Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

Я. И. Белопольская, М. М. Ромаданова

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ И РАСЧЕТ ЦЕН АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ

Введение

Задачи со свободной границей для уравнений в частных производных возникают в самых разнообразных приложениях – в теории многофазных систем, оптимальном управлении, математической экономике, финансовой математике и других.

В этой работе мы применим вероятностный подход к решению краевой задачи со свободной границей для параболических и интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в финансовой математике.

Вероятностная интерпретация решения задачи со свободной границей для параболического уравнения впервые была получена в работах Маккина [1] и Ван Мербека [2], посвященных расчету цен американских опционов.

Американские опционы – это контракты, которые могут быть предъявлены к исполнению в любой момент времени, начиная с момента t вступления контракта в силу и до момента $T \leqslant \infty$ предъявления этого контракта к исполнению. В этой работе мы рассматриваем лишь контракты, определяемые детерминированной скалярной функцией Φ, заданной на $[0, \infty)$ и называемой контрактной функцией. Простейший американский опцион – это пут опцион, т.е. контракт, держатель которого имеет право, но не обязанность, продать некоторый основной актив (акцию) по договорной цене K в любой момент времени, начиная с момента t вплоть до T. Соответствующая контрактная функция имеет вид $\Phi(s) = \max(K - s, 0) = [K - s]_+$.

Ключевые слова: свободная граница, диффузионные процессы, процессы Леви, параболические и интегро-дифференциальные уравнения, американский опцион.

Работа частично поддержана грантом DFG 436 RUS113/823 и грантом НШ 4472.2010.1.

По экономическому смыслу задача расчета цены американского опциона формулируется как задача об оптимальной остановке некоторого случайного процесса. Актив, цена которого в момент t равна $S(t)$, нужно продать в тот момент, когда доход от этой продажи будет максимальным. С другой стороны, для этой задачи возможна вариационная постановка в виде вариационных неравенств, базирующихся на условиях безарбитражности, развитая позднее в работах Бенсуссана [3], а также формулировка в виде соответствующей задачи со свободной границей.

В первых работах по расчету цен американских опционов предполагалось, что процесс $S(t)$ – это геометрическое броуновское движение. Впоследствии идеи Маккина и Бенсуссана были распространены и на более сложные параболические и интегро-дифференциальные уравнения, возникающие в различных моделях финансовых рынков [4–6].

В этой работе мы вначале рассмотрим простейшую с финансовой точки зрения модель – модель Блэка–Шоулса (БШ) [7] и проиллюстрируем на этом примере основные идеи построения решения задачи со свободной границей с использованием ее вероятностной интерпретации. Затем полученные результаты будут распространены на модель финансового рынка с диффузией и скачками. При этом нас будут интересовать как аналитические методы, так и численные алгоритмы решения задачи. Численный алгоритм решения, рассматриваемый в работе, связан с методом рандомизации Карра и приводит к рассмотрению еще одного класса опционов – так называемых канадских опционов.

В рамках модели БШ предполагается, что рынок состоит из одного безрискового и одного рискового активов, эволюция цен $B(\theta)$ и $\widetilde{S}(\theta)$ которых задается уравнениями

$$dB(\theta) = rB(\theta)d\theta, \quad B(t) = 1, \tag{1.1}$$

$$d\widetilde{S}(\theta) = \widetilde{S}(\theta)[\alpha d\theta + \sigma dW(\theta)], \; \widetilde{S}(t) = s, \; 0 \leqslant t \leqslant \theta \leqslant T. \tag{1.2}$$

Здесь $W(\theta) \in R^1$ – $\mathcal{F}_t$-измеримый винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фильтрацией $\mathcal{F}_t$, а r, α и σ – заданные константы.

Рассмотрим для определенности американский пут опцион с контрактной функцией $\Phi(s) = \max(K - s, 0) = [K - s]_+$, где положительная константа K – это договорная цена. В соответствии с общей теорией арбитража [8, 9], справедливая цена этого контракта задается соотношением

$$F_{am}(t,s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} E^Q_{t,s}\{e^{-r(\tau - t)}[K - S(\tau)]_+\}, \tag{1.3}$$

где Q – риск-нейтральная или мартингальная мера, а $\mathcal{T}_{[t,T]}$ – множество моментов остановки $\tau \in [t,T]$ относительно $\mathcal{F}_t$.

Альтернативное задание этой цены имеет вид

$$F_{am}(t,s) = \sup_{S^*(\tau),\tau \in [t,T]} E^Q_{t,s}\{e^{-r(\tau_{S^*} - t)}[K - S(\tau_{S^*})]_+\}, \tag{1.4}$$

где τ_{S^*} – момент первого выхода процесса S на границу оптимального исполнения $S^*(\theta), \theta \in [t,T]$. Отметим, что $S^*(\theta)$ – неизвестная функция, подлежащая определению в процессе решения задачи, а процесс S в (1.3) удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dS(\theta) = S(\theta)[rd\theta + \sigma dw(\theta)], \quad S(t) = s, \quad \theta \in [t,T], \tag{1.5}$$

где $w(\theta)$ – $\mathcal{F}_\theta$-измеримый Q-винеровский процесс.

Для того, чтобы привести альтернативное описание задачи определения цены американского пут опциона как задачи со свободной границей, разделим ось s на две части. Пусть в первой области, где оптимально исполнение опциона, для каждого момента t и $0 \leqslant s \leqslant S^*(t)$, справедливы соотношения

$$F_{am} = K - s, \quad \frac{\partial F_{am}}{\partial t} + rs\frac{\partial F_{am}}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 F_{am}}{\partial s^2} - rF_{am} < 0.$$

Вторая область имеет вид $S^*(t) < s < \infty$. В этой области преждевременное исполнение опциона не оптимально, $F_{am} > K - s$ и

$$\frac{\partial F_{am}}{\partial t} + rs\frac{\partial F_{am}}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 F_{am}}{\partial s^2} - rF_{am} = 0.$$

Граничные условия при $s = S^*(t)$ формулируются как условия непрерывности на функцию F_{am} и ее производную по s и

$$F_{am}(t,S^*(t)) = [K - S^*(t)]_+, \quad \frac{\partial F_{am}}{\partial s}(t,S^*(t)) = -1. \tag{1.6}$$

Важно понимать, что второе условие в (1.6) не является следствием равенства $F_{am}(t, S^*(t)) = K - S^*(t)$, а вытекает из условий безарбитражности рынка.

В любой из упомянутых выше постановок рассматриваемая задача достаточно сложна даже в этой простейшей модели. Поэтому развитие вероятностных подходов, позволяющих в некоторых случаях получить явное решение задачи со свободной границей, а в других разработать эффективные численные схемы решения этой задачи для параболических и интегро-дифференциальных уравнений, представляется весьма актуальным. Теоремы существования и единственности решения более широкого класса задач, чем рассмотренные в этой работе, а также регулярность соответствующих решений изучались многими авторами (см. монографии [10, 11]). В этой работе нас больше интересуют эффективные алгоритмы построения решения задачи, в предположении, что существует единственное достаточно регулярное решение задачи.

Далее статья организована следующим образом. В параграфе 2 мы обсуждаем задачи, связанные с нахождением цены американского опциона в модели БШ. При этом рассматриваются как бессрочные американские опционы, так и опционы, срок действия которых ограничен. С математической точки зрения это приводит к рассмотрению стационарных и нестационарных задач, причем стационарные задачи в ряде случаев допускают явные решения, а построение решения нестационарных задач требует развития численных методов. Особый интерес представляют подходы, основанные на вероятностной интерпретации рассматриваемой задачи и, в частности, подход, предложенный в работах Карра [12, 13] и получивший название метода рандомизации Карра. В работах Боярченко и Левендорского [15, 16] метод рандомизации Карра был распространен на более широкие модели, в частности, на модель Блэка–Шоулса–Мертона (БШМ), в которой цены акций допускают скачки, а цена опциона описывается интегро-дифференциальным уравнением. Модель такого типа мы рассматриваем в третьем параграфе. В последнем параграфе обсуждается сходимость аппроксимаций, полученных с помощью метода рандомизации Карра.

2. Расчет цены американского опциона в модели Блэка–Шоулса

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим модель БШ и предположим для простоты, что P – мартингальная мера, т.е. предположим, что динамика рискового актива S описывается уравнением (1.5).

Решение уравнения (1.5) с начальным условием $S(t) = s$ имеет вид

$$S(\theta) = s\exp\{[r - \frac{\sigma^2}{2}](\theta - t) + \sigma[w(\theta) - w(t)]\}, \tag{2.1}$$

а величина $e^{-r(\theta-t)}S(\theta)$ является $\mathcal{F}_\theta$-мартингалом.

Безарбитражная цена $F_{am}(t,s)$ американского пут опциона с датой исполнения T имеет вид (1.3). Если в соотношении (1.3) интервал $\mathcal{T}_{[t,T]}$ заменить интервалом $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{[0,\infty)}$, то соотношение

$$F(s) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} E_s\{e^{-r\tau}[K - S(\tau)]_+\} \tag{2.2}$$

определяет цену $F(s)$ бессрочного американского опциона.

Альтернативный способ описания $F_{am}(t,s)$ – это решение задачи со свободной границей для соответствующего параболического уравнения.

Пусть функция $F(t,s)$ определена в области

$$\mathcal{D} = \{(t,s) : 0 < s < \infty, 0 \leqslant t \leqslant T\},$$

и в каждый момент времени $t \in [0,T]$ существует критическая цена актива S^*, выше которой оптимально быть держателем опциона, а ниже – оптимально предъявить опцион к исполнению. Множество критических цен $\{S^*(t), t \in [0,T]\}$ называется критической границей или границей оптимального исполнения. Кривая $S^*(t)$ делит область $\mathcal{D}$ на две части, одна из которых называется областью непрерывности и обозначается $\mathcal{C} = [0,T] \times [S^*(t),\infty)$, а другая называется областью исполнения и обозначается $\mathcal{E} = [0,T] \times [0, S^*(t)]$. При этом

$$\begin{cases} F(t,s) = K - s, & \text{если } S^*(t) \geqslant s, \quad \text{то есть} \quad s \in \mathcal{E}, \\ F(t,s) > K - s, & \text{если } S^*(t) < s, \quad \text{то есть} \quad s \in \mathcal{C}. \end{cases} \tag{2.3}$$

В области непрерывности $\mathcal{C}$ цена опциона превышает величину платежного обязательства в текущий момент, а оптимальной является стратегия, при которой опцион не предъявляется к исполнению. В области исполнения $\mathcal{E}$ оптимальная стратегия состоит в предъявлении опциона к исполнению.

Задача нахождения безарбитражной цены американского пут опциона, сформулированная как задача со свободной границей, имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t}+rs\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}-rF=0, \quad (t,s)\in\mathcal{C}, \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial F}{\partial t}+rs\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}-rF<0, \quad (t,s)\in\mathcal{E}, \tag{2.5}$$

где $\mathcal{C},\mathcal{E}$ задаются соотношениями (2.3) и $S^*(t)$ – неизвестная функция, подлежащая определению в процессе решения задачи. Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$\lim_{t\to T}F(t,s)=[K-s]_+,\ \lim_{s\to 0}F(t,s)=K,\ \lim_{s\to\infty}F(t,s)=0,\ t\in[0,T], \tag{2.6}$$

$$\lim_{s\to S^*(t)}F(t,s)=K-S^*(t),\ \lim_{s\to S^*(t)}\frac{\partial F(t,s)}{\partial s}=-1,\ t\in[0,T]. \tag{2.7}$$

Замена переменных

$$\theta=T-t, s=Ke^x, Kf(\theta,x)=F(t,s), K\phi(x)=\Phi(s), \tag{2.8}$$

приводящая к безразмерным переменным, позволяет свести задачу (2.4)–(2.7) к задаче с постоянными коэффициентами вида

$$\mathcal{L}_1 f=\frac{\partial f}{\partial\theta}-(r-\frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+rf=0, \quad x>h(\theta), \tag{2.9}$$
$$f(\theta,h(\theta))=1-e^{h(\theta)}, \quad \theta\in[0,T], \tag{2.10}$$
$$f(0,x)=(1-e^x)_+, \quad x\geqslant h(0), \tag{2.11}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}f(\theta,h(\theta))=-e^{h(\theta)}, \tag{2.12}$$
$$f(\theta,x)=1-e^x, \quad \mathcal{L}_1 f(\theta,x)\geqslant 0, \quad x<h(\theta), \quad \theta\in(0,T], \tag{2.13}$$

где $Ke^{h(\theta)}=S^*(\theta)$.

Нестационарная задача (2.4)–(2.7) даже в этом простом случае не имеет явного решения. Поэтому вначале рассмотрим ее стационарный вариант, соответствующий бессрочному американскому опциону, у которого $T=\infty$. В этом случае задача (2.4)–(2.7) сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{d^2F(s,\infty)}{ds^2}+rs\frac{dF(s,\infty)}{ds}-rF(s,\infty)=0,\quad s\in(S^*,\infty),$$

$$\lim_{s\to\infty}F(s,\infty)=0,\quad \lim_{s\to S^*}F(s,\infty)=K-S^*,\ \lim_{s\to S^*}\frac{dF(s,\infty)}{ds}=-1.$$

Замена переменных (2.8) сводит эту задачу к задаче для ОДУ с постоянными коэффициентами и позволяет получить явное решение в виде

$$F(s,\infty)=\begin{cases}(K-S^*)\left(\frac{s}{S^*}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}, & s>S^*,\\ K-s, & s\leqslant S^*,\end{cases}\qquad S^*=\frac{2rK}{2r+\sigma^2}.$$

Далее решение задачи (2.4)–(2.7) можно конструировать следующим образом. Разобьем временной интервал $[t,T]$ на n частей $t=t_0\leqslant t_1\leqslant t_{k-1}\leqslant t_k\leqslant t_n=T$ и заменим производную по времени на интервале $[t_{k-1},t_k]$ разностным оператором, что позволит свести рассматриваемую задачу к последовательности стационарных задач. Вероятностная интерпретация полученных при этом стационарных задач показывает, что эту последовательность можно также рассматривать как результат применения преобразования Лапласа–Карсона на каждом интервале $[t_{k-1},t_k]$. С другой стороны, эта интерпретация позволила Карру [12, 13] свести задачу нахождения цены американского опциона с конечным сроком действия $[t,T]$ в модели БШ к к задаче построения цен последовательности так называемых канадских опционов.

Метод рандомизации Карра представляет собой процедуру, состоящую из следующих трех шагов.

Шаг 1. Рассмотрим американский опцион с датой исполнения T и соответствующий ему американо-канадский опцион с датой исполнения τ, где τ – это экспоненциально распределенная случайная величина со средним $\mathbf{E}\,\tau=\lambda^{-1}=T$. Пусть $p_1(s)=\mathbf{E}\,e^{-r\tau}\Phi(S(\tau))$ – цена этого опциона.

Шаг 2. Найдем цену $p_n(s)$ американо-канадского опциона с датой исполнения τ^n, где τ^n – это сумма n независимых экспоненциально распределенных случайных величин τ_k с параметрами $\lambda_k=\frac{n}{T}$. При этом распределение случайной величины $\tau^n=\sum\limits_{k=1}^{n}\tau_k$ имеет вид

$$\mathbf{P}\left\{\tau^n\in\,dt\right\}=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\,dt,$$

и $\mathbf{E}\,\tau^n = T$.

Шаг 3. Зададим $p^n(t,s)$ с помощью некоторой рекурентной процедуры, основанной на задании $p^n(s)$ и перейдем к пределу при $n \to \infty$, чтобы получить цену исходного американского опциона, имеющего силу до момента T.

Для того, чтобы объяснить смысл третьего шага, заметим, что распределение случайной величины τ^n сходится к дельта функции Дирака, сосредоточенной в точке $\lambda^{-1} = T$. При этом, если для непрерывной функции $g(t)$ определить $g_n^*(T)$ по формуле

$$g_n^*(T) = \int\limits_0^\infty g(t) \frac{(\frac{nt}{T})^{n-1}}{(n-1)!}\, \frac{n}{T} e^{\frac{nt}{T}}\, dt,$$

то мы получим $\lim_{n\to\infty} g_n^*(T) = g(T)$, что и лежит в основе метода рандомизации Карра.

Вероятностное истолкование решения ОДУ второго порядка, возникающего при рассмотрении бессрочного опциона, позволило Боярченко и Левендорскому [15–18] распространить этот подход на более сложные модели. Ниже в этом параграфе мы проиллюстрируем основные идеи такого подхода на примере модели Блэка–Шоулса.

2.2. Расчет цен опционов со случайными датами исполнения

Рассмотрим европейский опцион с датой исполнения T и рандомизируем ее, выбрав в качестве момента исполнения случайную величину $\widetilde{T}$, имеющую экспоненциальное распределение со средним $\mathbf{E}\,\widetilde{T} = \lambda^{-1} = T$. Соответствующий опцион называется европейско-канадским опционом.

Рассмотрим для определенности европейский пут опцион на акции $S(\theta)$ с контрактной функцией $[K-s]_+$, моментом исполнения T и договорной ценой K. Пусть $p(t,s) = e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_{\,t,s}[K - S(T)]_+$ – цена европейского пут опциона в момент t. Представим $p(t,s)$ в терминах процесса $\widehat{S}(t) = S(T-t)$ с обращенным временем $\tau = T - t$,

$$\widehat{p}(\tau, \widehat{S}(\tau)) = p(T-\tau, S(T-\tau)) = p(t, S(t)).$$

При этом $\widehat{p}(\tau, \widehat{S}(\tau))$ удовлетворяет уравнению

$$\widehat{p}_\tau - rs\widehat{p}_s - \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \widehat{p}_{ss} + r\widehat{p} = 0, \quad s > 0,$$

и граничным условиям

$$\lim_{s\downarrow 0}\widehat{p}(\tau,s)=Ke^{-r\tau},\quad \lim_{s\uparrow\infty}\widehat{p}(\tau,s)=0,$$
$$\lim_{\tau\to 0}\widehat{p}(\tau,s)=[K-s]_+,$$

где p_τ, p_s – (частные) производные по соответствующим аргументам.

Для того, чтобы получить соответствующий канадский вариант, предположим, что дата исполнения опциона $\widetilde{T}$– это случайная величина с распределением $\mathbf{P}\{\widetilde{T}<\theta\}=1-e^{-\lambda\theta}$.

Обозначим $p(\lambda,s)$ преобразование Лапласа–Карсона функции $\widehat{p}(t,s)$,

$$p(\lambda,s)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\widehat{p}(t,s)\,dt.$$

Теорема 2.1. *Цена $p(s)$ канадского варианта европейского опциона удовлетворяет уравнению*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 p_{ss}+rsp_s-(\lambda+r)p+\lambda[K-s]_+=0,\quad s>0$$

и граничным условиям

$$\lim_{s\to 0}p(s)=\frac{\lambda}{\lambda+r}K,\quad \lim_{s\to\infty}p(s)=0.$$

Функция $p(s)$ допускает представление

$$p(s)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}\widehat{p}(\tau,s)d\tau=\mathbf{E}\,\widehat{p}(\widetilde{T},s).$$

Доказательство. По определению цена опциона $p(s)$ равна

$$\begin{aligned}p(s)&=\mathbf{E}\,[e^{-r(\widetilde{T}-t)}[K-S(\widetilde{T})]_+|S(t)=s]\\&=\mathbf{E}\,[\mathbf{E}\,[e^{-r(\widetilde{T}-t)}[K-S(\widetilde{T})]_+|S(t)=s,\widetilde{T}=T]]\\&=\mathbf{E}\,[\mathbf{E}\,[e^{-r\widetilde{\tau}}[K-\widehat{S}(0)]_+|\widehat{S}(\widetilde{\tau})=s,\widetilde{\tau}=\tau]]\\&=\mathbf{E}\,\widehat{p}(\widetilde{\tau},s)=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda\tau}\widehat{p}(\tau,s)d\tau.\end{aligned}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, нетрудно показать, что цена такого канадского опциона, называемого европейско-канадским опционом, имеет вид

$$p(\lambda, s) = \begin{cases} m(s) + \frac{\lambda}{\lambda+r}K - s, & s < K, \\ n(s), & s > K, \end{cases}$$

где

$$m(s) = \frac{1}{\beta_+ - \beta_-}(1 - \frac{r}{\lambda + r}\beta_-)K(\frac{s}{K})^{\beta_+}, \quad \text{если} \quad s < K,$$
$$n(s) = \frac{1}{\beta_+ - \beta_-}(1 - \frac{r}{\lambda + r}\beta_+)K(\frac{s}{K})^{\beta_-}, \quad \text{если} \quad s \geqslant K,$$

а $\beta_+ > \beta_-$ – корни характеристического уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\beta - (\lambda + r) = 0. \qquad \square$$

Рассмотрим канадский вариант американского опциона с ценой $p^*(x)$. Цена $p^*(\lambda, x)$ американо-канадского опциона определяется соотношением

$$p^*(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\widehat{p}^*(t, x)\,dt,$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\sigma^2 p^*_{xx} + (r - \frac{\sigma^2}{2})p^*_x - (\lambda + r)p^* - \lambda[1 - e^x]_+ = 0, \quad x > 0 \tag{2.14}$$

с граничными условиями

$$\lim_{x\to\infty} p^*(x) = 0, \quad \lim_{x\to\widetilde{h}^*} p^*(x) = 1 - e^{\widetilde{h}^*}, \quad \lim_{x\to\widetilde{h}^*} p^*_x(x) = -1. \tag{2.15}$$

Граница оптимального исполнения $\widetilde{h}^* = \widetilde{h}^*(\lambda)$ задается с помощью преобразования Лапласа–Карсона

$$\widetilde{h}^*(\lambda) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}h^*(t)\,dt.$$

Применяя метод вариации произвольных постоянных и возвращаясь к исходным координатам, мы получим следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если $\widetilde{S}^* \leqslant K$, то цена американо-канадского пут опциона задается соотношением*

$$p^*(s) = \begin{cases} K - s, & \text{если } \ s \leqslant \widetilde{S}^*, \\ p(s) + e^*(\lambda, s), & \text{если } \ s > \widetilde{S}^*, \end{cases}$$

где $p(s)$ – цена европейско-канадского опциона,

$$e^*(\lambda, s) = -\frac{\beta_+ m(\widetilde{S}^*)}{\beta_-} \left(\frac{s}{\widetilde{S}^*}\right)^{\beta_-}, \quad s > \widetilde{S}^*, \tag{2.16}$$

а функция $m(s)$ была определена выше для европейско-канадского опциона.

Если доопределить функцию $e^*(\lambda, s)$ соотношением $e^*(\lambda, s) = K - s - p^*(\lambda, s)$ для $s \leqslant \widetilde{S}^*$, то из теоремы 2.2 следует, что цена американо-канадского пут опциона $p^*(\lambda, s)$ может быть представлен в виде суммы цены европейско-канадского пут опциона $p^*(\lambda, s)$ и премии $e^*(\lambda, s)$ за возможность раннего исполнения.

При этом граница оптимального исполнения имеет вид

$$\widetilde{S}^*(\lambda) = \left(\frac{r(\beta_+ - 1)}{\lambda}\right)^{(\beta_+)^{-1}} K.$$

2.3. Цена бессрочного американского опциона

При альтернативном подходе к отысканию цены $f(x)$ бессрочного американского опциона в модели БШ мы рассмотрим опционы на акции с выплатой дивидендов по ставке $\delta > 0$.

Для решения этой задачи нам понадобятся общие результаты о вероятностном представлении решения краевой задачи для уравнения Пуассона, которые для диффузионного случая можно найти, например, в [19].

Пусть G – область в евклидовом пространстве R^d с границей ∂G и $\bar{G} = G \cup \partial G$, $Y_x(t) \in R^d$ – диффузионный процесс с производящим оператором L_Y, $Y_x(0) = x \in G$ и τ_G – момент первого выхода процесса $Y_x(t)$ на границу. Обозначим $C(G)$ пространство непрерывных ограниченных функций и $C^2(G)$ пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема 2.3 (Формула Фейнмана–Каца для краевых задач). *Пусть функция $f \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ является решением задачи*

$$L_Y f(x) - rf(x) + \alpha(x) = 0, \quad x \in G, \tag{2.17}$$

$$\lim_{x \to y} f(x) = \beta(y), \quad y \in \partial G. \tag{2.18}$$

Тогда справедливо представление

$$f(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^{\tau_G} e^{-rt}\alpha(Y_x(t))dt + e^{-r\tau_G}\beta(Y_x(\tau_G))\right]. \tag{2.19}$$

Пусть $Y_x(t)$ – диффузионный процесс, R_Y^r – его резольвентный оператор, определяемый для любой ограниченной непрерывной функции $\theta(x)$ соотношением

$$R_Y^r\theta(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^{\infty} e^{-rt}\theta(Y_x(t))dt\right].$$

Рассмотрим рынок, на котором присутствуют акции с непрерывной выплатой дивидендов по ставке δ. Цена такой акции удовлетворяет СДУ

$$dS(\theta) = S(\theta)[(r-\delta)d\theta + \sigma dw(\theta)], \quad S(t) = s, \quad 0 \leqslant t \leqslant \theta \leqslant T,$$

и представима в виде

$$S(\theta) = s\exp\{[r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2](\theta - t) + \sigma[w(\theta) - w(t)]\} = Ke^{Y_x(\theta)}.$$

Обозначим $\tau_h^- = \inf\{t : Y_x(t) \leqslant h\}, \tau_h^+ = \inf\{t : Y_x(t) \geqslant h\}$.

Цена $F(s)$ бессрочного американского опциона с контрактной функцией $\Phi(s)$ задается соотношением

$$F(s) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbf{E}\,[e^{-r\tau}\Phi(S_s(\tau))],$$

которое в безразмерных координатах можно переписать в виде

$$f(x) = f(x,h) = \mathbf{E}\,[e^{-r\tau_h}\phi(Y_x(\tau_h))], \tag{2.20}$$

где $h = \ln[S_s(\tau^*)] - \ln K$ и $\tau_h = \tau_h^{\pm}$ – момент оптимальной остановки процесса $Y_x(\theta)$.

Пусть контрактная функция $\phi \in C^2(R)$, функция $g(x) = (r - L_Y)\phi$ удовлетворяет оценке

$$|g(x)| \leqslant C(e^{\gamma_+ x} + e^{\gamma_- x}),$$

где $\gamma_- \leqslant 0 \leqslant \gamma_+$ – константы, для которых выполняются оценки

$$R_Y^q e^{\gamma x} = \mathbf{E}\left[\int\limits_0^\infty e^{-qt+\gamma Y_x(t)}dt\right] < \infty,$$

где $\gamma = \gamma_\pm$. При этом мы будем говорить, что выполнено условие **C 2.1**.

Лемма 2.4. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна, монотонна (не убывает или не возрастает), изменяет знак и удовлетворяет условию* **C 2.1**. *Тогда цена $f(x,h)$ опциона, задаваемая соотношением* (2.20), *допускает представление*

$$f(x,h) = r^{-1}(\mathcal{E}^+ I_{(h,\infty)}\mathcal{E}^- g)(x), \quad \textit{если} \quad g(-\infty) < 0 < g(\infty),$$

или

$$f(x,h) = r^{-1}(\mathcal{E}^- I_{(-\infty,h)}\mathcal{E}^+ g)(x), \quad \textit{если} \quad g(-\infty) > 0 > g(\infty),$$

где

$$\mathcal{E}^+ g(x) = \beta^+ \int\limits_0^\infty e^{-\beta^+ y} g(x+y)\,dy,$$

$$\mathcal{E}^- g(x) = -\beta^- \int\limits_{-\infty}^0 e^{-\beta^- y} g(x+y)\,dy,$$

β^+, β^- – *корни квадратного уравнения*

$$-\frac{\sigma^2}{2}\beta^2 - (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})\beta + r = 0. \tag{2.21}$$

Доказательство. Используя свойства условных средних и марковские свойства процесса $Y(t)$, представим функцию $f(x,h)$, заданную соотношением (2.20), в виде

$$\begin{aligned} f(x,h) &= \mathbf{E}_x\left[e^{-r\tau_h}(R_Y^r g)(Y(\tau_h))\right] \\ &= \mathbf{E}_x\left[e^{-r\tau_h}\mathbf{E}_{Y(\tau_h)}\left[\int_0^\infty e^{-rt}g(Y(t))dt\right]\right] \\ &= \mathbf{E}_x\left[\int_{\tau_h}^\infty e^{-rt}g(Y(t))dt\right] = f_\infty(x) - f_h(x), \end{aligned} \tag{2.22}$$

где $\mathbf{E}_x[f(Y(T))] = \mathbf{E}[f(Y_x(T))]$,

$$f_\infty(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-rt}g(Y(t))dt\right] = R_Y^r g(x),$$

$$f_h(x) = \mathbf{E}_x\left[\int_0^{\tau_h^-} e^{-rt}g(Y(t))\,dt\right]. \tag{2.23}$$

Как вытекает из теоремы 2.3, $f_\infty(x,h)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\sigma^2}{2}f'' + (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})f' - rf + g = 0. \tag{2.24}$$

Поскольку (2.24) – это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, то нетрудно явно выписать его решение. Однако нас будет интересовать некоторое специальное представление этого решения, допускающее вероятностную интерпретацию, которую можно распространить и на более общий класс уравнений.

Перепишем (2.24) в виде

$$\left(-\frac{\sigma^2}{2}D^2 - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})D + r\right)f(x) = g(x), \tag{2.25}$$

где $D = \frac{d}{dx}$, и факторизуем оператор $M(D) = -\frac{\sigma^2}{2}D^2 - (r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})D + r$, представив его в виде

$$M(D) = rM^-(D)M^+(D) = r\frac{\beta^- - D}{\beta^-}\frac{\beta^+ - D}{\beta^+},$$

где β^+, β^- – корни характеристического уравнения, соответствующего (2.24).

Заметим, что если $\delta = 0$, то $\beta^+ = 1$, $\beta^- = -\frac{2r}{\sigma^2}$.

Представим (2.25) в виде $rM^-(D)M^+(D)f = g$, найдем решение уравнения

$$M^-(D)f_1 = g \tag{2.26}$$

и обозначим это решение $\mathcal{E}^- g$. Затем решим уравнение

$$M^+(D)rf = f_1 \tag{2.27}$$

и обозначим его решение $\mathcal{E}^+ f_1$. В результате получим явное выражение для $rf(x)$ в виде

$$rR_Y^r g(x) = rf(x) = (\mathcal{E}^+\mathcal{E}^- g)(x). \tag{2.28}$$

Уравнение (2.26) – это ОДУ с постоянными коэффициентами

$$\beta^- f_1 - f_1' = \beta^- g(x). \tag{2.29}$$

Если $|g(x)| \leqslant e^{\beta^- x}$ при $x \to -\infty$, то (2.29) имеет единственное решение с таким же ростом при $x \to -\infty$, имеющее вид

$$f_1(x) = (-\beta^-) \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\beta^- y} g(x+y)\, dy. \tag{2.30}$$

Это представление допускает вероятностную интерпретацию вида

$$f_1(x) = \mathcal{E}^- g(x) = \mathbf{E}\,[g(x + Z^-)], \tag{2.31}$$

где Z^- – экспоненциально распределенная случайная величина со значениями в $(-\infty, 0]$ с параметром $[\beta^-]^{-1}$. Аналогично уравнение (2.27) при $v = rf$ эквивалентно ОДУ

$$\beta^+ v(x) - v'(x) = \beta^+ f_1(x) \tag{2.32}$$

и его единственное решение, растущее при $x \to \infty$ медленнее, чем $e^{\beta^+ x}$, можно представить в виде

$$v(x) = \beta^+ \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\beta^+ y} f_1(x+y)\, dy. \tag{2.33}$$

Таким образом,

$$rf(x) = \mathcal{E}^+ f_1(x) = \mathbf{E}\,[f_1(x+Z^+)], \tag{2.34}$$

где Z^+ – экспоненциально распределенная случайная величина со значениями в $[0,\infty)$ с параметром $[\beta^+]^{-1}$.

Отметим, что для монотонных функций $g(x)$, удовлетворяющих **C 2.1** и изменяющих знак, функции $\mathcal{E}^\pm g(x)$ также монотонны и изменяют знак.

Пусть $g(-\infty) < 0 < g(\infty)$. Функция $f_h(x)$ вида (2.23) ограничена и удовлетворяет соотношению (2.24) лишь на интервале $(-\infty,h]$, и $f_h(x) = 0$ на интервале $[h,\infty)$. Для того, чтобы задать уравнение (2.24) на всей прямой, введем вспомогательную функцию g_1, исчезающую на $(-\infty,h]$, и положим

$$M(D)f_h(x) = g(x) + g_1(x) \quad \text{для} \quad x \in R^1, \tag{2.35}$$

или

$$M^-(D)M^+(D)rf_h(x) = g(x) + g_1(x), \quad \forall x. \tag{2.36}$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, можно проверить, что

$$M^+(D)rf_h(x) = \mathcal{E}^- g(x) + \mathcal{E}^- g_1(x) = \mathbf{E}\,[g(x+Z^-)] + \mathbf{E}\,[g_1(x+Z^-)]. \tag{2.37}$$

Как следует из (2.31) и (2.32), функция $v_h(x) = rf_h(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\beta^+ v_h(x) - {v'}_h(x) = \beta^+ \mathcal{E}^- g(x) \tag{2.38}$$

на $(-\infty,h]$ и обращается в ноль на $[h,\infty)$. Такое решение имеет вид

$$\begin{aligned} v_h(x) &= \beta^+ \int_0^{h-x} e^{-\beta^+ y} (\mathcal{E}^- g)(x+y)\,dy \\ &= \beta^+ \int_0^{\infty} e^{-\beta^+ y} I_{(-\infty,h]}(x+y) (\mathcal{E}^- g)(x+y)\,dy. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Следовательно,

$$rf_h(x) = (\mathcal{E}^+ I_{(-\infty,h]} \mathcal{E}^- g)(x). \tag{2.40}$$

Наконец, мы можем найти $f(x,h)$ и оптимальную границу h с помощью соотношений

$$\begin{aligned} rf(x,h) &= (\mathcal{E}^+\mathcal{E}^- g)(x) - (\mathcal{E}^+ I_{(-\infty,h]}\mathcal{E}^- g)(x) \\ &= (\mathcal{E}^+ I_{(h,\infty)}\mathcal{E}^- g)(x) = \mathbf{E}\,[I_{(h,\infty)}(x+Z^+)m(x+Z^+)], \end{aligned} \tag{2.41}$$

где $m(x) = \mathcal{E}^- g(x) = \mathbf{E}\, g(x+Z^-)$. Если $g(x)$ – непрерывная возрастающая функция, изменяющая знак, то и m обладает этими свойствами. Тогда математическое ожидание в правой части (2.41) максимально тогда и только тогда, когда умножение на индикаторную функцию отсекает все отрицательные значения m. При этом оптимальное значение h определяется как корень уравнения

$$m(x) = \mathcal{E}^- g(x) = \mathbf{E}\,[g(x+Z^-)] = 0. \tag{2.42}$$

После того, как h определено, безарбитражная цена опциона определяется соотношением (2.41) и равна

$$f(x,h) = r^{-1}(\mathcal{E}^+ I_{(h,\infty)}\mathcal{E}^- g)(x). \tag{2.43}$$

Повторяя проведенные выше рассуждения для случая $g(-\infty) > 0 > g(\infty)$, мы получим представление

$$\begin{aligned} rf(x,h) &= (\mathcal{E}^-\mathcal{E}^+ g)(x) - (\mathcal{E}^- I_{[h,\infty)}\mathbf{E}^+ g)(x) \\ &= (\mathcal{E}^- I_{(-\infty,h)}\mathcal{E}^+ g)(x) = \mathbf{E}\,[I_{(-\infty,h)}(x+Z^-)m(x+Z^-)], \end{aligned} \tag{2.44}$$

где $m(x) = \mathcal{E}^+ g(x) = \mathbf{E}\, g(x+Z^+)$, и найдем оптимальное значение h как корень уравнения

$$m(x) = \mathcal{E}^+ g(x) = \mathbf{E}\,[g(x+Z^+)] = 0. \qquad \Box \tag{2.45}$$

Пример. Рассмотрим бессрочный американский пут опцион на акции с выплатой дивидендов по ставке $r \leqslant \delta$, для которого $g(x) = r - \delta e^x$. При этом $g(x) < 0$, если $x > 0$, и оптимальное значение h лежит в интервале $x < 0$. Если $x < 0$, то

$$m(x) = \mathcal{E}^+ g(x) = \beta^+ \int\limits_0^\infty e^{-\beta^+ y}(r - \delta e^{x+y})dy = r - \frac{-\delta\beta^+}{1-\beta^+}e^x$$

и h определяется как корень уравнения

$$r+\frac{\delta\beta^+}{1-\beta^+}e^x=0.$$

Определив h, мы вычислим цену опциона $f(x,h)$ с помощью (2.44)

$$\begin{aligned}
f(x,h)&=-r^{-1}\beta^-\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\beta^-y}I_{(-\infty,h)}(x+y)\left[r+\frac{\delta\beta^+}{1-\beta^+}e^{x+y}\right]dy\\
&=-r^{-1}\beta^-\int\limits_{-\infty}^{h-x}e^{-\beta^-y}\left[r+\frac{\delta\beta^+}{1-\beta^+}e^{x+y}\right]dy\\
&=e^{\beta^-(x-h)}-r^{-1}\beta^-\int\limits_{-\infty}^{h-x}e^{-\beta^-y}\frac{\delta\beta^+}{1-\beta^+}e^{x+y}\,dy\\
&=\left[1-\frac{e^h\delta\beta^+\beta^-}{r(1-\beta^+)(1-\beta^-)}\right]e^{\beta^-(x-h)}.
\end{aligned}$$

В заключение этого пункта установим связь между оператором $\mathcal{E}_Y$,

$$\mathcal{E}_Yf=r\int\limits_0^\infty e^{-rt}\mathbf{E}\,f(Y_x(t))dt=rR_Y^rf(x)$$

и введенными выше операторами $\mathcal{E}^+$ и $\mathcal{E}^-$. На функциях $f(x)=e^{yx}$ оператор $\mathcal{E}_Y$ действует по правилу

$$\mathcal{E}_Ye^{yx}=r\int\limits_0^\infty e^{-rt}\mathbf{E}\,e^{yY_x(t)}dt=\frac{r}{r-\Psi(y)}e^{yx},$$

где $\Psi(y)$ – характеристический показатель процесса $Y(t)$. При этом несобственный интеграл в определении оператора $\mathcal{E}_Y$ сходится, если $r-\Psi(y)>0$. В терминах корней β^+ и β^- характеристического уравнения (2.21) это условие приобретает вид $\beta^-<y<\beta^+$ или, в случае комплексного y, $\beta^-<\mathrm{Re}\,y<\beta^+$.

Обозначим

$$\kappa_r^+(y)=\frac{\beta^+}{\beta^+-y},\quad \kappa_r^-(y)=\frac{\beta^-}{\beta^--y}.$$

Нетрудно проверить, что для $y \neq \beta^{\pm}$ справедливы соотношения

$$\mathcal{E}^{\pm} e^{yx} = \kappa_r^{\pm}(y) e^{yx} \quad \text{и} \quad \frac{r}{r - \Psi_Y(y)} = \kappa_r^{+}(y)\kappa_r^{-}(y).$$

При этом для любой ограниченной измеримой функции g справедливо соотношение

$$\mathcal{E}_Y f = \mathcal{E}^{+}\mathcal{E}^{-} f = \mathcal{E}^{-}\mathcal{E}^{+} f,$$

которое легко проверяется на функциях вида $f(x) = e^{yx}$, а затем с помощью предельного перехода распространяется на измеримые ограниченные функции, которые можно аппроксимировать функциями такого вида. Полученные соотношения представляют собой частный случай факторизации Винера–Хопфа [20].

Отметим еще одну важную интерпретацию операторов $\mathcal{E}_Y$ и $\mathcal{E}^{+}, \mathcal{E}^{-}$. Пусть T – экспоненциально распределенная случайная величина со средним r^{-1}, не зависящая от процесса $Y(t)$. Плотность распределения T имеет вид re^{-rt} и, следовательно, $\mathcal{E}_Y g(x) = \mathbf{E}\,[g(x + Y(T))]$. Рассмотрим, наряду с процессом $Y(t)$, также процессы $\bar{Y}(t) = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} Y(s)$ и $\underline{Y}(t) = \inf\limits_{0 \leqslant s \leqslant t} Y(s)$. Известно [21], что $\bar{Y}(T)$ – это экспоненциально распределенная случайная величина на положительной полуоси со средним $\frac{1}{\beta^{+}}$, а $\underline{Y}(t)$ – это экспоненциально распределенная случайная величина на отрицательной полуоси со средним $\frac{1}{\beta^{-}}$. Таким образом, действие операторов $\mathcal{E}^{+}$ и $\mathcal{E}^{-}$ можно представить в виде

$$\mathcal{E}^{+} g(x) = \mathbf{E}\,[g(x + \bar{Y}(T))] = r\mathbf{E}\,\left[\int_0^\infty e^{-rt} g(x + \bar{Y}(t))dt\right],$$

$$\mathcal{E}^{-} g(x) = \mathbf{E}\,[g(x + \underline{Y}(T))] = r\mathbf{E}\,\left[\int_0^\infty e^{-rt} g(x + \underline{Y}(t))dt\right].$$

2.4. Американские опционы с конечным временем жизни

Вернемся к рассмотрению опционов с конечным временем жизни T типа пут опциона на акции без выплаты дивидендов, цена которого удовлетворяет соотношениям (2.4)–(2.7) с контрактной функцией $\Phi(s)$. Как и выше, мы перейдем к безразмерным величинам $x, \phi(x)$ с помощью соотношений $s = Ke^x$, $Kf(\theta, x) = F(t, s)$, $K\phi(x) = \Phi(s)$.

Условие **C 2.2.** Пусть контрактная функция $\phi(x)$ такова, что функция $g = (r - L_Y)\phi$ определена почти всюду, удовлетворяет условию **C 2.1**, не возрастает и изменяет знак.

Для краткости мы ограничимся рассмотрением этого случая. Рассмотрение опционов типа колл опциона с неубывающей и изменяющей знак контрактной функцией проводится аналогично.

Пусть T – фиксированная дата исполнения опциона. Разделим интервал $[0, T]$ на n подинтервалов $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$ и обозначим $\Delta = t_{k+1} - t_k$.

Пусть $q = \Delta^{-1} + r$. Аппроксимацию границы h^k оптимального исполнения на интервале (t_k, t_{k+1}) и аппроксимацию f^k функции $f(t_k, x)$ построим, используя обратную индукцию. Для $k = n$ положим $f^n(x) = \phi(x)$, а для $k = n-1, n-2, \ldots$, зададим f^k как решение дискретизованного по времени варианта задачи (2.4)–(2.7) (после перехода к безразмерным координатам) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ с оптимальной границей исполнения, определяемой так, чтобы максимизировать $f^k(x)$, т.е. рассмотрим задачу

$$(q - L_Y)f^k(x) = \Delta^{-1} f^{k+1}(x), \quad x > h^k, \tag{2.46}$$

$$f^k(x) = \phi(x), \quad x \leqslant h^k, \tag{2.47}$$

где $L_Y f = (r - \frac{\sigma^2}{2})f_x + \frac{\sigma^2}{2} f_{xx}$ – генератор марковского процесса $Y_x(t)$.

Замечание. Задачу (2.46), (2.47) можно получить в результате применения преобразования Лапласа–Карсона к задаче (2.4)–(2.7) на интервале $[t_k, t_{k+1}]$, что в точности соответствует рандомизации момента t_{k+1} исполнения опциона, рассматриваемого на интервале $[t_k, t_{k+1}]$.

На интервале $[t_k, t_{k+1}]$ граница оптимального исполнения – это константа h_k и процедура определения f^k и h_k состоит в следующем: при $k = n$ зададим $f^n = \phi(x)$, а при $k = n-1, n-2, \ldots$ пусть

$$f^k(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^{\tau^k} e^{-[\Delta^{-1}+r]t} \Delta^{-1} f^{k+1}(Y_x(t))dt\right] + \mathbf{E}\left[e^{-[\Delta^{-1}+r]\tau^k} \phi(Y_x(\tau^k))\right], \tag{2.48}$$

где τ^k – это оптимальный момент остановки, максимизирующий величину $f^k(x)$. В соответствии с теоремой 2.3 $f^k(x)$ удовлетворяет задаче (2.46), (2.47), а τ^k – это первый момент попадания процесса $Y_x(t)$ в интервал $(-\infty, h^k]$.

Введем в рассмотрение функцию $\widetilde{f}^k = f^k - \phi$ и подставим $\widetilde{f}^k$ и $\widetilde{f}^{k+1}$ в (2.48). Тогда мы получим соотношение

$$\widetilde{f}^k(x) + \phi(x) = \mathbf{E}\left[\int\limits_0^{\tau^k} e^{-qt}\Delta^{-1}\widetilde{f}^{k+1}(Y_x(t))\,dt\right]$$
$$+\mathbf{E}\left[\int\limits_0^{\tau^k} e^{-qt}\Delta^{-1}\phi(Y_x(t))\,dt\right] + \mathbf{E}\left[e^{-q\tau^k}\phi(Y_x(\tau^k))\right]. \tag{2.49}$$

Из формулы Дынкина, примененной к функции $\phi(x)$ и процессу $Y_x(t)$, следует, что справедливо равенство

$$\phi(x) = \mathbf{E}\left[\int\limits_0^{\tau^k} e^{-qt}(q - L_Y)\phi(Y_x(t))dt\right] + \mathbf{E}\left[e^{-q\tau^k}\phi(Y_x(\tau^k))\right],$$

и, следовательно,

$$f^k(x) = \mathbf{E}\left[\int\limits_0^{\tau^k} e^{-qt}\left[\Delta^{-1}\widetilde{f}^{k+1}(Y_x(t)) - (r - L_Y)\phi(Y_x(t))\right]dt\right]. \tag{2.50}$$

Полученные выше формулы допускают представление в терминах операторов $\mathcal{E}_q^{\pm}$ вида $\mathcal{E}_q^{\pm}g(x) = \mathbf{E}\,[g(x+Z_q^{\pm})]$, где $Z_q^{\pm}$ – экспоненциально распределенные случайные величины со средними $\mathbf{E}\,Z_q^{\pm} = [\beta^{\pm}]^{-1}$, а $\beta^{\pm}$ – корни характеристического уравнения

$$\frac{\sigma^2}{2}y^2 + (r - \frac{\sigma^2}{2})y - q = 0. \tag{2.51}$$

Теорема 2.5. *Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условию* **C 2.2**. *Тогда для $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ справедливы следующие утверждения*:

1) *функция $v^k = \mathcal{E}_q^{+}(\Delta^{-1}\widetilde{f}^{k+1} - (r - L_Y)\phi)$ является неубывающей функцией, имеющей единственный ноль при $x = h^k$, т.е. h^k – корень уравнения $v^k(x) = 0$*;

2) *τ_k^- – оптимальный момент остановки*;

3) *$\widetilde{f}^k = q^{-1}\mathcal{E}_q^{-}I_{(h_k,\infty)}v^k$*;

4) $f^k = \widetilde{f}^k + R_Y^r g$;

5) *функция* $\widetilde{f}^k$ *не убывает и обращается в ноль при* $x < h_k$.

Доказательство. Пусть $k = n - 1$. Тогда $\widetilde{f}^{k+1} = f^n - R_Y^r g(x)$ – неубывающая функция, равная нулю при $x < h^n = \{\max x : \phi(x) \geqslant 0\}$. При этом $\Delta^{-1}\widetilde{f}^{k+1} - (r - L_Y)\phi$ – неубывающая функция, которая изменяет знак и удовлетворяет условиям **C 2.2**. Доказательство первых трех утверждений теоремы мы выделим и представим в виде доказательства леммы 2.6 ниже. Утверждение 4) вытекает из определения функции $\widetilde{f}^k = f^k - \phi$, наконец последнее утверждение следует из 1) и 3).

Пусть утверждение 4) доказано для $k = n - 1, n - 2, \ldots, m + 1$. Тогда функция $\Delta^{-1}\widetilde{f}^{m+1} - (q - L_Y)\phi$ является неубывающей функцией, которая изменяет знак и утверждения 1)–3) вытекают из теоремы 2.3, а 4) из соотношения $\widetilde{f}^k = f^k - \phi$. □

Лемма 2.6. *Пусть функция* $\xi(x)$ *удовлетворяет условию* **C 2.2**. *Тогда*:

а) *уравнение* $\mathcal{E}_q^+\xi(x) = 0$ *имеет единственное решение* $x = h$;

б) *решение* $\zeta(x, h)$ *задачи*

$$\begin{aligned}(q - L_Y)\zeta(x, h) &= \xi(x), \quad x > h,\\ \zeta(x, h) &= 0, \qquad x \leqslant h\end{aligned}$$

представимо в виде

$$\zeta(x, h) = q^{-1}\mathcal{E}_q^- I_{(h,\infty)}\mathcal{E}_q^+\xi(x);$$

в) $\tau_h = \tau_h^-$ *– оптимальный момент остановки.*

Доказательство. Поскольку функция ξ удовлетворяет условию **C 2.2** и не возрастает, то $\mathcal{E}^+\xi(x)$ – непрерывная невозрастающая функция, меняющая знак, следовательно существует единственное решение уравнения $\mathcal{E}_q^+\xi(x) = \mathbf{E}\left[\xi(x + Z^+)\right] = 0$ и $\mathcal{E}^+\xi(x) < 0$ при $x > h$, $\mathcal{E}^+\xi(x) > 0$ при $x < h$.

Из теоремы 2.3 вытекает, что функция

$$\zeta(x, h) = \mathbf{E}\left[\int_0^{\tau_h^-} e^{-qt}\xi(Y_x(t))dt\right]$$

удовлетворяет уравнению $(q - L_Y)\zeta = \xi$ при $x > h$ и представима в виде

$$\zeta(x,h) = q^{-1}\mathcal{E}_q^- I_{(h,\infty)}\mathcal{E}_q^+ \xi(x),$$

если $\tau_h^- = \inf\{t > 0 : Y_x(t) \leqslant h\}$ – момент первого попадания в интервал $(-\infty, h]$, а ξ – измеримая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 2.5. Здесь $\mathcal{E}_q^{\pm}$ определяются соотношениями (2.31), (2.34), в которых β^+ и β^- – корни уравнения (2.51). □

Следствие. *Алгоритм построения цены американского опциона с конечным сроком действия в модели БШ можно представить в следующем виде*:

1. *Разобьем интервал* $[t,T]$ *на* n *частей,* $t = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, *определим* $f^n(x) = \phi(x), q = \Delta^{-1} + r$, *вычислим функцию* $g(x)$, *определяемую соотношением* $g(x) = (r - L_Y)\phi(x)$ *и функцию*

$$\widetilde{g} = (q - L_Y)\phi = (q - L_Y)R_Y^r g = (\Delta^{-1} + r - L_Y)R_Y^r g = g + \Delta^{-1}R_Y^r g.$$

2. *Для* $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ *вычислим*

$$m^k = \Delta^{-1}[\widetilde{f}^{k+1} - \Delta g], \quad v^k = \mathcal{E}_q^+ m^k,$$

зададим h^k *как корень уравнения* $v^k(x) = 0$ *и вычислим*

$$f^k = q^{-1}\mathcal{E}_q^- I_{(h_k,\infty)}\mathcal{E}_q^+ m^k + R_Y^r g.$$

3. Расчет цен американских опционов в модели Мертона

Рассмотрим модель финансового рынка, на котором цены базовых рисковых активов могут иметь скачки. Для описания такой модели нам понадобятся процессы Леви, теория которых хорошо развита (см. монографии [20], а также [6], [22], где процессы Леви применяются к описанию финансовых рынков). При рассмотрении американских опционов мы ограничимся рассмотрением класса процессов Леви, обладающих так называемым ACP-свойством (absolute continuity of potential measures) [20]. Напомним, что процесс Леви Y обладает ACP-свойством, если его переходная вероятность имеет плотность.

При этом класс контрактных функций, которые можно включить в рассмотрение, – это класс ограниченных борелевских функций $\phi(x)$, удовлетворяющих условию **C 2.2**.

В этой модели уравнение для безарбитражной цены американского опциона имеет вид интегро-дифференциального уравнения и его стационарный вариант, описывающий цену бессрочного опциона, больше не является обыкновенным дифференциальным уравнением. Тем не менее, и в этом случае удается построить аналог факторизации типа (2.28), учитывая вероятностную интерпретацию стационарного уравнения как уравнения для функции $f = R_Y^q \phi$, и используя факторизацию $R_Y^q = R_{\bar{Y}}^q R_{\underline{Y}}^q$, где $\bar{Y}(t), \underline{Y}(t)$ – супремум и инфимум $Y(s)$ на $[0,t]$ соответственно. Ниже в первом разделе этого параграфа мы приведем результаты, описывающие связь между резольвентой процесса Леви и его характеристическим показателем. Доказательство общих результатов можно найти в [20] и в работах [17, 18]. Во втором и третьем разделе эти результаты применяются к вычислению цен американских опционов.

3.1. Характеристические показатели процессов Леви и их свойства

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство с фильтрацией $\mathcal{F}_t$, $0 \leqslant t < \infty$. Случайный процесс $Z(t)$ называется процессом Леви, если $Z(t) - Z(s)$ не зависит от $\mathcal{F}_s, 0 \leqslant s < t$, имеет стационарные приращения и непрерывен по вероятности. Формула Леви–Хинчина позволяет однозначно описать случайный процесс в терминах его характеристического показателя Ψ_Z, определяемого на вещественной оси соотношением $\mathbf{E}\left[e^{iyZ(t)}\right] = e^{-t\Psi_Z(y)}$, где функция Ψ_Z имеет вид

$$\Psi_Z(y) = -i\beta y + \frac{\sigma^2}{2}y^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{iyz} - 1 - iyzI_{[-1,1]})\pi(dz), \tag{3.1}$$

$\sigma \geqslant 0, \beta \in R$, а π – такая мера на $R \setminus \{0\}$, что

$$\pi(\{0\}) = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (|z|^2 \wedge 1)\pi(dz) < \infty.$$

Процесс Леви $Z_x(t) = x + Z(t)$ – это марковский процесс с производящим оператором вида

$$M_Z u(x) = \beta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} [u(x+z) - zu'(x) - I_{[-1,1]}(z)u(x)]\pi(dz). \tag{3.2}$$

При этом
$$(-M_Z)e^{iyx} = \Psi_Z(y)e^{iyx}. \tag{3.3}$$

Обозначим
$$\widehat{u}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx}u(x)dx, \quad u(x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{+iyx}\widehat{u}(y)\,dy$$

прямое и обратное преобразование Фурье соответственно. Функцию $\psi(y) = \Psi_Z(y)$ в теории псевдо-дифференциальных операторов называют символом оператора M_Z, при этом $-M_Z = \psi(D)$ и
$$\psi(D)u(x) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\psi(y)\widehat{u}(y)\,dy.$$

Для процесса Леви $Z(t)$ справедливо также представление Леви–Ито в виде
$$Z(t) = \beta t + \sigma w(t) + \int\limits_0^t \int\limits_{|z|<1} z\mu(d\theta, dz) + \int\limits_0^t \int\limits_{|z|\geqslant 1} z\nu(d\theta, dz),$$

где $w(t)$ – винеровский процесс, ν – пуассоновская случайная мера с параметром $\mathbf{E}\,\nu(dt, dz) = \lambda dt\pi(dz)$, $\mu(dt, dz) = \nu(dt, dz) - \mathbf{E}\,\nu(dt, dz)$.

Рассмотрим процесс Леви
$$Z(t) = rt + \sigma w(t) + \int\limits_0^t \int\limits_{R\setminus\{0\}} z\mu(d\theta,\, dz). \tag{3.4}$$

Характеристический показатель $\Psi_Z(y)$ возникает при вычислении действия генератора M_Z марковского процесса $Z(t)$ на экспоненциальную функцию e^{yx}, $M_Z e^{yx} = \Psi_Z(y)e^{yx}$. При этом резольвента R_Z^r действует на экспоненциальную функцию e^{yx} как оператор умножения на функцию $(r - \Psi_Z(y))^{-1}$
$$R_Z^r e^{yx} = \mathbf{E}\left[\int\limits_0^{\infty} e^{-rt}e^{yZ_x(t)}\,dt\right] = (r - \Psi_Z(y))^{-1}e^{yx}, \tag{3.5}$$

что нетрудно показать, вычисляя $\mathbf{E}\left[e^{yZ(t)}\right]=e^{t\Psi_Z(y)}$ под знаком интеграла и затем вычисляя сам интеграл.

Введем в рассмотрение процессы $\bar{Z}(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} Z(s)$ и $\underline{Z}(t)=\inf\limits_{0\leqslant s\leqslant t} Z(s)$ и отметим, что преобразование Лапласа–Карсона характеристической функции процесса $Z(t)$ равно

$$r\mathbf{E}\left[\int\limits_0^\infty e^{-rt}e^{iyZ(t)}\,dt\right]=r(r+\Psi_Z(y))^{-1}$$

и допускает факторизацию в терминах преобразований Лапласа–Карсона характеристических функций процессов $\bar{Z}(t)$ и $\underline{Z}(t)$.

Пусть $q>0$, $\tau\in R_+$ – экспоненциально распределенная случайная величина со средним q^{-1} и пусть случайные величины τ и процесс $Z_x(t)$, удовлетворяющий (3.2), независимы. Плотность распределения случайной величины τ имеет вид qe^{-qt}, и мы обозначим $\mathbf{E}_Z$ линейное отображение, заданное соотношением

$$\mathcal{E}_Z g(x)=\mathbf{E}\left[g(Z_x(\tau))\right]=q\mathbf{E}\left[\int\limits_0^\infty e^{-qt}g(Z_x(t))\,dt\right]=qR_Z^q g(x). \tag{3.6}$$

Нетрудно проверить, что $(\mathcal{E}_Z 1)(y)=1$ и

$$\mathcal{E}_Z e^{yx}=q\left[\int\limits_0^\infty e^{-qt}e^{t\Psi_Z(y)}\,dt\right]=\frac{q}{q-\Psi_Z(y)}. \tag{3.7}$$

Теорема 3.1. (а) *Пусть $q>0$, $\mu_Z(t)$ – распределение процесса Леви $Z(t)$ вида (3.4) и $q-\Psi_Z(y)>0$. Тогда существует пара безгранично делимых распределений $\mu_q^-(t)$ и $\mu_q^+(t)$ с носителями на $(-\infty,0]$ и $[0,\infty)$ соответственно таких, что для их преобразований Фурье ϕ_q^+ и ϕ_q^- справедливо равенство*

$$q(q+\Psi_Z(y))^{-1}=\phi_q^+(y)\phi_q^-(y),\quad y\in R. \tag{3.8}$$

(б) *Функции $\phi_q^+(y)$ и $\phi_q^-(y)$ допускают представление*

$$\phi_q^+(y)=q\int\limits_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}\left[e^{iy\bar{Z}(t)}\right]dt=q\int\limits_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}\left[e^{iy(Z(t)-\underline{Z}(t))}\right]dt, \tag{3.9}$$

$$\phi_q^-(y)=q\int\limits_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}\left[e^{iy\underline{Z}(t)}\right]dt=q\int\limits_0^\infty e^{-qt}\mathbf{E}\left[e^{iy(Z(t)-\bar{Z}(t))}\right]dt, \tag{3.10}$$

а также

$$\phi_q^+(y) = \exp\left[t^{-1}e^{-qt}\,dt\int_0^\infty (e^{-ixy}-1)\mu(t,dx)\right],$$

$$\phi_q^-(y) = \exp\left[t^{-1}e^{-qt}\,dt\int_{-\infty}^0 (e^{-ixy}-1)\mu(t,dx)\right].$$

При этом $\phi_q^+(y)$ и $\phi_q^-(y)$ допускают аналитическое продолжение в полуплоскостях $\Im y > 0$ и $\Im y < 0$ соответственно и не имеют там нулей.

В ряде случаев функции ϕ_q^+ и ϕ_q^- можно найти в явном виде. В частности, если $Z(t)$ – процесс Леви с мерой Леви

$$\pi(dz) = c^+\lambda^+e^{-\lambda^+z}I_{(0,\infty)}(z)\,dz + c^-(-\lambda^-)e^{-\lambda^-z}I_{(-\infty,0)}(z)\,dz, \quad (3.11)$$

где $\lambda^+ > 0 > \lambda^-, c_\pm > 0$, и с характеристическим показателем

$$\Psi_Z(y) = iry - \frac{\sigma^2}{2}y^2 + \frac{ic^+y}{\lambda^+-iy} + \frac{ic^-y}{\lambda^--iy}, \quad (3.12)$$

то $q-\Psi_Z(y)$ – рациональная функция, и уравнение $q-\Psi_Z(y)=0$ имеет четыре вещественных корня. Обозначим эти корни $\beta_j^\pm$, $j=1,2$. Нетрудно проверить, что в этом случае $\beta_2^- < \lambda^- < \beta_1^- < 0 < \beta_1^+ < \lambda^+ < \beta_2^+$. При этом

$$\phi_q^+(y) = \frac{\beta_1^+\beta_2^+(\lambda^+-y)}{(\beta_1^+-y)(\beta_2^+-y)\lambda^+} = \sum_{k=1,2}\frac{a_k^+}{\beta_k^+-y}, \quad (3.13)$$

где

$$a_1^+ = \frac{\beta_1^+\beta_2^+(\lambda^+-\beta_1^+)}{(\beta_2^+-\beta_1^+)\lambda^+}, \quad a_2^+ = \frac{\beta_1^+\beta_2^+(\lambda^+-\beta_2^+)}{(\beta_1^+-\beta_2^+)\lambda^+} \quad (3.14)$$

– положительные числа и

$$\phi_q^-(y) = \frac{\beta_1^-\beta_2^-(\lambda^--y)}{(\beta_1^--y)(\beta_2^--y)\lambda^-} = \sum_{k=1,2}\frac{a_k^-}{\beta_k^--y}, \quad (3.15)$$

где

$$a_1^- = \frac{\beta_1^-\beta_2^-(\lambda^- - \beta_1^-)}{(\beta_2^- - \beta_1^-)\lambda^-}, \quad a_2^- = \frac{\beta_1^-\beta_2^-(\lambda^- - \beta_2^-)}{(\beta_1^- - \beta_2^-)\lambda^-} \tag{3.16}$$

– отрицательные числа. Наконец, действие операторов $\mathcal{E}_{\bar{Z}} = qR^q_{\bar{Z}}$ и $\mathcal{E}_{\underline{Z}} = qR^q_{\underline{Z}}$ можно представить в виде

$$qR^q_{\bar{Z}}f(x) = \sum_{k=1,2} a_k^+ \int_0^\infty e^{-\beta_k^+ z} f(x+z)\,dz, \tag{3.17}$$

$$qR^q_{\underline{Z}}f(x) = \sum_{k=1,2} (-a_k^-) \int_{-\infty}^0 e^{-\beta_k^- z} f(x+z)\,dz. \tag{3.18}$$

Пусть $C_0^2(R)$ обозначает пространство ограниченных дважды дифференцируемых функций с компактными носителями, а $C_0(R)$ обозначает пространство ограниченных непрерывных функций с компактными носителями. Из теории процессов Леви [20] следует, что отображение

$$q^{-1}(q - M_Z) : C_0^2(R) \to C_0(R)$$

обратимо и обратное отображение совпадает с $\mathcal{E}_Z$. С другой стороны, нам нужно иметь возможность применять оператор $\mathcal{E}_Z$ к экспоненциально растущим при $x \to \pm\infty$ функциям, имеющим разный порядок роста в положительном и отрицательном направлении. В этих случаях мы ограничимся рассмотрением класса $C_0^k([\gamma_-, \gamma_+], R)$ функций, дифференцируемых до порядка k с нормой

$$\|\Phi\| = \sum_{m=0}^{k} \sup_R (e^{\gamma^- x} + e^{\gamma^+ x})^{-1} |\Phi^{(m)}(x)|.$$

Для того, чтобы гарантировать, что $q^{-1}(q - M_Z)$ действует из $C_0^2([\gamma^-, \gamma^+], R)$ в $C_0([\gamma^-, \gamma^+], R)$, необходимо, чтобы функция $\mathbf{E}\,[e^{yY(t)}]$ была определена при $y = \gamma^\pm$, а для того, чтобы оператор $q^{-1}(q - M_Z)$ был обратим, нужны некоторые дополнительные условия, которые в рассматриваемых нами примерах будут автоматически выполнены.

3.2. Цены бессрочных американских опционов в моделях типа Мертона

Пусть динамика БШ-рынка по мартингальной мере P задается уравнениями

$$dB(\theta) = rB(\theta)d\theta, \quad B(t) = 1,$$

$$dS(\theta) = S(\theta-)\left[rd\theta + \sigma dw(\theta) + \int_{R_+}(z-1)\mu(d\theta, dz)\right], \quad S(t) = s, \tag{3.19}$$

где $\nu(d\theta, dz)$ – пуассоновская случайная мера на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с параметром $\mathbf{E}\,\nu(d\theta, dz) = \lambda d\theta\pi(dz)$ и $\mu(d\theta, dz) = \nu(d\theta, dz) - \lambda d\theta\pi(dz)$. Решение этого уравнения имеет вид

$$S(\theta) = s\exp\{[r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\kappa](\theta - t) + \sigma[w(\theta) - w(t)]$$
$$+ \int_t^\theta\int_{-1}^\infty \ln[1+z]\nu(ds,\, dz)\}, \tag{3.20}$$

где $\kappa = \int_R z\pi(dz)$.

Как вытекает из (3.20), цену $S_s(t)$ рискового базового актива можно представить в виде $S_s(t) = Ke^{Z_x(t)}$, $(s = Ke^x)$, где $Z(t)$ – процесс Леви и $Z_x(t) = x + Z(t)$.

Рассмотрим платежное обязательство $\mathcal{X} = \Phi(S_s(T \wedge \tau)) = K\varphi(Z_x(T \wedge \tau))$ и обозначим $f(x)$ безарбитражную цену бессрочного американского опциона. Тогда, в силу общих результатов теории арбитража,

$$f(x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}} \mathbf{E}\,[e^{-r\tau}\varphi(Z_x(\tau))] = f(h_*, x), \tag{3.21}$$

где h_* – граница оптимального исполнения, $\mathcal{T}$ – множество моментов остановки процесса $Z(t)$ на интервале $[0, \infty)$.

Как и в предыдущем параграфе, наши конструкции будут основаны на соответствующем варианте формулы Дынкина и формулы Фейнмана–Каца для краевых задач, которые можно найти в [20].

Мы будем говорить, что выполнено условие **C 3.1**, если для контрактной функции φ функция $g = (r - M_Z)\varphi$ удовлетворяет условию **C 2.1**, $g \in C_0([\gamma^-, \gamma^+], R)$ и $g(\gamma_-) > 0 > g(\gamma_+)$.

Теорема 3.2. *Пусть $g \in C_0^2([\gamma_1, \gamma_2], R)$, Z – процесс Леви и τ – марковский момент. Тогда справедлива формула Дынкина*

$$\mathbf{E}\,[e^{-r\tau}g(Z_x(\tau))] = g(x) + \mathbf{E}\left[\int_0^\tau e^{-rt}(M_Z - r)g(Z_x(t))\,dt\right].$$

Пусть f – классическое решение задачи Пуассона для интегро-дифференциального уравнения в области $G \in R^d$, тогда формула Дынкина позволяет получить вероятностное представление решения этой задачи.

Теорема 3.3. *Если $f \in C^2(G)$ – решение задачи Пуассона в области G,*

$$(r - M_Z)f(x) = \alpha(x), \quad x \in G,$$
$$f(x) = \beta(x), \quad x \in G^c = R^d \setminus G,$$

то

$$f(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^{\tau_{G^c}} e^{-rt}\alpha(Z_x(t))\,dt\right] + \mathbf{E}\left[e^{-r\tau_{G^c}}\beta(Z_x(\tau_{G^c}))\right].$$

При переходе к рассмотрению бессрочного американского пут опциона соотношение $R_Z^r(r - M_Z)f = f$ нужно будет проверять для менее регулярных функций, что оказывается возможным с учетом свойств характеристических функций рассматриваемых процессов Леви. В частности, если $g = (r - M_Z)f$ является интегрируемой функцией ($g \in L_1$) и $(r - \operatorname{Re}\Psi_Z)\widehat{g} \in L_1$, где $\widehat{g}(\lambda)$ – преобразование Фурье функции g, то $R_Z^r(r - M_Z)f = f$. Действительно,

$$\begin{aligned} R_Z^r f(x) &= \mathbf{E}\left[\int_0^{\infty} e^{-rt} f(Z_x(t))\,dt\right] \\ &= \int_0^{\infty} e^{-rt}(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y - t\Psi_Z(y)}\widehat{f}(\lambda)d\lambda\,dt. \end{aligned}$$

Поскольку $(r - \operatorname{Re}\Psi_Z)\widehat{f} \in L_1$, то, используя теорему Фубини и меняя порядок интегрирования, мы получим $R_Z^r f = (r + \Psi_Z(D))^{-1} f$, где $\Psi_Z(D) = -M_Z$, откуда следует, что $R_Z^r(r - M_Z)f = f$.

Лемма 3.4. *Пусть g удовлетворяет условию* **C 3.1** *и для любого $h \in R$ существует единственное классическое решение задачи*

$$(r - M_Z)f = 0, \quad x > h, \tag{3.22}$$
$$f(x) = g(x), \qquad x \leqslant h \tag{3.23}$$

в классе ограниченных на $[h, \infty)$ функций. Тогда справедливо представление

$$f(x) = \mathbf{E}\,[e^{-r\tau_h^-} g(Z(\tau_h^-))], \tag{3.24}$$

где $\tau_h^- = \inf\{t : Z(t) \in (-\infty, h]\}$.

Доказательство вытекает из теоремы 3.3.

Теорема 3.5. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна, монотонна, меняет знак и удовлетворяет условию* **C 3.1**. *Тогда соотношение* (3.21) *допускает представление*

$$f(x,h) = r^{-1}(\mathcal{E}_Z^- I_{(-\infty,h)} \mathcal{E}_Z^+ g)(x), \tag{3.25}$$

где

$$\mathcal{E}_Z^+ = rR^r_{\overline{Z}}, \quad \mathcal{E}_Z^- = rR^r_{\underline{Z}}.$$

Доказательство. Обозначим $\tau^* = \tau_h^-$ момент оптимальной остановки в (3.21), где τ_h^- – момент первого выхода $Z_x(t)$ из области $\{y : y > h\}$. Используя свойства условных средних и строго марковское свойство процесса $Z_x(t)$, представим функцию $f(x)$, заданную соотношением (3.21), в виде

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{E}_x \left[e^{-r\tau^*} (R^r_Z g)(Z(\tau^*)) \right] \\ &= \mathbf{E}_x \left[e^{-r\tau_h^-} \mathbf{E}_{Z(\tau_h^-)} \left[\int_0^\infty e^{-rt} g(Z(t))\,dt \right] \right] \\ &= \mathbf{E}_x \left[\int_{\tau_h^-}^\infty e^{-rt} g(Z(t))\,dt \right] = f_\infty(x) - f_h(x), \end{aligned} \tag{3.26}$$

где

$$\begin{aligned} f_\infty(x) &= \mathbf{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-rt} g(Z(t))\,dt \right] = R^r_Z g(x), \\ f_h(x) &= \mathbf{E}_x \left[\int_0^{\tau_h^-} e^{-rt} g(Z(t))\,dt \right]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Как вытекает из леммы 3.4, $f_\infty(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(r - M_Z)f = g. \tag{3.28}$$

Напомним, что

$$R^r_Z g(x) = rR^r_{\bar{Z}} R^r_{\underline{Z}} g(x) = rR^r_{\underline{Z}} R^r_{\bar{Z}} g(x) \tag{3.29}$$

и, используя соотношение $R^r_Z g = \varphi$, перепишем (3.26) в виде

$$\begin{aligned} f(h_*, x) &= rR^r_{\underline{Z}} R^r_{\bar{Z}} g(x) - rR^r_{\underline{Z}} I_{[h_*,\infty)} R^r_{\bar{Z}} g(x) \\ &= R^r_Z g(x) - f_{h^*}(x) = \varphi(x) - f_{h_*}(x), \end{aligned} \tag{3.30}$$

где $f_{h_*}(x) = rR^r_{\underline{Z}} I_{[h_*,\infty)} R^r_{\bar{Z}} g(x)$. Для $x \leqslant h_*$

$$f_{h_*}(x) = r\mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt} (I_{[h_*,\infty)} R^r_{\bar{Z}} g)(\underline{Z}(t))\, dt | \underline{Z}(0) = x\right] = 0,$$

откуда следует, что $f(h_*, y) = \varphi(y)$ при $y \leqslant h_* = Z_x(\tau^*)$.

Рассмотрим функцию $v(x) = R^r_{\bar{Z}} g(x)$. Она непрерывна, монотонна и меняет знак, поскольку g обладает этим свойством. Таким образом, существует единственное решение h_* уравнения $v(x) = 0$. При этом функция $I_{(-\infty,h]} v$ непрерывна тогда и только тогда, когда $h = h_*$. При таком выборе h функция $I_{(-\infty,h]} v$ непрерывна и неотрицательна. Следовательно, функция $f(h_*, x)$ также непрерывна и

$$\begin{aligned} f(h_*, x) &= rR^r_{\underline{Z}} I_{(-\infty,h_*]} v(x) \\ &= r\mathbf{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt} (I_{(-\infty,h_*]} v)(x + \underline{Z}(t))\, dt\right] \geqslant 0, \quad \forall x. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Поскольку v не возрастает, а функции $I_{(-\infty,h_*]} v$ и $f(h_*, x)$ в (3.26) неотрицательны, то из (3.27) следует, что $f(h_*, x) \geqslant f(x)$ для всех x. Следовательно, $f(h_*, x)$ удовлетворяет (3.21). □

Пример. Пусть $\varphi(x) = 1 - e^{\alpha x}$, $\alpha > 0$, и $Z_x(t) = x + Z(t)$, где $Z(t)$ – процесс Леви с мерой π_Z вида (3.11) и характеристической функцией Ψ_Z вида (3.12). Тогда оптимальная граница остановки h^* задается уравнением

$$e^{\alpha h_*} = \phi^+_q(\alpha),$$

где ϕ_q^+ имеет вид (3.13), и цена $f^*(x)$ опциона равна

$$\begin{aligned} f_*(x) &= \sum_{k=1,2} a_k^- e^{\beta_k^-(x-h_*)} - \frac{e^{\alpha h_*}}{\phi_q^-(\alpha)} \sum_{k=1,2} \frac{a_k^- \beta_k^-}{\beta_k^- - \alpha} e^{\beta_k^-(x-h_*)} \\ &= \sum_{k=1,2} \frac{a_k^- \alpha}{\alpha - \beta_k^-} e^{\beta_k^-(x-h_*)}, \quad x > h_*. \end{aligned}$$

3.3. Американский пут опцион с конечным сроком исполнения

Для определения цены американского опциона с конечным сроком исполнения в модели БШМ мы воспользуемся методом рандомизации Карра, описанным выше.

Пусть $\Delta = t_{k+1} - t_k$, $q = \Delta^{-1} + r$, $k = 0, \ldots, n-1$. Границу оптимального исполнения h^k на интервале (t_k, t_{k+1}) и аппроксимацию f^k цены опциона $f(t_k, x)$ определим, используя метод обратной индукции. Для $k = n$ зададим $f^n(x) = \varphi(x) = R_Z^r g(x)$, вычислим g и

$$\widetilde{g} = (q - M_Z)\varphi = g + \Delta^{-1} R_Z^r g.$$

Для $k = n-1, n-2, \ldots$, определим оптимальный момент остановки τ^k так, чтобы максимизировать функцию

$$f^k(x) = \mathbf{E}\left[\int_0^{\tau^k} e^{-[\Delta^{-1}+r]t} \Delta^{-1} f^{k+1}(Z_x(t))dt\right] + \mathbf{E}\left[e^{-[\Delta^{-1}+r]\tau^k} \varphi(Z_x(\tau^k))\right]. \tag{3.32}$$

Как и выше, τ^k – это момент первого попадания процесса $Z_x(t)$ в интервал $(-\infty, h^k]$. Применяя теорему 3.4 (т.е. формулу Фейнмана–Каца для краевых задач), покажем, что f^k вида (3.32) представляет собой единственное решение задачи

$$(q - M_Z) f^k(x) = \Delta^{-1} f^{k+1}(x), \quad x > h^k, \tag{3.33}$$

$$f^k(x) = \varphi(x) = R_Z^r g(x), \quad x \leqslant h^k. \tag{3.34}$$

Заметим, что соотношения (3.33), (3.34) представляют собой дискретизацию по времени исходной задачи.

Шаги обратной индукции зададим следующим образом.

1. Зададим $f^n(x) = \varphi(x)$, $q = \Delta^{-1} + r$, вычислим функцию $g(x)$, удовлетворяющую соотношению $\varphi = R^r_Z g$, и функцию

$$\widetilde{g} = (q - M_Z)\varphi = (\Delta^{-1} + r - M_Z)R^r_Z g = g + \Delta^{-1} R^r_Z g. \tag{3.35}$$

2. Для $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ вычислим

$$m^k = f^{k+1} - \Delta\widetilde{g}, \quad g^k = R^q_{\bar{Z}} m^k,$$

зададим h^k как корень уравнения $g^k(x) = 0$ и вычислим

$$f^k = \Delta^{-1} q R^q_{\underline{Z}} I_{[h^k,\infty)} R^q_{\bar{Z}} m^k + R^r_Z g.$$

Положим $\kappa^k = f^k - \Delta^{-1} R^q_Z f^{k+1}$. Из (3.33), (3.34) с учетом соотношения $(q - M_Z)R^q_Z f = f$ мы получим, что κ^k удовлетворяет уравнению

$$(q - M_Z)\kappa^k(x) = 0, \qquad \text{если} \quad x > h^k, \tag{3.36}$$

$$\kappa^k(x) = \varphi - \Delta^{-1} R^q_Z f^{k+1}(x), \quad \text{если} \quad x \leqslant h^k. \tag{3.37}$$

Из теоремы 3.3 следует, что функция

$$\kappa^k = \mathbf{E}\,[e^{-q\tau^+_{h^k}} R^q_Z((q - M_Z)\varphi - \Delta^{-1} f^{k+1})(Z(\tau_{h^k}))]$$

удовлетворяет (3.36), (3.37) и ограничена на $[h^k, \infty)$.

Наконец, из соотношений $qR^q_{\bar{Z}} R^q_{\underline{Z}} = R^q_Z$, $\widetilde{f} = (q - M_Z)\varphi$ и $R^q_Z \widetilde{f} = R^q_Z (q - M_Z) R^r_Z g = R^r_Z g$ следует, что

$$\begin{aligned} f^k &= qR^q_{\underline{Z}} I_{(-\infty,h]} R^q_{\bar{Z}}(\widetilde{f} - \Delta^{-1} f^{k+1}) + \Delta^{-1} R^q_Z f^{k+1} \\ &= qR^q_{\underline{Z}} I_{(h,\infty)} R^q_{\bar{Z}}(\Delta^{-1} f^{k+1} - \widetilde{f}) + qR^q_Z(\widetilde{f} - \Delta^{-1} f^{k+1}) + \Delta^{-1} R^q_Z f^{k+1} \\ &= qR^q_{\underline{Z}} I_{(h,\infty)} R^q_{\bar{Z}}(\Delta^{-1} f^{k+1} - \widetilde{f}) + R^r_Z g. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $m^k = f^{k+1} - \Delta\widetilde{f}$. При $k = n-1, f^{k+1} = f^n = R^r_Z g$, из соотношений $\widetilde{f} = (I + \Delta^{-1})R^r_Z \varphi$ и $\Delta(q - r) = 1$ следует, что

$$m^{k-1} = R^r_Z g - \Delta\widetilde{f} = [R^r_Z g]_+ - R^r_Z g - \Delta\varphi = (R^r_Z \varphi)^- - \Delta\varphi,$$

где $(R^r_Z\varphi)^- = \min(R^r_Z\varphi, 0)$. Таким образом, функция m^k обладает следующими свойствами: m^k – неубывающая непрерывная функция, если φ непрерывна,

$$m^k(-\infty) < 0, \quad m^k(\infty) > 0, \quad \text{и} \quad |m^k(x)| \leqslant C(e^{\gamma_+ x} + e^{\gamma_- x}).$$

Пусть $g^k = R^r_{\underline{Z}} m^k$. Из свойств m^k и Z вытекает, что функция g^k непрерывна, не возрастает и лишь один раз изменяет знак. Следовательно, уравнение $g^k(x) = 0$ имеет единственный корень, который мы обозначим h^k.

Сформулируем окончательный результат, используя операторы $\mathcal{E}^-_q = qR^q_{\underline{Z}}$ и $\mathcal{E}^+_q = qR^q_{\bar{Z}}$.

Теорема 3.6. *Пусть функция $g = (q - M_Я)\varphi$ задана п.в., не возрастает, $g(-\infty) > 0$ и выполняется условие* **С 3.1**. *Тогда для $k = n-1, n-2, \ldots, 0$*

1) если $\widetilde{g} = g + \Delta^{-1} r^{-1} \mathcal{E}_Z g$, $m^k = f^{k+1} - \Delta \widetilde{g}$, $g^k = q^{-1} \mathcal{E}_q^+ m^k$, то g^k – монотонная непрерывная функция, меняющая знак, и $x = h_k$ – единственный корень уравнения $g^k(x) = 0$;

2) τ_{h_k} – оптимальный момент остановки;

3) последовательность $f^k = \Delta^{-1} q^{-1} \mathcal{E}_q^- I_{[h,\infty)} \mathcal{E}_q^+ m^k + r^{-1} \mathcal{E}_r g$ монотонна и ограничена при $x > h$ и обращается в нуль при $x \leqslant h$.

4. Сходимость последовательных приближений

В заключение обсудим сходимость последовательных приближений цены американского опциона в модели БШ, построенных выше с помощью метода рандомизации Карра.

Процедура построения последовательных приближений цены американского опциона, описанная в параграфе 2, допускает еще одну интерпретацию. Пусть T_k – независимые экспоненциально распределенные случайные величины со средним $\mathbf{E}\, T_k = \frac{T}{n}$. Случайная величина $\tau_n = \sum\limits_{k=0}^{n} T_k$ имеет гамма-распределение $\Gamma(n, \frac{n}{T})$ и τ_n сходится по распределению к T, поскольку $\mathbf{E}\, \tau_n = T$, $D(\tau_n) = \mathbf{E}\, [\tau_n - T]^2 = \frac{T}{n}$.

При этом величина

$$f^n(x) = \mathbf{E}\, [e^{-r(\tau^* \wedge \tau_n)} \phi(Y_x(\tau^* \wedge \tau_n))]$$

при больших n используется как аппроксимация для цены американского пут опциона.

Поскольку $\tau^n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$, то марковское свойство позволяет вычислить f^n с помощью следующей рекурсивной процедуры

$$\begin{aligned} f^0(x) &= \phi(x), \\ f^k(x) &= \mathbf{E}\, [e^{-r\tau_k} \phi(Y_x(\tau_k)) I_{\tau_k \leqslant T^k}] \\ &\quad + \mathbf{E}\, [e^{-rT_k} f^{k-1}(Y_x(T_k)) I_{\tau_k > T^k}], \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

где моменты остановки τ_k - это моменты оптимального исполнения американских канадских опционов со случайными финальными моментами T_k и финальными выплатами f^{k-1}. Отсутствие памяти у экспоненциально распределенных случайных величин означает, что оптимальные уровни исполнения опциона на каждом шаге являются константами, так что оптимальные моменты исполнения τ_k имеют вид

$$\tau_k = \inf\{t \geqslant 0 : Y(t) \leqslant h_k\},$$

где оптимальные постоянные уровни h_k определяют кусочно-постоянную аппроксимацию границы оптимального исполнения $h(t)$ для фиксированного неслучайного T.

Для фиксированного положительного n пусть τ_n – случайная величина с гамма-распределением $\Gamma(n, \frac{n}{T})$, не зависящая от процесса Леви Z. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть Z – процесс Леви и τ_n – последовательность случайных величин, не зависящих от Z, которые сходятся по распределению к некоторому фиксированному значению T при $n \to \infty$. Тогда последовательность процессов $Y(t \wedge \tau_n), t \leqslant T$ слабо сходится к процессу $Z(t)$ при $t \to \infty$.*

Доказательство. Покажем, что все конечномерные распределения процесса $Z(t \wedge \tau_n)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $Z(t)$. Для простоты покажем вначале, что $Z(t \wedge \tau^n)$ сходится по распределению к $Z(t)$ для каждого $t \leqslant T$. Пусть ϕ – ограниченная непрерывная функция $\sup_y |\phi(y)| \leqslant C < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем δ_1 так, чтобы $|\phi(y_1) - \phi(y_2)| < \varepsilon$ для всех $|y_1 - y_2| < \delta_1$. Затем выберем δ_2 так, чтобы $\mathbf{P}\,(|Z(t) - Z(s)| > \delta_1) \leqslant 1 - e^{-\delta_2 \pi(\delta_1, \infty)} < \varepsilon$, если $|t - s| < \delta_2$. Наконец, выберем n настолько большим, чтобы $\mathbf{P}\,(|\tau_n - T| > \delta_2) < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E}\,\phi(Z(t \wedge \tau_n) - \mathbf{E}\,\phi(Z(t \wedge T)| \leqslant \mathbf{E}\left[|\phi(Z(t \wedge \tau_n)) - \phi(Z(t \wedge T))| I_{|\tau_n - T| > \delta_2}\right] \\
&+ \mathbf{E}\left[|\phi(Z(t \wedge \tau_n)) - \phi(Z(t \wedge T))| I_{|\tau_n - T| \leqslant \delta_2} I_{|Z(t \wedge \tau_n) - Z(t \wedge T)| > \delta_1}\right] \\
&+ \mathbf{E}\left[|\phi(Z(t \wedge \tau_n)) - \phi(Z(t \wedge T))| I_{|\tau_n - T| \leqslant \delta_2} I_{|Z(t \wedge \tau_n) - Z(t \wedge T)| \leqslant \delta_1}\right] \\
&\qquad \leqslant C\varepsilon + C\varepsilon + \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Аналогично можно показать и сходимость конечномерных распределений. При этом справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Пусть ϕ – непрерывная убывающая функция. Для любого фиксированного $r > 0$*

$$\sup_\tau \mathbf{E}\,[e^{-r(\tau \wedge \tau_n)} \phi(Z(\tau \wedge \tau_n))] \to \sup_\tau \mathbf{E}\,[e^{-r(\tau \wedge T)} \phi(Z(\tau \wedge T))],$$

(где супремум берется по всем моментам остановки вида $\tau = \tau(Y) = \inf\{t : Y(t) \geqslant h(t)\}$ для некоторой кусочно непрерывной кривой $h(t)$).

Доказательство. Как следует из леммы 4.1, $\mathbf{E}\,[e^{-r\tau_n}\phi(Z(\tau_n))] \to \mathbf{E}\,[e^{-rT}\phi(Z(T))]$. Моменты остановки описанного выше вида являются непрерывными функционалами от процесса $Z(\cdot\wedge\tau_n)$ в топологии слабой сходимости и, следовательно, для каждого фиксированного момента остановки τ, $\mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge\tau_n)}\phi(Z(\tau\wedge\tau_n))] \to \mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge T)}\phi(Z(\tau\wedge T))]$. При этом моменты остановки $\tau\wedge\tau_n$ ограничены величиной $T+\varepsilon$ на множестве $\{|\tau_n - T| \leqslant \varepsilon\}$, вероятность которого близка к 1, так что эта сходимость равномерна по τ, то есть $\sup_\tau |\mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge\tau_n)}\phi(Z(\tau\wedge\tau_n))] - \mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge T)}\phi(Z(\tau\wedge T))]| \to 0$. Требуемый результат теперь вытекает из оценки

$$
\begin{aligned}
&|\sup_\tau \mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge\tau_n)}\phi(Z(\tau\wedge\tau_n))] - \sup_\tau \mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge T)}\phi(Z(\tau\wedge T))]| \\
&\leqslant \sup_\tau |\mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge\tau_n)}\phi(Z(\tau\wedge\tau_n))] - \mathbf{E}\,[e^{-r(\tau\wedge T)}\phi(Z(\tau\wedge T))]|. \quad \square
\end{aligned}
$$

Литература

1. H. P. Jr. McKean, *Appendix: a free boundary problem for the heat equation arising from a problem in mathematical economics.* — Indust. Manage. Rev. **6** (1965), 32–39.
2. Van Moerbeke, P., *On optimal stopping and free boundary problem.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **60** (1976) 101–148.
3. A. Bensoussan, *On the theory of option pricing.* — Acta Appl. Math. **2** (1984), 139–158.
4. I. Karatzas, *On the pricing of the american option.* — Appl. Math. Optim. **17** (1988), 37–60.
5. S. Boyarchenko, S. Levendorskii, *Irreversible Decisions under Uncertainty.* — Studies Economic Theory **27** (2007).
6. R. Cont, P. Tankov, *Financial Modelling With Jump Processes.* Chapman & Hall CRC Press (2003).
7. F. Black, M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities.* — J. Political Economy **81** (1973), 637–654.
8. Т. Бьорк, *Теория арбитража в непрерывном времени.* МЦНМО, М. (2010).
9. Yue-Kuen Kwok, *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Springer Finance 2nd ed. (2008).
10. W. H. Fleming, H. M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions.* Springer (2006).
11. A. Friedman, *Variational Principles and Free Boundary Problems.* Wiley, N.Y. (1982).

12. P. Carr, *Randomization and the American put.* — Review Financial Stud. **11** (1998), 597–626.
13. P. Carr, D. Faguet, *Valuing finite-lived options as perpetual.* Working paper, Cornell University (1996).
14. R. C. Merton, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous.* — J. Financial Econ. **3** (1976), 125–144.
15. S. Boyarchenko, S. Levendorskii, *American Options: the EPV pricing model.* — Ann. Finance **1** (2005), 267–292.
16. S. Boyarchenko, S. Levendorskii, *American options in Regime-Switching models.* — SIAM J. Control Optimiz. **48**, No. 3 (2009) 1353–1376.
17. S. I. Boyarchenko, S. Z. Levendorski, *Perpetual american options under Lévy processes.* — SIAM J. Control Optimiz. **40**, No. 6 (2002), 1663–1696.
18. S. Levendorski, *Pricing of the American put under Lévy processes.* — Intern. J. Theoret. Appl. Finance **7**, No. 3 (2004) 303–336.
19. Б. Оксендаль, *Стохастические дифференциальные уравнения.* Мир (2003).
20. K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions.* Cambridge, Cambridge University Press (1999).
21. А. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению.* С.Пб. (2000).
22. S. Boyarchenko, S. Levendorski, *Non-Gaussian Merton–Black–Scholes Theory Singapore.* World Scientific (2002).

Belopolskaya Ya. I., Romadanova M. M. Probabilistic approach to a free boundary problem and American option procing.

In this paper we discuss a probabilistic approach to the construction of a solution of a free boundary problem for parabolic and integro-differential equations which is associated with an optimization problem for a stochastic equation with diffusion and jumps. The results are applied to calculation of American option prices in Black–Scholes and Merton models.

С.-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
190005, Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская 4
E-mail: yanabeus@yahoo.com, yana@yb1569.spb.edu

Поступило 3 ноября 2010 г.