Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

О. М. Фоменко

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК НА КОНУСАХ

Получены новые результаты о распределении целых точек на конусах

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

и

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2.$$

§1

Настоящая работа служит дополнением к [1]. Рассмотрим задачу распределения целых точек на конусе вида

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 = y_1^2 + \cdots + y_k^2 \quad (k \geqslant 2), \tag{1.1}$$

описываемую асимптотикой для суммы

$$\sum_{n \leqslant x} r_k^2(n) \quad (x \to \infty),$$

где $r_k(n)$ – число представлений целого n суммой k квадратов целых чисел; обозначим остаточный член этой асимптотики через $\Delta_k(x)$.

Случай $k = 2$ впервые рассмотрел Серпинский (1908): при $x \to \infty$

$$\sum_{n \leqslant x} r_2^2(n) = 4x \log x + c'x + \Delta_2(x),$$

где c' – константа,

$$\Delta_2(x) \ll x^{\frac{3}{4}} \log x.$$

К настоящему времени получено [2]:

$$\Delta_2(x) \ll x^{\frac{1}{2}} (\log x)^3 \log\log x.$$

Ключевые слова: точки решетки, конус, суммы квадратов, символ Якоби.
Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233).

Как доказал Шинцель [3],

$$\Delta_2(x) = \Omega\Big(x^{\frac{3}{8}}\Big).$$

Распределением целых точек на конусах общего вида и, в частности, на конусах вида (1.1) занимались многие авторы; см. работу [1] и содержашиеся в ней ссылки, а также [4]. В [1, 4, 5] методом Ранкина–Сельберга доказано ($k \geqslant 3$):

$$\sum_{n \leqslant x} r_k^2(n) = cx^{k-1} + \Delta_k(x),$$

где константа $c = c(k) > 0$,

$$\Delta_k(x) \ll x^{(k-1)\frac{4k-5}{4k-3}+\varepsilon};$$

в частности,

$$\Delta_3(x) \ll x^{\frac{14}{9}+\varepsilon}, \qquad \Delta_4(x) \ll x^{\frac{33}{13}+\varepsilon}. \tag{1.2}$$

В [1] автор доказал, что

$$\Delta_k(x) \ll x^{k-2} \quad (k \geqslant 5) \tag{1.3}$$

и

$$\Delta_k(x) = \Omega\Big(x^{k-2}\Big) \quad (k \geqslant 3). \tag{1.4}$$

Таким образом, оценки (1.3) являются окончательными. Позднее автор узнал, что результаты (1.3) и (1.4) принадлежат Вальфишу (см. [6, с. 162]).

Цель настоящей работы – уточнить оценки (1.2). В §3 изучается сумма

$$\sum_{\substack{n \leqslant x, \\ n \equiv 1 \pmod 2}} \sigma^2(n),$$

где $\sigma(n) = \sum\limits_{d|n} d$, и, в качестве легкого следствия, получается оценка

$$\Delta_4(x) \ll x^2 (\log x)^{\frac{5}{3}}. \tag{1.5}$$

Так как справедлива оценка (1.4) с $k = 4$ и даже

$$\Delta_4(x) = \Omega\big(x^2 (\log\log x)^2\big),$$

результат (1.5) близок к окончательному.

В §2 рассматривается более трудный случай $k = 3$; доказано, чио

$$\Delta_3(x) \ll x^{\frac{3}{2}} (\log x)^{\frac{7}{2}}.$$

§2

Теорема 1.

$$\sum_{n\leqslant x} r_3^2(n) = Cx^2 + O\Big(x^{\frac{3}{2}}(\log x)^{\frac{7}{2}}\Big), \tag{2.1}$$

где $C > 0$ –константа.

Доказательство. Напомним сначала формулу [7]

$$r_3(n) = \sum_{d^2|n} R_3(n/d^2),$$

где $R_3(n)$ – число примитивных представлений целого n суммой трех квадратов целых чисел (т.е. представлений, в которых общим делителм трех квадратов является только 1); далее

$$R_3(n) = \frac{G_n}{\pi} n^{\frac{1}{2}} L\left(1, \left(\frac{-4n}{*}\right)\right),$$

где

$$L\left(1, \left(\frac{-4n}{*}\right)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-4n}{m}\right) \frac{1}{m},$$

$$G_n := \begin{cases} 0, & \text{если } \ n \equiv 0,4,7 \pmod 8, \\ 16, & \text{если } \ n \equiv 3 \pmod 8, \\ 24, & \text{если } \ n \equiv 1,2,5,6 \pmod 8. \end{cases}$$

Напомним классические обозначения: $[a, b]$ – наименьшее общее кратное целых чисел a и b, (a, b) – наибольший общий делитель этих чисел. Обозначим сумму в левой части равенства (2.1) через S.

Имеем

$$S = \sum_{\substack{l_1^2, l_2^2 \\ [l_1^2, l_2^2]\leqslant x}} \sum_{N\leqslant Y} R_3(Nt_1)R_3(Nt_2),$$

где

$$Y := \frac{x}{[l_1^2, l_2^2]}, \quad t_1 := \frac{[l_1^2, l_2^2]}{l_1^2}, \quad t_2 := \frac{[l_1^2, l_2^2]}{l_2^2}.$$

Далее,

$$S=\frac{1}{\pi^2}\sum_{\substack{l_1^2,l_2^2\\ [l_1^2,l_2^2]\leqslant x}}\sum_{N\leqslant Y}G_{Nt_1}(Nt_1)^{\frac12}L\biggl(1,\biggl(\frac{-4Nt_1}{*}\biggr)\biggr)$$
$$\times G_{Nt_2}(Nt_2)^{\frac12}L\biggl(1,\biggl(\frac{-4Nt_2}{*}\biggr)\biggr).$$

Значения N разбиваем на прогрессии $N\equiv N_0 \pmod 8$; на каждой из этих прогрессий при постоянных l_1^2, l_2^2 величины G_{Nt_1}, G_{Nt_2} постоянны. Соответственно,

$$S=\sum_{N_0}S_{N_0}.$$

Вычислим лишь сумму S_1 ($N_0=1$), остальные трактуются аналогично.

Согласно классическому неравенству Виноградова–Пойа,

$$L\biggl(1,\biggl(\frac{-4Nt_1}{*}\biggr)\biggr)=\sum_{\substack{m\leqslant X\\ (m,2t_1N)=1}}\biggl(\frac{-4Nt_1}{m}\biggr)\frac{1}{m}+O\biggl(\frac{t_1^{\frac12}Y^{\frac12}\log X}{X}\biggr),$$

где $N\leqslant Y$, $X:=(t_1t_2Y)^2$; аналогичное равенство справедливо для $L\bigl(1,\bigl(\frac{-4Nt_2}{*}\bigr)\bigr)$. Имеем

$$L\biggl(1,\biggl(\frac{-4Nt_1}{*}\biggr)\biggr)L\biggl(1,\biggl(\frac{-4Nt_2}{*}\biggr)\biggr)$$
$$=\sum_{m\leqslant X^2}\biggl\{\sum_{\substack{m_1m_2=m\\ (m_i,2Nt_i)=1\\ m_i\leqslant X;\,i=1,2}}\biggl(\frac{-4Nt_1}{m_1}\biggr)\biggl(\frac{-4Nt_2}{m_2}\biggr)\biggr\}\frac{1}{m}+O\biggl(\frac{t_1^{\frac12}t_2^{\frac12}Y^{\frac12}(\log X)^2}{X}\biggr)$$
$$=\sum_{m\leqslant X^2}\biggl(\frac{-4N}{m}\biggr)\frac{d(m,t_1,t_2,X)}{m}+O\biggl(\frac{t_1^{\frac12}t_2^{\frac12}Y^{\frac12}(\log X)^2}{X}\biggr),$$

где для нечетного m

$$d(m,t_1,t_2,X):=\sum_{\substack{m_1m_2=m\\ m_i\leqslant X;i=1,2}}\biggl(\frac{t_1}{m_1}\biggr)\biggl(\frac{t_2}{m_2}\biggr).$$

Имеем

$$S_1 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{l_1^2, l_2^2 \\ [l_1^2, l_2^2] \leqslant x}} G_{t_1} G_{t_2} (t_1 t_2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m \leqslant X^2 \\ m \text{ неч}}} \frac{d(m, t_1, t_2, X)}{m} \sum_{\substack{N \leqslant Y \\ N \equiv 1 \pmod 8}} N\left(\frac{-4N}{m}\right) + \sum\nolimits_{III}, \tag{2.2}$$

где

$$\sum\nolimits_{III} = O\left(\sum_{\substack{l_1^2, l_2^2 \\ [l_1^2, l_2^2] \leqslant x}} (t_1 t_2)^{1/2} \sum_{N \leqslant Y} N (t_1 t_2)^{\frac{1}{2}} Y^{\frac{1}{2}} (\log X)^2 X^{-1} \right).$$

В (2.2) разобьём сумму по m на две:

$$\sum_{\substack{m \leqslant X^2 \\ m \text{ неч}}} \cdots = \sum_{\substack{m \leqslant X^2 \\ m \text{ неч},\ m = b^2}} \cdots + \sum_{\substack{m \leqslant X^2 \\ m \text{ неч},\ m \neq b^2}} \cdots .$$

Соответственно,

$$S_1 = S_1' + \sum\nolimits_{II} + \sum\nolimits_{III},$$

где

$$S_1' := \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{l_1^2, l_2^2 \\ [l_1^2, l_2^2] \leqslant x}} G_{t_1} G_{t_2} (t_1 t_2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m^2 \leqslant X^2 \\ m \text{ неч}}} \frac{d(m^2, t_1, t_2, X)}{m^2} \sum_{\substack{N \leqslant Y \\ N \equiv 1 \pmod 8 \\ (N, m) = 1}} N,$$

$$\sum\nolimits_{II} := \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{l_1^2, l_2^2 \\ [l_1^2, l_2^2] \leqslant x}} G_{t_1} G_{t_2} (t_1 t_2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m \leqslant X^2 \\ m \text{ неч} \\ m \neq b^2}} \frac{d(m, t_1, t_2, X)}{m} \sum_{\substack{N \leqslant Y \\ N \equiv 1 \pmod 8}} N\left(\frac{-4N}{m}\right).$$

Сумму S_1' разделим на две:

$$S_1' = S_1'' + \sum\nolimits_{I},$$

где

$$S_1'' := \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{l_1^2, l_2^2 \\ [l_1^2, l_2^2] \leqslant x}} G_{t_1} G_{t_2} (t_1 t_2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{m^2 \leqslant X \\ m \text{ неч}}} \frac{d(m^2, t_1, t_2)}{m^2} \sum_{\substack{N \leqslant Y \\ N \equiv 1 \pmod 8 \\ (N, m) = 1}} N$$

и для нечетного m

$$d(m,t_1,t_2) := \sum_{m_1m_2=m} \left(\frac{t_1}{m_1}\right)\left(\frac{t_2}{m_2}\right);$$

$$\sum\nolimits_I := \frac{1}{\pi^2} \sum_{\substack{l_1^2,l_2^2\\ [l_1^2,l_2^2]\leqslant x}} G_{t_1}G_{t_2}(t_1t_2)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{X<m^2\leqslant X^2\\ m\ \text{неч}}} \frac{d(m^2,t_1,t_2,X)}{m^2} \sum_{\substack{N\leqslant Y\\ N\equiv 1 \pmod 8\\ (N,m)=1}} N.$$

Освобождаясь от условия взаимной простоты с помощью функции Мёбиуса $\mu(n)$, имеем

$$\sum_{\substack{N\leqslant Y\\ N\equiv 1 \pmod 8\\ (N,m)=1}} N = \frac{1}{2\cdot 8^2}Y^2\sum_{d|m}\frac{\mu(d)}{d} + O(Y\,d(m)), \tag{2.3}$$

где $d(m)$ – число делителей натурального m. Подставляя в S_1'' результат (2.3) и проводя элементарные вычисления, получаем

$$S_1'' = \frac{x^2}{2\cdot 8^2\cdot\pi^2}\sum_{\substack{l_1^2,l_2^2\\ [l_1^2,l_2^2]\leqslant x}} G_{t_1}G_{t_2}\frac{(t_1t_2)^{\frac{1}{2}}}{[l_1^2,l_2^2]^2}\sum_{\substack{m\leqslant X^{\frac{1}{2}}\\ m\ \text{неч}}}\frac{d(m^2,t_1,t_2)\cdot\varphi(m)}{m^3} + O\Big(x(\log x)^2\Big)$$

$$= \frac{x^2}{2\cdot 8^2\cdot\pi^2}\sum_{\substack{l_1^2,l_2^2\\ [l_1^2,l_2^2]<\infty}} G_{t_1}G_{t_2}\frac{(t_1t_2)^{\frac{1}{2}}}{[l_1^2,l_2^2]^2}\sum_{\substack{m<\infty\\ m\ \text{неч}}}\frac{d(m^2,t_1,t_2)\cdot\varphi(m)}{m^3}$$

$$+O\Big(x^{1+\varepsilon}\Big) + O\Big(x(\log x)^2\Big);$$

здесь $\varphi(m)$ – функция Эйлера.

Остается рассмотреть $\sum_I$, $\sum_{II}$ и $\sum_{III}$. Суммы $\sum_I$ и $\sum_{III}$ оцениваются очень просто; имеем

$$\sum\nolimits_I \ll x(\log x)^2,$$
$$\sum\nolimits_{III} \ll x^{\frac{1}{2}}(\log x)^3.$$

Сложнее обстоит дело с суммой $\sum_{II}$. Нам потребуется следующий результат работы [8]:

пусть $X \geqslant 2$, $Y \geqslant 2$, $D > 0$ – целое число, $(l, D) = 1$, тогда

$$\sum_{\substack{m \leqslant X \\ m \neq b^2 \\ (m, 2D)=1}} \left| \sum_{\substack{n \leqslant Y \\ n \equiv l \pmod D}} \left(\frac{n}{m}\right) \right|^2 \ll DXY(\log Y)^2. \tag{2.4}$$

Отметим, что (2.4) обобщает и уточняет известное неравенство Ютилы [9].

Величина

$$\sum_{\substack{N \leqslant Y \\ N \equiv 1 \pmod 8}} N\left(\frac{-4N}{m}\right)$$

в сумме $\sum_{II}$ может быть представлена как сумма не более чем $2Y$ слагаемых вида

$$\pm \sum_{\substack{N \leqslant Y_1 \\ N \equiv 1 \pmod 8}} \left(\frac{-4N}{m}\right), \quad 1 \leqslant Y_1 \leqslant Y.$$

Неравенство Коши, (2.4) и абелево суммирование дают

$$\sum_{m \leqslant X^2} \frac{d(m, t_1, t_2, X)}{m} \left| \sum_{\substack{N \leqslant Y_1 \\ N \equiv 1 \pmod 8}} \left(\frac{-4N}{m}\right) \right| \ll Y_1^{\frac{1}{2}} (\log X)^{\frac{7}{2}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{m \leqslant X^2} \frac{d(m, t_1, t_2, X)}{m} \left| \sum_{\substack{N \leqslant Y \\ N \equiv 1 \pmod 8}} N\left(\frac{-4N}{m}\right) \right| \ll Y^{\frac{3}{2}} (\log X)^{\frac{7}{2}}.$$

откуда получаем

$$\sum\nolimits_{II} \ll x^{\frac{3}{2}} (\log x)^{\frac{7}{2}}.$$

В итоге, имеем

$$S_1 = C_1 x^2 + O\left(x^{\frac{3}{2}} (\log x)^{\frac{7}{2}}\right),$$

где $C_1 > 0$ – константа. Остальные S_{N_0}, которые $\neq 0$, трактуются аналогично. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Аналитические свойства ряда $\sum_{n=1}^{\infty} r_3^2(n)n^{-s}$ (см. [1]) позволяют написать

$$\sum_{n\leqslant x} r_3^2(n) = Cx^2 + C'x^{\frac{3}{2}} + E(x),$$

где, с использованием терминологии Хафнера [10], $Cx^2 + C'x^{\frac{3}{2}}$ – "вычетная функция", $E(x)$ – "остаточный член"; имеем $E(x) = \Omega(x)$. Мы предполагаем, что $E(x) \ll x^{1+\varepsilon}$.

§3

Ниже u, u_1 – нечетные числа. Вывод оценки (1.5) начнем с формул Якоби:

$$r_4(u) = 8\sigma(u), \quad r_4(2^l u) = 24\sigma(u), \quad \text{где} \quad l \geqslant 1.$$

Справедлив следующий аналог известной формулы Рамануджана [11, (1.3.3)]:

$$\frac{\zeta_2(s)\zeta_2^2(s-1)\zeta_2(s-2)}{\zeta_2(s-2)} = \sum_{u\geqslant 1} \frac{\sigma^2(u)}{u^s}, \tag{3.1}$$

где

$$\zeta_2(s) = \prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Используя (3.1), по известной схеме получаем асимптотику

$$\sum_{u\leqslant x} \sigma^2(u) = \frac{7}{32}\zeta(3)x^3 + E_1(x), \tag{3.2}$$

$$E_1(x) \ll x^2(\log x)^2,$$

вполне аналогичную классической асимптотике Рамануджана для $\sum\limits_{n\leqslant x} \sigma^2(n)$ (см. [12]). Следуя соображениям работы [13], можно доказать несколько более сильный результат

$$E_1(x) \ll x^2(\log x)^{\frac{5}{3}}. \tag{3.3}$$

Используя теперь формулы Якоби и (3.3), получаем требуемый результат

$$\sum_{n\leqslant x} r_4^2(n) = 32\zeta(3)x^3 + O\Big(x^2(\log x)^{\frac{5}{3}}\Big).$$

Найдем среднее значение

$$\frac{2}{x}\sum_{u<x} E_1(u).$$

Без потери общности предположим, что $x > 0$ – нечётное число. Имеем

$$2\sum_{u<x}\sum_{u_1\leqslant u}\sigma^2(u_1) = \sum_{u\leqslant x}(x-u)\sigma^2(u). \tag{3.4}$$

Левая сторона равенства (3.4) с учетом (3.2) равна

$$\frac{2\cdot 7}{32}\zeta(3)\left\{\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + O(x^2)\right\} + 2\sum_{u<x} E_1(u).$$

Правая сторона равенства (3.4) с использованием формулы Перрона равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(4)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}G(s)\,ds, \tag{3.5}$$

где $G(s)$ – левая сторона равенства (3.1) и интегрирование идет по прямой $\sigma = 4$ ($s = \sigma + it$). В (3.5) сдвигаем прямую интегрирвания на $\sigma = \alpha$, где $1.7 < \alpha < 2$, α фиксировано. Тогда по теореме Коши величина (3.5) равна

$$\frac{2\cdot 7}{8\cdot 32}\zeta(3)x^4 - \frac{1}{48}\log 2\cdot x^3 + O\Big(x^{1+\alpha}\Big).$$

Следовательно, имеет место

Предложение 1.

$$\frac{2}{x}\sum_{u<x} E_1(u) = \left\{\frac{7}{32}\zeta(3) - \frac{1}{48}\log 2\right\}x^2 + O(x^\alpha).$$

Замечание 2. (i) Пусть $E_2(x)$ – остаточный член в асимптотике Рамануджана

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma^2(n) = \frac{5}{6}\zeta(3)x^3 + E_2(x).$$

Как доказал Смит [13], средним значением величины $E_2(x)$ является

$$-\frac{1}{12}x^2\log x.$$

(ii) В [1] ошибочно указано, что $\Delta_4(x) = \Omega\Big(x^2\log x\Big)$. На самом деле, мы, следуя Вальфишу [14, с. 95], можем получить лишь оценку

$$\Delta_4(x) = \Omega\Big(x^2\big(\log\log x\big)^2\Big),$$

уже приведенную в §1.

Литература

1. О. М. Фоменко, *Распределение целых точек на некоторых поверхностях второго порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 164–195.
2. M. Kühleitner, W. G. Nowak, *The averange number of solutions of the Diophantine equation $U^2 + V^2 = W^3$ and related arithmetic functions.* — Acta Math. Hungar. **104** (2004), No. 3, 225–240.
3. A. Schinzel, *On an analytic problem considered by Sierpiński and Ramanujan*, New trends in probability and statistics, Vol. 2 (Palanga, 1991), 165–171, VSP, Utrecht, 1992.
4. W. Müller, *The mean square of Dirichlet series associated with automorphic forms.* — Monatsh. Math. **113** (1992), No. 2, 121–159.
5. W. Müller, *The Rankin–Selberg method for non-holomorphic automorphic forms.* — J. Number Theory **51** (1995), No. 1, 48–86.
6. Хуа Ло-ген, *Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел*, М., 1964.
7. P. T. Bateman, *On the representations of a number as the sum of three squares.* — Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), No. 1, 70–101.
8. О. Сапарниязов, А. С. Файнлейб, *Дисперсия сумм действительных характеров и моменты $L(1,\chi)$.* — Известия АН Узб.ССР. Серия физ.-мат. наук (1975), No. 6, 24–29.
9. M. Jutila, *On character sums and class numbers.* — J. Number Theory **5** (1973), No. 3, 203–214.
10. J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions.* — Lect. Notes Math. **899** (1981), 148–165.
11. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
12. S. Ramanujan, *Some formulae in the analytic theory of numbers.* — Messenger Math. **45** (1916), 81–84.
13. R. A. Smith, *An error term of Ramanujan.* — J. Number Theory **2** (1970), No. 1, 91–96.
14. А. З. Вальфиш, *Целые точки в многомерных шарах*, Тбилиси, 1960.

Fomenko O. M. On the distribution of integral points on cones.

Let $r_k(n)$ denote the number of representations of a positive integer n as the sum of k squares. We prove that

$$\sum_{n\leqslant x} r_3^2(n) = Cx^2 + O\Big(x^{\frac{3}{2}}\big(\log x\big)^{\frac{7}{2}}\Big),$$

where $C > 0$ is a certain constant, and that

$$\sum_{n\leqslant x} r_4^2(n) = 32\zeta(3)x^3 + O\Big(x^2\big(\log x\big)^{\frac{5}{3}}\Big).$$

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 26 апреля 2010 г.