Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

Н. В. Алексеев

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ НАВЕРНОЕ СПЕКТРАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ СЛУЧАЙНОЙ МАТРИЦЫ К РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ФУССА–КАТАЛАНА

1. Введение

Пусть x_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ – независимые случайные величины, такие что $\mathbf{E}\, x_{ij} = 0$, $\mathbf{E}\, x_{ij}^2 = 1$ и $\mathbf{E}\,|x_{ij}^p| \leqslant C_p < \infty$ при любом натуральном p. Рассмотрим квадратную матрицу $\mathbf{X}$ порядка n с элементами $X_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{n}}$. Нас будет интересовать асимптотика распределения сингулярных чисел степеней матрицы $\mathbf{X}$, то есть собственных чисел матриц $\mathbf{W}_m = \mathbf{X}^m \mathbf{X}^{Tm}$ при $n \to \infty$ (m – натуральный параметр).

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа случайной матрицы $\mathbf{W}_m$, и $\mathcal{P}_m$ – эмпирическое спектральное распределение (мера), то есть равномерное распределение на множестве собственных чисел. В статье [1] было доказано, что $\mathbf{E}\,\mathcal{P}_m$ – математическое ожидание спектрального распределения матрицы $\mathbf{W}_m$ – сходится к так называемому распределению Фусса–Каталана (с параметром m). Распределение Фусса–Каталана единственным образом определяется своими моментами – числами Фусса–Каталана $M_p = \frac{1}{mp+1}\binom{mp+p}{p}$. В данной работе мы докажем, что $\mathcal{P}_m$ сходится к распределению Фусса–Каталана почти наверное.

Теорема 1.1. *Эмпирическое спектральное распределение $\mathcal{P}_m$ матрицы $\mathbf{W}_m = \mathbf{X}^m \mathbf{X}^{Tm}$ сходится почти наверное к распределению Фусса–Каталана с параметром m.*

Ключевые слова: случайные матрицы, асимптотическое спектральное распределение, числа Фусса–Каталана.

Работа частично поддержана грантами "'Ведущие научные школы"' НШ-4472.2010.1 , ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" N 2010-1.1-111-128-033, грантом Правительства РФ для привлечения ведущих ученых “Вероятность и Анализ в Современной Математической Физике” под руководством проф. С.К. Смирнова и SFB 701 “Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics”.

Замечание 1.2. Заключение теоремы 1.1 верно и при более слабых условиях. А именно, достаточно, чтобы четвертый абсолютный момент величин x_{ij} был равномерно ограничен, $\mathbf{E}\,|x_{ij}|^4 \leqslant B$, и выполнялось условие

$$\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathbf{E}\,|x_{ij}|^4 \mathbb{I}\{|x_{ij}| > \alpha\sqrt{n}\} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство, как и в [1], основано на методе моментов. Так как проблема моментов для чисел M_p имеет единственное решение, то из сходимости почти наверное моментов распределения $\mathcal{P}_m$ к числам Фусса–Каталана следует сходимость почти наверное мер. Обозначим $M_p^{(n)}$ p-ый момент меры $\mathcal{P}_m$. Покажем, что $\mathbf{E}\,M_p^{(n)} \to M_p$ при $n \to \infty$, и $\mathbf{D}\,M_p^{(n)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|M_p^{(n)} - M_p| > \varepsilon\}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $M_p^{(n)} \to M_p$ почти наверное (см. [2], с. 134, теорема 2).

Таким образом, доказательство теоремы 1.1 сводится к доказательству двух лемм.

Лемма 1.3. *Математическое ожидание момента эмпирического спектрального распределения $M_p^{(n)}$ сходится при $n \to \infty$ к числу Фусса–Каталана M_p.*

Лемма 1.4. *Дисперсия момента эмпирического спектрального распределения $M_p^{(n)}$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ при $n \to \infty$.*

В разделе 2 приведено доказательство леммы 1.3, с небольшими изменениями повторяющее доказательство из [1]. В разделе 3 приведено доказательство леммы 1.4.

Рассмотрим p-ый момент $M_p^{(n)}$ спектральной меры $\mathcal{P}_m$

$$M_p^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \mathbf{W}_m^p = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(\mathbf{X}^m \mathbf{X}^{Tm})^p. \tag{1.2}$$

Замечание 1.5. В статье Синая и Сошникова [3] был рассмотрен случай эрмитовых случайных матриц. При некоторых ограничениях на элементы матрицы были найдены пределы не только для математического ожидания и дисперсии следа, но и для всех его моментов. Было показано, что след имеет в пределе гауссово распредление. Для неэрмитовых матриц вопрос о предельном распределении следа открыт.

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\mathbf{X}^m\mathbf{X}^{Tm})^p &= \sum_{i_j=1}^{n}\prod_{j\in J_+}X_{i_ji_{j+1}}\prod_{j\in J_-}X_{i_{j+1}i_j}\\ &= n^{-mp}\sum_{i_j=1}^{n}\prod_{j\in J_+}x_{i_ji_{j+1}}\prod_{j\in J_-}x_{i_{j+1}i_j},\end{aligned}\tag{1.2}$$

где сумма берется по всевозможным наборам $\{i_j\}_{j=1}^{2mp-1}\in\{1,2,\dots,n\}$, $i_{2mp}=i_0$, а множества J_+ и J_- определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}J_+ &= \{j=0,1,2,\dots,2mp|\, j \pmod{2m} < m\},\\ J_- &= \{j=0,1,2,\dots,2mp|\, j \pmod{2m} \geqslant m\}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Введем обозначения $\mathbf{i}=(i_0,i_1,\dots,i_{2mp})$ и

$$\prod_{j=0}^{2mp}x_{\mathbf{i}} := \prod_{j\in J_+}x_{i_ji_{j+1}}\prod_{j\in J_-}x_{i_{j+1}i_j}.$$

Выразим из (1.2) математическое ожидание и дисперсию p-го момента спектрального распределения

$$\mathbf{E}\,M_p^{(n)} = n^{-mp-1}\sum_{i_j=1}^{n}\mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp}x_{\mathbf{i}},\tag{1.4}$$

$$\mathbf{D}\,M_p^{(n)} = n^{-2mp-2}\sum_{i_j,k_j=1}^{n}\left(\mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp}x_{\mathbf{i}}\prod_{j=0}^{2mp}x_{\mathbf{k}}-\mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp}x_{\mathbf{i}}\mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp}x_{\mathbf{k}}\right).\tag{1.5}$$

2. Математическое ожидание $M_p^{(n)}$

Оценим математическое ожидание (1.4). Для этого поставим в соответствие каждому набору индексов $\mathbf{i}=(i_0,i_1,\dots,i_{2mp})$ граф $G_{\mathbf{i}}$. Вершины этого графа – подмножества отрезка натуральных чисел $\{0,1,\dots,2mp\}$, числа j и l принадлежат одной вершине если $i_j=i_l$.

Если для некоторого j выполнено $j \in V_1$ и $j+1 \in V_2$, то вершины V_1 и V_2 соединены ребром. (Для некоторых целей нужно будет ввести направления на ребрах, мы сделаем это позже). Граф $G_{\mathbf{i}}$ связен, у него могут быть петли и кратные ребра. Будем обозначать через v количество вершин и через e количество ребер (без учета кратности) в графе $G_{\mathbf{i}}$. Множество всех графов, которые можно получить таким образом, обозначим $\mathcal{G}_{m,p}$.

Пусть, например, $m = 2$, $p = 2$ и $\mathbf{i} = (2, 4, n-3, 4, 12, 4, 45, 4, 2)$ (число n велико). Тогда $i_0 = i_8$, $i_1 = i_3 = i_5 = i_7$, другие индексы различны и граф $G_{\mathbf{i}}$ имеет следующий вид (Рис. 1). В данном случае $v = 5$, $e = 4$ и все ребра имеют кратность 2.

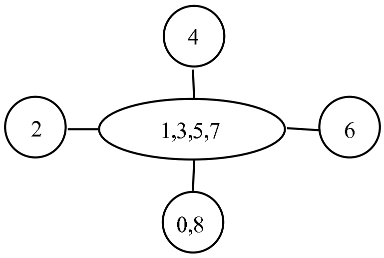

Рис. 1. Граф $G_{\mathbf{i}}$.

Ясно, что разным наборам $\mathbf{i}$ может соответствовать один и тот же граф $G_{\mathbf{i}}$ (например, граф на Рис. 1 соответствует также набору $\mathbf{i} = (1, 2, 3, 2, 4, 2, 5, 2, 1)$).

Перепишем математическое ожидание (1.4) в терминах графов

$$n^{-mp-1} \sum_{i_j=1}^{n} \mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}} = \sum_{G \in \mathcal{G}_{mp}} n^{-mp-1} \sum_{\mathbf{i}: G_{\mathbf{i}} = G} \mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}}. \tag{2.1}$$

Вычислим эту сумму. Определим те графы, которые вносят асимтотически нулевой вклад в (2.1). Заметим, что если хоть одно ребро графа G имеет кратность 1, то соответствующее графу G слагаемое равно 0. Действительно, пусть вершины V_1 и V_2 соединены ребром кратности 1. Тогда существует единственное l такое, что $l \in V_1$, $l+1 \in V_2$, и, следовательно, для любого j отличного от l верно $\{i_j, i_{j+1}\} \neq \{i_l, i_{l+1}\}$. Не умаляя общности, будем считать $l \in J_+$. Тогда сомножитель $x_{i_l i_{l+1}}$ встречается в произведении $\mathbf{E} \prod x_{\mathbf{i}}$ ровно один раз и

$$n^{-mp-1} \sum_{\mathbf{i}:G_{\mathbf{i}}=G} \mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}}$$

$$= n^{-mp-1} \sum_{\mathbf{i}:G_{\mathbf{i}}=G} \mathbf{E}\, x_{i_l i_{l+1}} \mathbf{E} \prod_{j\in J_+}^{j\neq l} x_{i_j i_{j+1}} \prod_{j\in J_-} x_{i_{j+1} i_j} = 0,$$

так как $\mathbf{E}\, x_{i_l i_{l+1}} = 0$ и величины x_{ij} независимы. Пусть все ребра графа имеют кратность не менее 2. Так как количество ребер с учетом кратности равно $2mp$ (по построению ребро проводится между любыми двумя последовательными числами) и кратность каждого ребра не менее 2, то для количества ребер без учета кратности e выполнено неравество $e \leqslant mp$.

Рассмотрим теперь графы, количество вершин v в которых мало. Значение i_j, где $j \in V_1$, можно выбрать n различными способами, значение i_j, где $j \in V_2$, можно выбрать $n-1$ различными способами и так далее. Следовательно, количество слагаемых в сумме $\sum\limits_{\mathbf{i}:G_{\mathbf{i}}=G}$ равно $n(n-1)\cdots(n-v+1) \sim n^v$. Каждое слагаемое в такой сумме равномерно ограничено по n, так как $\mathbf{E}\,|x_{ij}^p| \leqslant C_p < \infty$. Следовательно, слагаемое, соответствующее графу G, по модулю не превосходит Cn^{v-mp-1}. Значит, если количество вершин v в графе G меньше $mp+1$, то соответствующее слагаемое асимптотически равно 0.

Итак, для того, чтобы слагаемое, соответствующее графу G, было асимптотически ненулевым, необходимо, чтобы выполнялись неравенства $v \geqslant mp+1$ и $e \leqslant mp$ (напомним, что v и e обозначают соотвественно число вершин и число ребер в графе G). Назовем такой граф *хорошим*, и множество всех хороших графов будем обозначать $\mathcal{G}_{m,p}^{good}$. В силу связности графа G имеет место неравенство $e \geqslant v-1$. Таким образом

$$mp \leqslant v-1 \leqslant e \leqslant mp. \tag{2.2}$$

Все промежуточные неравенства обращаются в равенства. Следовательно, у хорошего графа G количество ребер e равно mp и каждое ребро имеет кратность 2, количество вершин v равно $mp+1$, и этот граф является деревом.

Введем направления на ребрах графа G. Пусть $j \in V_1$, $j+1 \in V_2$. Тогда если $j \in J_+$, то ребро направлено от V_1 к V_2, а если $j \in J_-$, то ребро направлено от V_2 к V_1. Ребра являются кратными только если их направления совпадают. В хорошем графе все ребра имеют кратность 2 с учетом направлений. Тот факт, что каждое ребро имеет кратность 2, означает, что

$$\mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}} = \prod_{E(G)} \mathbf{E}\, x^2_{i_j i_{j+1}} = 1,$$

где $\prod\limits_{E(G)}$ обозначает, что произведение берется по всевозможным парам $(j, j+1)$ – ребрам графа G.

Таким образом, вклад каждого хорошего графа в (2.1) равен

$$n^{v-mp-1}\prod_{E(G)} \mathbf{E}\, x^2_{i_j i_{j+1}} = 1$$

и математическое ожидание момента $\mathbf{E}\, M_p^{(n)}$ можно выразить из (2.1) как

$$\mathbf{E}\, M_p^{(n)} = \sum_{G\in\mathcal{G}_{m,p}} n^{-mp-1}\sum_{\mathbf{i}:G_{\mathbf{i}}=G} \mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}} \sim \sum_{G\in\mathcal{G}^{good}_{m,p}} 1 = \#\mathcal{G}^{good}_{m,p}. \qquad (2.3)$$

Количество всех хороших графов равно числу Фусса–Каталана M_p. (см. [1]). Таким образом, лемма 1.3 доказана.

3. Дисперсия $M_p^{(n)}$

Докажем теперь лемму 1.4. Покажем, что $n^2\mathbf{D}\, M_p^{(n)}$ не превосходит некоторой константы C, не зависящей от n. Перепишем (1.5)

$$n^2\mathbf{D}\, M_p^{(n)} = n^{-2mp}\sum_{i_j,k_j=1}^{n}\left(\mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}}\prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{k}} - \mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}}\mathbf{E}\prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{k}}\right), \qquad (3.1)$$

где $i_{2mp} = i_0$ и $k_{2mp} = k_0$. Поставим в соответствие каждой паре $\mathbf{i}, \mathbf{k}$ граф $G^{(2)}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}$. Этот граф "склеен" из $G_{\mathbf{i}}$ и $G_{\mathbf{k}}$, то есть его вершины – это подмножества $\{0, 1, \ldots, 2mp\} \cup \{0^*, 1^*, \ldots, 2mp^*\}$. Элементы j и l принадлежат одной вершине, если $i_j = i_l$. Элементы j^* и l^* принадлежат одной вершине, если $k_j = k_l$. Наконец, j и l^* принадлежат одной вершине, если $i_j = k_l$. Вершины V_1 и V_2 соединены ребром, если для некоторого j выполнено $j \in V_1$, $j+1 \in V_2$ или $j^* \in V_1$, $(j+1)^* \in V_2$. Граф $G^{(2)}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}$ имеет не более двух компонент связности. Количество вершин графа будем обозначать v, количество ребер без учета кратности будем обозначать e. Множество всех графов, которые можно получить таким образом, обозначим $\mathcal{G}^2_{m,p}$. Перепишем (3.1) в терминах графов

$$n^2 \mathbf{D}\, M_p^{(n)} = \sum_{G \in \mathcal{G}^2_{m,p}} n^{-2mp} \sum_{\mathbf{i},\mathbf{k}: G^{(2)}_{\mathbf{i},\mathbf{k}} = G} \left(\mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{k}} - \mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}} \mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{k}} \right) \tag{3.2}$$

Определим, какими свойствами должен обладать граф, чтобы вносить в (3.2) асимптотически ненулевой вклад.

Во-первых, если граф $G^{(2)}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}$ несвязен, то по независимости

$$\mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{k}} = \mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{i}} \mathbf{E} \prod_{j=0}^{2mp} x_{\mathbf{k}}.$$

Для того, чтобы это не было выполнено, необходимо, чтобы существовало “общее ребро” $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$, то есть такие j, l, что $j, l^* \in V_1$ и $j+1, (l+1)^* \in V_2$ (или $j+1, (l-1)^* \in V_2$).

Во-вторых, количество вершин v должно быть не менее $2mp$. Количество слагаемых в сумме $\sum\limits_{\mathbf{i},\mathbf{k}: G^{(2)}_{\mathbf{i},\mathbf{k}} = G}$ имеет порядок n^v, каждое слагаемое в этой сумме ограничено. Условие $n^{v-2mp} \not\to 0$ влечет за собой $v \geqslant 2mp$.

В третьих, все ребра должны быть кратности не менее 2. Так как количество ребер с учетом кратности $4mp$, то $e \leqslant 2mp$.

Рассмотрим всевозможные графы, у которых все ребра имеют кратность ровно 2, и оценим вклад таких графов в (3.2). Заметим, что такой граф $G^{(2)}_{\mathbf{i},\mathbf{k}}$ обязательно содержит цикл. Действительно, пусть концы $\mathcal{E}_1$ – “общего ребра” $\mathbf{i}$ и $\mathbf{k}$ – вершины V_1 и V_2. Не умаляя общности, мы можем считать $0, l^* \in V_1$ и $1, (l+1)^* \in V_2$. Тогда существует 2 различных пути из V_2 в V_1: первый – ребро $\mathcal{E}_1$, и второй – по ребрам $(1,2)$, $(2,3), \ldots, (2mp-1, 2mp)$, ни одно из которых не совпадает с $\mathcal{E}_1$. Так как $i_{2mp} = i_0$, то $2mp \in V_1$. По формуле Эйлера, если в связном графе есть хотя бы один цикл, то $e \geqslant v$. Следовательно, в таких графах $v = e = 2mp$, и вклад, который они вносят в (3.2), не превосходит константы C_1, не зависящей от n.

Если же некоторые ребра в графе имеют кратность больше 2, то $e \leqslant 2mp - 1$. По связности $e \geqslant v - 1$. Следовательно, $v \leqslant 2mp$, и вклад таких графов также ограничен некоторой константой, не зависящей от n.

Таким образом, $\mathbf{D}\, M_p^{(n)} = O(\frac{1}{n^2})$. Лемма 1.4 доказана. Теорема 1.1 доказана.

Литература

1. N. Alexeev, F. Götze, A. Tikhomirov, *Asymptotic distribution of singular values of powers of random matrices.* — Lithuan. Math. J., **50**, No. 2 (2010), 121–132.
2. А. А. Боровков, *Теория вероятностей*, Наука (1986).
3. Ya. G. Sinai, A. B. Soshnikov, *Central limit theorem for traces of large random symmetric matrices with independent matrix elements*, Boletim. Soc. Brasil. Mat. (N.S.), Vol. 29 , no. 1, (1998) pp. 1–24.

Alexeev N. V. On almost sure convergence of spectral distribution of power of random matrices to Fuss–Catalan distribution.

In the paper we considered a power of a non-Hermitian random matrix and proved that the empirical distribution of its singular values converges to Fuss–Catalan distribution almost surely.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетеский пр., д. 28, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: nikita.v.alexeev@gmail.com

Поступило 8 ноября 2010 г.