Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 384, 2010 г.

К. А. Аксёнова

О СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕЛЕТРАФИКА С ТЯЖЁЛЫМИ ХВОСТАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Введение в проблему и описание модели

В последнее время стало актуальным математическое моделирование работы компьютерных систем на базе высокоскоростного соединения, таких как интернет. Исследуются математические модели, описывающие изменение во времени нагрузок на системы такого типа. Изучаемая в данной работе модель интересна тем, что в зависимости от моментных характеристик системы возникают разные предельные процессы: броуновское движение, дробное броуновское движение, устойчивые процессы с однородными независимыми приращениями, а также две разновидности так называемых телеком-процессов.

Целый ряд математиков [8, 9] рассматривали модели системы обслуживания на основе случайных мер Пуассона. В их числе И. Кай и М. Такку [6], подход которых лежит в основе данной работы. Известны также многомерные обобщения подобных моделей [1–5, 7], интересные с точки зрения их приложения к задачам медицины.

Рассмотрим формальную модель узла обслуживания телетрафика на основе случайных мер Пуассона, описанную в статье [6]. Она выглядит следующим образом.

Положим $\mathcal{R} = \{(s,u,r)\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Каждая точка (s,u,r) пространства $\mathcal{R}$ имеет смысл процесса обслуживания, который начинается в момент s, длится u единиц времени и имеет интенсивность обслуживания r, при этом считаем u и r независимыми величинами. В узле могут одновременно выполняться несколько процессов обслуживания (без ограничения на суммарную интенсивность, т.е. нагрузку узла).

Исходными параметрами для описания работы узла являются

- $\lambda > 0$ – интенсивность потока процессов обслуживания;

Ключевые слова: устойчивый процесс, модель системы обслуживания на основе случайной меры Пуассона, предельные теоремы.

- $F_U(du)$ – распределение длительности обслуживания;
- $F_R(dr)$ – распределение интенсивности обслуживания.

Определим на $\mathcal{R}$ меру интенсивности

$$\mu(ds, du, dr) = \lambda\, ds\, F_U(du)\, F_R(dr).$$

Пусть N – соответствующая ей случайная мера Пуассона. Реализации меры N (случайные множества троек) можно рассматривать как возможные траектории работы узла, а все характеристики этой работы выражаются в виде соответствующих интегралов.

В частности, нас будет интересовать мгновенная нагрузка на узел в момент t:

$$W(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} r\mathbf{1}_{\{s\leqslant t\leqslant s+u\}} dN \tag{1.1}$$

и интегральная (накопленная) нагрузка

$$W^*(t) = \int\limits_0^t W(\tau)d\tau = \int\limits_{\mathcal{R}} r \int\limits_0^t \mathbf{1}_{\{s\leqslant \tau\leqslant s+u\}} d\tau dN \tag{1.2}$$

$$= \int\limits_{\mathcal{R}} r\cdot \Big|[s, s+u]\cap[0,t]\Big| dN := \int\limits_{\mathcal{R}} r\ell_t(s,u)dN. \tag{1.3}$$

Появившееся здесь ядро

$$\ell_t(s,u) := \Big|[s, s+u]\cap[0,t]\Big| \tag{1.4}$$

нам многократно потребуется и в дальнейшем.

В статье [6] делаются некоторые предположения о распределениях F_R и F_U. Всегда предполагается, что математические ожидания конечны:

$$\nu := \mathbf{E}U = \int\limits_0^\infty uF_U(du) < \infty,$$

$$\rho := \mathbf{E}R = \int\limits_0^\infty rF_R(dr) < \infty.$$

На самом деле, в [6] предполагается нечто большее: либо величины имеют конечный второй момент, либо их распределения имеют регулярные хвосты. А именно, либо

$$\mathbf{P}(U > u) \sim \frac{c_U}{\gamma u^\gamma}, \quad u \to \infty, \quad 1 < \gamma < 2,\ c_U > 0,$$

либо

$$\mathbf{E}(U^2) < \infty.$$

В последнем случае формально полагаем $\gamma = 2$. Аналогично, либо

$$\mathbf{P}(R > r) \sim \frac{c_R}{\delta r^\delta}\ , \quad r \to \infty, \quad 1 < \delta < 2, \quad c_R > 0,$$

либо

$$\mathbf{E}(R^2) < \infty.$$

В последнем случае формально полагаем $\delta = 2$.

Таким образом, поведение узла будет зависеть от значений параметров $\gamma, \delta \in (1, 2]$. Мы будем использовать те же моментные предположения, но область изменения параметров возьмём другую. В нашем случае допускается $\gamma, \delta \in (0, 1)$.

Замечание 1.1. В [6] также рассматривается альтернативная непрерывной дискретная модель. В этой модели параметры s и u сохраняют прежний смысл, но на интервале $[s, s + u]$ процесс обслуживания происходит дискретными порциями.

2. Структура предельных теорем для нагрузки

В [6] рассматривается поведение процесса интегральной загрузки на больших интервалах времени. Для того, чтобы получить осмысленный предел, приходится

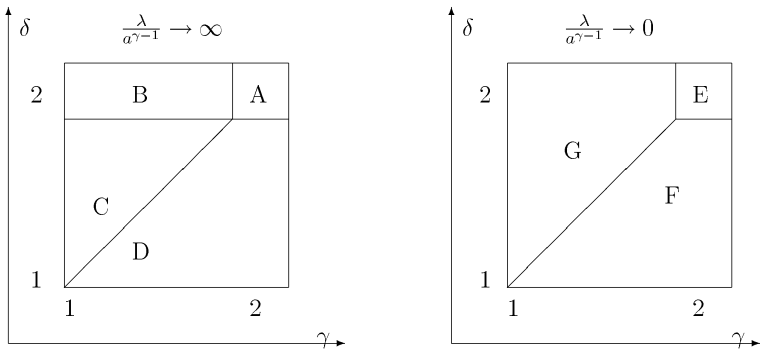
- центрировать процесс;
- разделить его на подходящий нормирующий множитель;
- сжимать (шкалировать) время так, чтобы уместить его на стандартный временной интервал.

За стандартный временной интервал принимается $[0, 1]$. Нагрузка же исследуется на длинном интервале времени $[0, a]$, где $a \to \infty$. Это может быть записано в виде $W^*(at), t \in [0, 1]$. Центрирование и нормирование на подходящий множитель $b = b(a)$ приводят нас к процессу

$$Z_a(t) = \frac{W^*(at) - \mathbf{E}W^*(at)}{b}\ , \quad t \in [0, 1]. \tag{2.1}$$

При этом a и λ могут рассматриваться как переменные (хотя бы одна из них должна стремиться к бесконечности), а нормировка b подбирается в зависимости от них, а также от параметров узла γ, δ. Кроме того, удобно рассматривать отдельно случай высокой интенсивности нагрузки, когда $\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to \infty$, и низкой интенсивности: $\frac{\lambda}{a^{\gamma-1}} \to 0$.

Основные результаты Такку и Кая для непрерывной модели телетрафика представим в виде следующих диаграмм. (Ввиду важности случаев $\delta = 2$ и $\gamma = 2$ на обеих осях эти точки представлены в виде интервалов.)



Каждому сектору диаграммы соответствует своя предельная теорема. Остановимся на них подробнее.

Предельные теоремы, соответствующие секторам A и E, говорят о сходимости процесса нагрузки системы к винеровскому процессу. В секторе B наблюдается сходимость к процессу дробного броуновского движения B_H, где $H = \frac{3-\gamma}{2}$. В области C наш процесс сходится к так называемому телеком-процессу. В оставшихся секторах D, G и F наблюдается сходимость к одностороннему строго α-устойчивому процессу, причём в области G $\alpha = \gamma$, а в D и F $\alpha = \delta$.

3. Основной результат

Как и в статье [6], нас будет интересовать поведение процесса интегральной загрузки системы на больших интервалах времени, но для случая $\delta < 1 < \gamma \leqslant 2$, который не рассматривался в [6]. Как и в (2.1), шкалируем время так, чтобы уместить его на стандартный временной интервал $[0, 1]$. Однако центрирование процесса в нашем случае не имеет смысла, так как соответствующее математическое ожидание бесконечно. Поэтому мы будем доказывать предельную теорему для процесса $Z_a(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определяемого формулой

$$Z_a(t) = \frac{W^*(at)}{b}, \quad t \in [0,1],$$

а нормировку выберем по формуле

$$b = B(\lambda a)^{1/\delta}, \tag{3.1}$$

где постоянная B определяется соотношением $B^\delta = c_R\,\mathbf{E}(U^\delta)$. Заметим, что при $\delta < \gamma$ соответствующее математическое ожидание заведомо конечно, так как

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(U^\delta) = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(U^\delta > u)du = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(U > u^{1/\delta})du \\ \leqslant 1 + \mathrm{const} \int\limits_1^\infty u^{-\gamma/\delta} du < \infty.\end{aligned}$$

В качестве предела процессов Z_a будет возникать устойчивый процесс с однородными независимыми приращениями (процесс Леви), определение которого мы сейчас и напомним.

Случайная величина ξ имеет строго α-устойчивое распределение $\mathcal{S}(c_+, c_-, \alpha)$, с показателем $\alpha < 1$, если её характеристическая функция имеет вид

$$\mathbf{E}e^{it\xi} = \exp\left\{\int \left(e^{itr} - 1\right)\left(c_- \mathbf{1}_{r<0} + c_+ \mathbf{1}_{r>0}\right) \frac{dr}{|r|^{1+\alpha}}\right\}.$$

Обозначим $S_\alpha(t), t \geqslant 0$, процесс с однородными независимыми приращениями, для которого $S_\alpha(t)$ имеет *одностороннее* устойчивое распределение $\mathcal{S}(t, 0, \alpha)$. Это условие определяет процесс $S_\alpha(\cdot)$ однозначно. Его траектории являются скачкообразными возрастающими функциями.

Основной результат статьи заключён в следующей теореме.

Теорема 3.1. *Если $\delta < 1 < \gamma \leqslant 2$ и $a \to \infty, a\lambda \to \infty$, то при нормировке* (3.1) *конечномерные распределения процесса $Z_a(t)$ $t \in [0,1]$, сходятся к конечномерным распределениям процесса $S_\delta(t)$, $t \in [0,1]$.*

4. Сходимость распределений пуассоновских интегралов

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3.1, получим необходимые условия сходимости распределений пуассоновских интегралов к одностороннему устойчивому закону при $\alpha < 1$. Аналогичные условия для устойчивого закона с параметром $\alpha \in (1, 2)$ приведены в [10].

Пусть N – нецентрированная пуассоновская случайная мера с мерой интенсивности μ, заданная на некотором измеримом пространстве $\mathcal{R}$. Пусть $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$ – неотрицательная функция. Сравним характеристическую функцию интеграла по пуассоновской мере $\int_{\mathcal{R}} f dN$

$$\mathbf{E} \exp \left(it \int_{\mathcal{R}} f dN \right) = \exp \left(\int_{\mathcal{R}} (e^{itf} - 1) d\mu \right)$$

и характеристическую функцию случайной величины ξ с односторонним устойчивым распределением $\mathcal{S}(c_+, 0, \alpha)$, где $\alpha < 1$,

$$\mathbf{E} e^{it\xi} = \exp \left\{ \int_0^\infty \left(e^{itr} - 1 \right) \frac{c_+ dr}{r^{1+\alpha}} \right\}.$$

Можно заметить, что интеграл $\int_{\mathcal{R}} f dN$ имеет в точности устойчивое распределение $\mathcal{S}(c_+, 0, \alpha)$, если ядро f имеет соответствующее распределение относительно меры интенсивности μ, т.е. для любого $x > 0$ верно

$$\mu\{f > x\} = \int_x^\infty \frac{c_+ dr}{r^{\alpha+1}} = \frac{c_+}{\alpha x^\alpha}.$$

Поэтому основным условием сходимости распределений последовательности $\int f_n dN$, где $f_n \geqslant 0$, к $\mathcal{S}(c_+, 0, \alpha)$ будет условие:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{f_n > x\} = \frac{c_+}{\alpha x^\alpha}, \quad \text{для всех} \ \ x > 0. \tag{4.1}$$

Однако этим условием нельзя ограничиваться, так как могут возникнуть проблемы с бесконечным спектром в нуле.

Предложение 4.1. *Рассмотрим последовательность функций* $f_n \geqslant 0$. *Предположим, что верно условие* (4.1), *а также*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \int\limits_{f_n\leqslant\varepsilon} f_n d\mu = 0. \tag{4.2}$$

Тогда распределения случайных величин $\int\limits_{\mathcal{R}} f_n dN$ *сходятся к одностороннему устойчивому закону* $\mathcal{S}(c_+,0,\alpha)$ *с показателем* $\alpha<1$.

Доказательство. Проверим сходимость характеристических функций.

Для малого $\varepsilon>0$ разделим выражение в экспоненте характеристической функции на две части

$$\int\limits_{\mathcal{R}} (e^{itf_n}-1)d\mu = \int\limits_{0\leqslant f_n\leqslant\varepsilon} (e^{itf_n}-1)d\mu + \int\limits_{f_n>\varepsilon} (e^{itf_n}-1)d\mu.$$

Вторая часть сходится к соответствующей компоненте характеристической функции в силу (4.1), так как здесь мы имеем дело со сходимостью интеграла от непрерывной функции по слабо сходящейся последовательности *конечных* мер. Что касается первой части, то по неравенству $\left|e^{iu}-1\right| \leqslant |u|$ она может быть сделана сколь угодно малой как для предельного выражения, так и для допредельного (с учетом (4.2)) за счет выбора малого параметра ε. $\square$

Можно дать и более простое достаточное условие сходимости.

Следствие 4.2. *Предположим, что верно* (4.1), *и что имеет место равномерная оценка*

$$\mu\{f_n > x\} \leqslant \frac{C}{x^\alpha}, \quad \textit{для всех}\ \ x>0,\ n\geqslant 1. \tag{4.3}$$

Тогда распределения величин $\int\limits_{\mathcal{R}} f_n dN$ *сходятся к устойчивому закону* $\mathcal{S}(c_+,0,\alpha)$.

Доказательство. Проверим условие предложения 4.1. Используя равномерную оценку, найдем

$$\int\limits_{f_n\leqslant\varepsilon} f_n d\mu = -\int\limits_0^\varepsilon u\,d\mu(f_n>u) = \int\limits_0^\varepsilon \mu(f_n>u)du - \mu(f_n>u)u\Big|_0^\varepsilon$$

$$\leqslant \int\limits_0^\varepsilon \mu(f_n>u)du \leqslant \int\limits_0^\varepsilon \frac{C}{u^\alpha}du = \frac{C\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,$$

откуда следует (4.2). □

5. Доказательство теоремы

5.1. Сходимость одномерных распределений

Докажем сходимость одномерных распределений процесса $Z_a(t)$ в теореме 3.1.

Доказательство. Напомним, что

$$Z_a(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(a\lambda)^{1/\delta}}\, dN,$$

где $\ell_{at}(s,u)$ – ядро из (1.4) и $\mathcal{R} = \{(s,u,r)\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Будем использовать следствие 4.2 предложения 4.1. Нужно проверить предельное соотношение (4.1) и равномерную оценку (4.3). Сосредоточимся на проверке (4.1). Равномерная оценка (4.3) устанавливается теми же выкладками.

Нам нужно проверить, что для всех $x > 0$

$$\mu\left\{(s,u,r) : \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x\right\} \to t\, x^{-\delta}, \quad a \to \infty. \tag{5.1}$$

Сначала отбросим зону $(u > ha)$ для сколь угодно малого, но фиксированного $h > 0$. Воспользовавшись неравенством $\ell_{at}(s,u) \leqslant at$, мы видим, что из неравенства $\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x$ следует $r \geqslant \frac{xB(\lambda a)^{1/\delta}}{at}$. А при фиксированных r, u, t длина носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s не превосходит $at + u$. Поэтому

$$\begin{aligned} &\mu\left\{(s,u,r) : \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, u > ha\right\} \\ &\leqslant \mathbf{P}\left(R \geqslant \frac{xB(\lambda a)^{1/\delta}}{at}\right) \cdot \lambda \cdot \mathbf{E}\left((U + at)\mathbf{1}_{U>ha}\right) \\ &\leqslant \text{ const} \left(\frac{x(\lambda a)^{1/\delta}}{at}\right)^{-\delta} \cdot \lambda \cdot \left(1 + \frac{t}{h}\right) \mathbf{E}\left(U\mathbf{1}_{U>ha}\right) \\ &\leqslant \text{ const}\ \frac{x^{-\delta}a^{-1}}{(at)^{-\delta}} \cdot \left(1 + \frac{t}{h}\right) (ha)^{1-\gamma} \\ &= \text{ const} \cdot x^{-\delta}\, a^{\delta-\gamma} \to 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

так как $\delta < \gamma$ и $a \to \infty$.

Теперь перейдем к зоне ($u \leqslant ha$) с малым h. Начнем с верхней оценки интересующей нас меры. Поскольку $\ell_{at}(s,u) \leqslant u$, то из неравенства $\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x$ следует $ru \geqslant xB(\lambda a)^{1/\delta}$. С другой стороны, при фиксированных r, u, t длина носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s не превосходит $at + u \leqslant (t+h)a$. Значит,

$$\mu\left\{(s,u,r) : \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, u \leqslant ha\right\} \leqslant \mathbf{P}\left(RU \geqslant xB(\lambda a)^{1/\delta}\right)\cdot\lambda\cdot(t+h)a.$$

Воспользуемся тем, что при $x \to \infty$

$$\mathbf{P}(RU \geqslant x) = \mathbf{E}_U\mathbf{P}(R \geqslant \frac{x}{U}) \sim \mathbf{E}\frac{c_R U^\delta}{\delta x^\delta} = \frac{c_R\mathbf{E}(U^\delta)}{\delta x^\delta}. \tag{5.3}$$

С учетом определения константы B мы приходим к нужной оценке

$$\begin{aligned}\mu\left\{(s,u,r) : \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, u \leqslant ha\right\}& \\ &\leqslant (1+o(1))\ \frac{c_R\mathbf{E}(U^\delta)}{\delta x^\delta B^\delta(\lambda a)}\cdot\lambda\cdot(t+h)a \\ &= \frac{c_R\mathbf{E}(U^\delta)}{\delta x^\delta B^\delta}(t+h) = \frac{t+h}{\delta x^\delta}.\end{aligned}$$

Наконец, дадим нижнюю оценку интересующей нас меры. Воспользуемся тем, что на достаточно большом множестве $\ell_{at}(s,u) = u$. Имеем по определению постоянной B и (5.3)

$$\begin{aligned}&\mu\left\{(s,u,r) : \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, u \leqslant ha\right\} \\ &\geqslant \mu\left\{(s,u,r) : \frac{ru}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, s \in [0, at-u], u \leqslant ha\right\} \\ &\geqslant \mathbf{P}\left\{\frac{RU}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, U \leqslant ha\right\}\cdot\lambda\cdot(t-h)a \geqslant (1+o(1))\frac{t-h}{\delta x^\delta}.\end{aligned}$$

В силу произвольности h, условие (5.1) проверено. □

5.2. Сходимость многомерных распределений

Для полного доказательства теоремы 3.1 необходимо установить сходимость всех конечномерных распределений. Дальнейшие действия будем проводить, пользуясь тем, что сходимость одномерных распределений уже доказана, т.е. известно, что $Z_a(t) \Rightarrow S_\delta(t)$ для всех t.

Будем доказывать, что при любых $t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ верно

$$(Z_a(t_1), Z_a(t_2), \dots, Z_a(t_m)) \Rightarrow (S_\delta(t_1), S_\delta(t_2), \dots, S_\delta(t_m)). \tag{5.4}$$

Предложение 5.1. *Соотношение* (5.4) *равносильно следующему:*

$$\begin{aligned}&(Z_a(t_1), Z_a(t_2) - Z_a(t_1), \dots, Z_a(t_m) - Z_a(t_{m-1}))\\ \Rightarrow&(S(t_1), S(t_2) - S(t_1), \dots, S(t_m) - S(t_{m-1})).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Преимущество (5.5) заключается в том, что предельный вектор уже имеет независимые компоненты.

Доказательство. Положим $t_0 = 0$ и запишем тождество

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \tau_j Z_a(t_j) =& \sum_{j=1}^{m} \left(\tau_j \sum_{k=1}^{j} (Z_a(t_k) - Z_a(t_{k-1}) \right)\\ =& \sum_{k=1}^{m} \left(\left(\sum_{j=k}^{m} \tau_j \right) (Z_a(t_k) - Z_a(t_{k-1})) \right)\\ :=& \sum_{k=1}^{m} \theta_k (Z_a(t_k) - Z_a(t_{k-1})).\end{aligned}$$

Аналогичное тождество верно и с заменой Z_a на S_δ:

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_j S_\delta(t_j) = \sum_{k=1}^{m} \theta_k (S_\delta(t_k) - S_\delta(t_{k-1})).$$

Теперь с помощью характеристических функций переход от (5.5) к (5.4) не составляет труда:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E} \exp \left(i \sum_{j=1}^{m} \tau_j Z_a(t_j) \right) = \mathbf{E} \exp \left(i \sum_{k=1}^{m} \theta_k (Z_a(t_k) - Z_a(t_{k-1})) \right)\\ \to&\mathbf{E} \exp \left(i \sum_{k=1}^{m} \theta_k (S_\delta(t_k) - S_\delta(t_{k-1})) \right) = \mathbf{E} \exp \left(i \sum_{j=1}^{m} \tau_j S_\delta(t_j) \right).\end{aligned}$$

Таким образом, из (5.5) следует (5.4). Обратное заключение доказывается аналогично. □

Теперь докажем, что вектора из (5.5) покомпонентно сходятся, т.е. $Z_a(t_1) \Rightarrow S(t_1)$, $Z_a(t_2) - Z_a(t_1) \Rightarrow S(t_2) - S(t_1), \dots$.

Как уже говорилось ранее, сходимость первого элемента в этом ряду у нас уже есть. Вспомним, что процессы $Z_a(t)$ и $S_\delta(t)$ являются процессами со стационарными приращениями. В частности, $Z_a(t_i) - Z_a(t_{i-1}) = Z_a(t_i - t_{i-1})$ по распределению. В то же время $Z_a(t_i - t_{i-1}) \Rightarrow S_\delta(t_i - t_{i-1})$, в свою очередь $S(t_i - t_{i-1}) = S_\delta(t_i) - S_\delta(t_{i-1})$ по распределению. Следовательно, покомпонентная сходимость векторов из (5.5) имеет место.

Предложение 5.2. *Пусть $X_a = (X_a^{(i)})_{1 \leqslant i \leqslant m}$ – семейство m-мерных векторов, каждый из которых имеет независимые компоненты. Пусть $X_a^{(i)} \Rightarrow Y^{(i)}$ при $a \to \infty$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда $X_a \Rightarrow Y = (Y^{(i)})$ при $a \to \infty$, где предельный вектор тоже имеет независимые компоненты.*

Доказательство. Как и ранее, для доказательства данного факта перейдём к характеристическим функциям. Далее воспользуемся свойством математического ожидания для произведения независимых случайных величин, откуда уже очевидным образом следует требуемое утверждение. □

Нам хотелось бы применить предложение 5.2 к соотношению (5.5), но напрямую это сделать невозможно, так как компоненты допредельных векторов зависимы.

Поэтому мы разобьём допредельный вектор из (5.5)

$$\Delta_a = (Z_a(t_i) - Z_a(t_{i-1}))_{1 \leqslant i \leqslant m},$$

где $t_0 = 0$, на две части – одну малую, другую с независимыми компонентами: $\Delta_a = \Delta_{a,1} + \Delta_{a,2}$ так, чтобы случайный вектор $\Delta_{a,1}$ имел независимые компоненты и $\Delta_{a,2}^{(i)} \Rightarrow 0$ при $a \to \infty$, для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

Вспомним, что наш процесс $Z_a(t)$ выглядит следующим образом:

$$Z_a(t) = \frac{W^*(at)}{b} = \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r}{b}\ \ell_{at}(s,u)dN,$$

где $\ell_{at}(s,u)$ - ядро, определённое в (1.4).

Отсюда получим

$$\begin{aligned}\Delta_a^{(i)} =& Z_a(t_i) - Z_a(t_{i-1}) \\ =& \int\limits_{\mathcal{R}} \frac{r}{b} \,\left(\ell_{at_i}(s,u) - \ell_{at_{i-1}}(s,u)\right) dN := \int\limits_{\mathcal{R}} f_{a,t_i,t_{i-1}}(s,u,r) dN.\end{aligned}$$

Ввыберем, наконец, элементы разбиения следующим образом:

$$\Delta_{a,1}^{(i)} := \int\limits_{\{(s,u,r):\, at_{i-1}\leqslant s\leqslant at_i\}} f_{a,t_i,t_{i-1}} dN, \tag{5.6}$$

$$\Delta_{a,2}^{(i)} := \int\limits_{\{(s,u,r):\, s\leqslant at_{i-1}\}} f_{a,t_i,t_{i-1}} dN. \tag{5.7}$$

Легко заметить, что вектор $\Delta_{a,1}$ действительно имеет независимые компоненты, так как соответствующие области интегрирования по пуассоновой мере не пересекаются.

Докажем теперь, что $\Delta_{a,2}^{(i)} \Rightarrow 0$ при $a\to\infty$, для всех $1\leqslant i\leqslant m$.

Поскольку приращения процесса $Z_a(t)$ стационарны, то можно положить $t_{i-1}=0$, а $t_i = t$. Теперь доказывать нужно уже следующее: для любого $t\in(0,1]$

$$\Delta_{a,2} := \int\limits_{\{(s,u,r):\, s\leqslant 0\}} f_{a,0,t}\, dN \Rightarrow 0 \quad \text{при} \quad a\to\infty. \tag{5.8}$$

Для этого оценим меру $\mu\{(s,u,r):\ f_{a,0,t}(s,u,r)\geqslant x, s\leqslant 0\}$. Напомним, что

$$f_{a,0,t}(s,u,r) = \frac{r}{b}\, \ell_{at}(s,u) = \frac{r\,\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}}.$$

Снова рассмотрим отдельно зоны $(u > ha)$ и $(u\leqslant ha)$ для сколь угодно малого, но фиксированного $h>0$.

Согласно (5.2), мы имеем для любого $h>0$

$$\mu\{(s,u,r):\ f_{a,0,t}(s,u,r)\geqslant x, u\geqslant ha\}\leqslant c_1\, x^{-\delta} a^{\delta-\gamma}(h+1)\, h^{-\gamma}. \tag{5.9}$$

Теперь перейдем к зоне $(u\leqslant ha)$ с малым h. Поскольку $\ell_{at}(s,u)\leqslant u$, то из неравенства $\frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}}\geqslant x$ следует $ru\geqslant xB(\lambda a)^{1/\delta}$. Кроме того, при фиксированных r, u, t пересечение носителя функции $\ell_{at}(\cdot, u)$ по переменной s с областью $(s \leqslant 0)$ совпадает с интервалом $[-u, 0]$, длина которого не превосходит ha. Значит,

$$\mu\left\{(s,u,r):\ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, u \leqslant ha, s \leqslant 0\right\} \\ \leqslant \mathbf{P}\left(RU \geqslant xB(\lambda a)^{1/\delta}\right) \cdot \lambda \cdot ha.$$

Воспользуемся тем, что из (5.3) следует

$$\mathbf{P}(RU \geqslant x) \leqslant c_2 x^{-\delta}.$$

Поэтому мы приходим к нужной оценке

$$\mu\left\{(s,u,r):\ \frac{r\ell_{at}(s,u)}{B(\lambda a)^{1/\delta}} \geqslant x, u \leqslant ha, s \leqslant 0\right\} \\ \leqslant c_2 \left[xB(\lambda a)^{1/\delta}\right]^{-\delta} \cdot \lambda \cdot ha = c_3 h\, x^{-\delta}.$$

Суммируя с предыдущей оценкой, получим

$$\mu\{(s,u,r):\ f_{a,0,t}(s,u,r) \geqslant x, s \leqslant 0\} \leqslant c_4 \left(a^{\delta-\gamma}(h+1)\, h^{-\gamma} + h\right) x^{-\delta}.$$

Оптимизируя параметр h, положим $h = h(a) = a^{\frac{\delta-\gamma}{1+\gamma}}$. Получим

$$\mu\{(s,u,r):\ f_{a,0,t}(s,u,r) \geqslant x, s \leqslant 0\} \leqslant c_5 a^{\frac{\delta-\gamma}{1+\gamma}}\ x^{-\delta}.$$

Поскольку $\delta - \gamma < 0$, отсюда легко следует (5.8). Значит, построенное разбиение обладает необходимыми свойствами.

Покажем, как из всего уже доказанного следует (5.4).

Рассмотрим приращение $\Delta_a^{(i)} = Z_a(t_i) - Z_a(t_{i-1})$. По построению $\Delta_a^{(i)} = \Delta_{a,1}^{(i)} + \Delta_{a,2}^{(i)}$. Отсюда следует, что

$$\Delta_{a,1}^{(i)} = Z_a(t_i) - Z_a(t_{i-1}) - \Delta_{a,2}^{(i)}.$$

Ранее мы доказали, что при $a \to \infty$, для всех $1 \leqslant i \leqslant m$

$$\Delta_{a,2}^{(i)} \Rightarrow 0,$$

$$Z_a(t_i) - Z_a(t_{i-1}) \Rightarrow S_\delta(t_i) - S_\delta(t_{i-1}).$$

Тогда и $\Delta_{a,1}^{(i)} \Rightarrow S_\delta(t_i) - S_\delta(t_{i-1})$ при $a \to \infty$, для всех $1 \leqslant i \leqslant m$.

Отсюда по предложению 5.2 $\Delta_{a,1} \Rightarrow (S_\delta(t_i) - S_\delta(t_{i-1}))_{1 \leqslant i \leqslant m}$ при $a \to \infty$.

Теперь, снова пользуясь тем, что $\Delta_{a,2} \Rightarrow 0$, получаем, что

$$(Z_a(t_i) - Z_a(t_{i-1}))_{1 \leqslant i \leqslant m} = \Delta_{a,1} + \Delta_{a,2} \Rightarrow (S_\delta(t_i) - S_\delta(t_{i-1}))_{1 \leqslant i \leqslant m}.$$

Наконец, применяя предложение 5.1, получим (5.4). Таким образом, мы доказали сходимость конечномерных распределений процесса $Z_a(t)$, основываясь на сходимости одномерных распределений.

Теорема 3.1 полностью доказана. $\square$

6. Некорректность модели телетрафика в случае $\gamma < 1$

В предыдущих разделах мы анализировали модель телетрафика в зоне параметров $\delta < 1$. Естественно попытаться сделать нечто подобное и для случая $\gamma < 1$. Рассмотрим модель в случае, когда при $u \to \infty$

$$\mathbf{P}(U > u) \sim \frac{C_U}{u^\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{6.1}$$

Покажем, что при нашей постановке задачи она определена некорректно, т.е. интеграл

$$W(t) = \int\limits_{\mathcal{R}} r\, \mathbf{1}_{s \leqslant t \leqslant s+u}(t) dN,$$

выражающий мгновенную загрузку, не говоря уже об интегральной, не определён, а точнее он п.н. равен плюс бесконечности.

Воспользуемя условиями существования интегралов по пуассоновской мере. Для того, чтобы проверить, что интеграл $\int\limits_{\mathcal{R}} f dN$, где $f = r\mathbf{1}_{s \leqslant t \leqslant s+u}(t)$, определен некорректно, нужно установить, что соотношение $\int\limits_{\mathcal{R}} (|f| \wedge 1) d\mu < \infty$ не выполняется.

Заметим, что всегда $f \geqslant 0$, и верно

$$|f| \wedge 1 = (r \wedge 1)\, \mathbf{1}_{\{s \leqslant t \leqslant s+u\}}(s,u).$$

Поэтому получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{R}}(|f|\wedge 1)d\mu &= \int\limits_{\mathcal{R}}(r\wedge 1)\mathbf{1}_{\{s\leqslant t\leqslant s+u\}}(s,u)d\mu \\ &= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty (r\wedge 1)\mathbf{1}_{\{s\leqslant t\leqslant s+u\}}(s,u)\lambda ds F_U(du)F_R(dr) \\ &= \lambda\int\limits_0^\infty (r\wedge 1)F_R(dr)\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \mathbf{1}_{\{t-u\leqslant s\leqslant t\}}(s,u)dsF_U(du) \\ &= \lambda\int\limits_0^\infty (r\wedge 1)F_R(dr)\int\limits_0^\infty uF_U(du).\end{aligned}$$

Остаётся заметить, что при выполнении условия (6.1) верно

$$\int\limits_0^\infty uF_U(du) = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(U\geqslant u)du = +\infty.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathcal{R}}(|f|\wedge 1)d\mu = +\infty$$

то есть мы убедились, что мгновенная нагрузка

$$W(t) = \int r\mathbf{1}_{\{s\leqslant t\leqslant s+u\}}(s,u)dN$$

в данном случае определена некорректно.

Литература

1. H. Biermé, A. Estrade, *Poisson random balls: self-similarity and x-ray images.* — Adv. Appl. Probab. **38** (2006), 853–872.
2. H. Biermé, A. Estrade, I. Kaj, *About scaling behavior of random balls models.* — In: Proc. Conf. 6th International Conference on Stereology, Spatial Statistics, and Stochastic Geometry (2006).
3. H. Biermé, A. Estrade, I. Kaj, *Scaling properties of Poisson germ-grain models with power-law grain size.* — In: Proc. Conf. Russian–Scandinavian Symposium: Probability and Applied Probability. Petrozavodsk (2006).

4. H. Biermé, A. Estrade, I. Kaj, *Self-similar random fields and rescaled random balls models.* — J. Theoret. Probab. (В печати).
5. J.-Ch. Breton, C. Dombry, *Rescaled weighted ranom balls models and stable self-similar random fields.* — Stoch. Proc. Appl. **119** (2009), 3633–3652.
6. I. Kaj, M. Taqqu, *Convergence to fractional Brownian motion and to the Telecom process: the integral representation approach.* — In and out of Equilibrium. II., Ser.: Progress in Probability **60** (2008), pp. 383–427.
7. I. Kaj, L. Leskelä, I. Norros, V. Schmidt, *Scaling limits for random fields with long-range dependence.* — Ann. Probab. **35** (2007), 528–550.
8. W. A. Rosenkrantz, J. Horowitz, *The infinite sourse model for internet traffic: statistical analysis and limit theorems.* — Methods Appl. Analysis **9** (2002), 445–462.
9. W. Willinger et al., *Long range dependence and data network traffic.* — In: Theory and Applications of Long-Range Dependence. Birkhäuser, Basel, 2003.
10. М. А. Лифшиц, *Материалы спецсеминара по теории вероятностей.* — Препринт СПбГУ (2009).

Aksenova K. A. On stochastic models of teletraffic with heavy-tailed distributions.

Following the approach suggested by I. Kaj and M. Taqqu, we consider a stochastic model of teletraffic based on Poisson random measure. We show that under appropriate assumptions the finite-dimensional distributions for the scaled workload process converge to those of a stable Lévy process.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: ksmoon@mail.ru

Поступило 10 ноября 2010 г.