1^2} + \frac{\rho_2 \operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)+\eta}{\rho_2^2-\eta^2}}. \tag{6.4}$$

Тогда справедлива следующая формула (см. [5], формула (3.24))

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x\big\{e^{-\lambda H_{a,b}}; J^{\circ}(H_{a,b}) = b\big\} &= \frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}\\ &+ \frac{D_+^{\circ}}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big)\\ &- \frac{D_-^{\circ}}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)} - \frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big).\end{aligned} \tag{6.5}$$

По свойству симметрии процесса J°

$$\mathbf{E}_x\big\{e^{-\lambda H_{a,b}}; J^\circ(H_{a,b})=a\big\} = \frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}$$
$$+\frac{D_+^\circ}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)}-\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big)$$
$$+\frac{D_-^\circ}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)}-\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big). \qquad (6.6)$$

Следующее выражение было впервые получено в [7], формула (4.15) (в соответствии с обозначением (6.2), необходимо заменить $\rho_1 \leftrightarrow \rho_2$)

$$\mathbf{P}_x\Big(a<\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s)<b\Big) = \mathbf{P}_x\big(H_{a,b}\geqslant\tau\big) = 1-\mathbf{E}_x e^{-\lambda H_{a,b}}$$
$$=1-D_+\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)}-(1-D_+)\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}. \qquad (6.7)$$

Теперь из (6.1) и (6.5)–(6.7) следует, что

$$P^{<}_{a,b}=\Big[\frac{\operatorname{sh}((x-a)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}+\frac{D_+^\circ}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)}-\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big)$$
$$-\frac{D_-^\circ}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)}-\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big)\Big]\Big[\frac{\rho_2}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}$$
$$-\frac{D_+^\circ}{2}\Big(\rho_1\operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)-\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)\Big)$$
$$+\frac{D_-^\circ}{2}\Big(\rho_1\operatorname{cth}((b-a)\rho_1/2)-\rho_2\operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)\Big)\Big]\Big[\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)$$
$$+D_+\Big(\rho_1\operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)-\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)\Big)\Big]. \qquad (6.8)$$

Аналогично можно вычислить выражение для

$$P^{>}_{a,b}:=-\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\mathbf{P}_x\Big(\check H(\nu)>\hat H(\nu), a<\inf_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s), \sup_{0\leqslant s\leqslant\tau} J^\circ(s)<b\Big).$$

Но можно воспользоваться свойством симметрии процесса J°. Это влечет, что

$$P^{>}_{a,b}=\Big[\frac{\operatorname{sh}((b-x)\rho_2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}+\frac{D_+^\circ}{2}\Big(\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_1/2)}-\frac{\operatorname{ch}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{ch}((b-a)\rho_2/2)}\Big)$$
$$+\frac{D_-^\circ}{2}\Big(\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_1/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_1/2)}-\frac{\operatorname{sh}((b+a-2x)\rho_2/2)}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2/2)}\Big)\Big]\Big[\frac{\rho_2}{\operatorname{sh}((b-a)\rho_2)}$$
$$-\frac{D_+^\circ}{2}\Big(\rho_1\operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)-\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)\Big)$$
$$+\frac{D_-^\circ}{2}\Big(\rho_1\operatorname{cth}((b-a)\rho_1/2)-\rho_2\operatorname{cth}((b-a)\rho_2/2)\Big)\Big]\Big[\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)$$
$$+D_+^\circ\Big(\rho_1\operatorname{th}((b-a)\rho_1/2)-\rho_2\operatorname{th}((b-a)\rho_2/2)\Big)\Big]. \qquad (6.9)$$

Литература

1. А. Н. Бородин, *Распределения моментов достижения минимумов и максимумов для скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **368** (2009), 75–94.
2. E. Csáki, A. Földes, P. Salminen, *On the joint distribution of the maximum and its location for a linear diffusion.* — Ann I. H. P. **23**, No. 2 (1987), 179–194.
3. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 15–36.
4. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от мостов скачкообразных диффузий.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 34–47.
5. А. Н. Бородин, *О моменте первого выхода из интервала для диффузий со скачками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **364** (2009), 70–87.
6. E. Mordecki, *Ruin probabilities for Lévy processes with mixed exponential negative jumps.* — Theory Probab. Appl. **48**, No. 1 (2003), 188–194.
7. А. Н. Бородин, *Распределение функционалов от некоторых процессов с независимыми приращениями.* — Вестник СПбГУ, Сер. 1, No. 4 (2005), 7–20.

Borodin A. N. Distributions of functionals of diffusions with jumps connected with the location of the maximum or minimum.

The paper deals with methods of computations of distributions of integral functionals of diffusions with jumps at the time moments, in which the maximum and minimum values of diffusions are achieved. As an example explicit formulas for the Laplace transform of joint locations of minimum and maximum of the process equal the sum of Brownian motion and the compound Poisson process are obtained.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург, Россия

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 30 октября 2010 г.