Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

О. М. Фоменко

ДРОБНЫЕ МОМЕНТЫ АВТОМОРФНЫХ L-ФУНКЦИЙ. II

Найдены асимптотики для дробных моментов автоморфных L-функций.

§1. Введение, результаты

Пусть

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (\sigma > 1, \ \text{ где } \ s = \sigma + it)$$

– дзета-функция Римана. Мультипликативная функция $d_k(n)$ (под мультипликативностью мы понимаем слабую мультипликативность) для вещественного $k \geqslant 0$ возникает из соотношения (подробности в [1])

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n)\, n^{-s} \quad (\sigma > 1).$$

Имеет место формула

$$d_k(n) = \prod_{p^\alpha \| n} \frac{k(k+1)\dots(k+\alpha-1)}{\alpha!}.$$

Справедливо неравенство

$$d_k(n) \ll n^{\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ любое и $\ll$-константа зависит от k и ε.

При $k = 2$ $d_k(n)$ совпадает с классической функцией $d(n)$ (количество делителей числа n).

Ключевые слова: автоморфные L-функции, критическая полоса, дробные моменты.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233).

Приведем несколько классических асимптотик для дробных моментов дзета-функции Римана (подробности см. в [2]).

1)
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_1^T\left|\zeta(\sigma+it)\right|^2dt=\zeta(2\sigma)\quad\left(\sigma>\frac{1}{2}\right);$$

2)
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_1^T\left|\zeta(\sigma+it)\right|^4dt=\frac{\zeta^4(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)}\quad\left(\sigma>\frac{1}{2}\right);$$

3) для $\quad 0<k<2$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_1^T\left|\zeta(\sigma+it)\right|^{2k}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}}\quad\left(\sigma>\frac{1}{2}\right);\tag{1}$$

4) в предположении гипотезы Римана, для $\quad k>0$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_1^T\left|\zeta(\sigma+it)\right|^{2k}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}}\quad\left(\sigma>\frac{1}{2}\right).$$

Турганалиев [3] (см. также работу [4], хотя в ней некоторые пункты вызывают сомнение) уточнил утверждение 3), доказав следующую асимптотическую формулу
$$\int\limits_1^T\left|\zeta(\sigma+it)\right|^{2k}dt=T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k^2(n)}{n^{2\sigma}}+O\left(T^{1-\lambda+\varepsilon}\right),$$
где $0<k<2$, $\frac{1}{2}<\sigma<1$, $\varepsilon>0$ – сколь угодно малое фиксированное число и $\lambda=\lambda(\sigma,k)>0$ – некоторое число; O-константа зависит от k, σ и ε. В предположении гипотезы Римана, Турганалиев показал, что $\lambda=\sigma-\frac{1}{2}$.

Цель настоящей работы – получить сходные результаты для некоторых автоморфных L-функций.

Рассмотрим пространство $S_\varkappa(\Gamma)$ голоморфных параболических форм
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_f(n)\exp(2\pi inz)$$

чётного веса $\varkappa \geqslant 12$ относительно полной модулярной группы $\Gamma = \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$, где $z = x+iy$, $y>0$; $S_\varkappa(\Gamma)^+$ – множество собственных форм Гекке с $a_f(1)=1$ из этого пространства. Ниже всегда $f \in S_\varkappa(\Gamma)^+$, причем форму f мы фиксируем. Положим

$$\lambda_f(n) = a_f(n)/n^{\frac{\varkappa-1}{2}};$$

по теории Гекке и классическому результату Делиня, для каждого простого p имеем

$$\lambda_f(p) = \alpha_p + \overline{\alpha}_p, \quad \alpha_p\overline{\alpha}_p = 1.$$

Каждой форме $f \in S_\varkappa(\Gamma)^+$ сопоставим следующие автоморфные L-функции, первоначально определенные в полуплоскости $\sigma > 1$:

$$L(s,f) = \prod_p \left(1-\alpha_p p^{-s}\right)^{-1}\left(1-\overline{\alpha}_p p^{-s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s}$$

(L-функция Гекке формы f);

$$\begin{aligned} L(s,\mathrm{sym}^2 f) &= \prod_p \left(1-\alpha_p^2 p^{-s}\right)^{-1}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}\left(1-\bar{\alpha}_p^2 p^{-s}\right)^{-1} \\ &= \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n^2)n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\nu(n,1)n^{-s} \end{aligned}$$

(L-функция симметрического крадрата формы f).

Введенные L-функции аналитически продолжаются на всю s-плоскость и являются целыми функциями; каждая из них обладает функциональным уравнением, связывающим значения в точках s и $1-s$.

Формулировку результатов начнем с более трудных для исследования моментов функции $L(s,\mathrm{sym}^2 f)$. Мы выбираем ветвь $\log L(s,\mathrm{sym}^2 f)$ посредством соотношения

$$\log L(s,\mathrm{sym}^2 f) = \sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_p^{2j}+1+\bar{\alpha}_p^{2j})}{j\,p^{js}} \quad (\sigma>1).$$

Теперь для $k>0$ через соотношение

$$L^k(s,\mathrm{sym}^2 f) = \exp\left\{k\log L(s,\mathrm{sym}^2 f)\right\} \quad (\sigma>1)$$

выбираем ветвь функции $L^k(s, \mathrm{sym}^2 f)$.

Определим коэффициенты $\nu(n,k)$ следующим разложением

$$L^k(s, \mathrm{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(n,k) n^{-s} \quad (\sigma > 1).$$

Легко видеть, что $|\nu(n,k)| \leqslant d_{3k}(n)$.

Теорема 1. *В предположении гипотезы Римана для $L(s, \mathrm{sym}^2 f)$, справедлива формула*

$$\int_1^T \left|L(\sigma + it, \mathrm{sym}^2 f)\right|^{2k} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n,k)^2}{n^{2\sigma}} + O\left(T^{1-\frac{2\sigma-1}{2(3-2\sigma)}+\varepsilon}\right), \qquad (2)$$

где $k > 0$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ и $\varepsilon > 0$ любое; O-константа зависит от k, σ и ε.

Доказательство приведено в §2. Отметим, что без гипотезы Римана получить асимптотику даже для какого-нибудь частного $k > 0$ (и с $\frac{1}{2} < \sigma < 1$) мы не можем.

Переходим к моментам функции $L(s,f)$. Определим для $k > 0$ коэффициенты $\nu_0(n,k)$ разложением

$$L^k(s,f) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_0(n,k) n^{-s} \quad (\sigma > 1).$$

Легко видеть, что $|\nu_0(n,k)| \leqslant d_{2k}(n)$.

Теорема 2. *В предположении гипотезы Римана для $L(s,f)$, справедлива формула*

$$\int_1^T \left|L(\sigma + it, f)\right|^{2k} dt = T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_0(n,k)^2}{n^{2\sigma}} + O\left(T^{1-\frac{2\sigma-1}{2(3-2\sigma)}+\varepsilon}\right), \qquad (3)$$

где $k > 0$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ и $\varepsilon > 0$ любое; O-константа зависит от k, σ и ε.

Доказательство аналогично доказательству асимптотики (2) и здесь не приводится. Без всяких гипотез формула (3) для $k = 1$ и $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ с остаточным членом $O(T^{2-2\sigma})$ была доказана Гудом в работе [5].

Используя этот результат Гуда, в §3 мы доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Для* $0 < k < 1$ *и* $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ *справедлива формула*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \left|L(\sigma + it, f)\right|^{2k} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu_0(n,k)^2}{n^{2\sigma}}.$$

Обозначения. К обозначениям, введенным выше, добавим еще несколько.

A, C_1, C_2 – достаточно большие константы;

B_1, $B_2, \ldots$ – достаточно большие константы, выбираемые в зависимости от выбора A;

$\delta > 0$ – достаточно малая константа;

$c_0(\delta)$, $c_1(\delta)$, $c_2(\delta)$ – положительные константы, зависящие от δ;

$w \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} w = \tau$.

§2. Доказательство теоремы 1

Мы, как и в [4], используем подход, основанный на формуле Перрона [6, с. 338]. Достаточно рассмотреть интеграл

$$\int\limits_{T^{1/2}}^{T} \left|L(\sigma + it, \operatorname{sym}^2 f)\right|^{2k} dt, \quad \frac{1}{2} < \sigma < 1.$$

Пусть $h = A \log T$, $Y > 0$. По формуле Перрона,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(n, 2k) e^{-(n/Y)^h} n^{-s} = \frac{1}{2\pi i h} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} L^{2k}(s + w, \operatorname{sym}^2 f) Y^w \Gamma(w/h)\, dw,$$

где

$$\sigma + b > 1, \quad b > 0.$$

По свойствам Г-функции,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(n, 2k)\, e^{-(n/Y)^h} n^{-s}$$
$$= \frac{1}{2\pi i h} \int\limits_{b-ih^2}^{b+ih^2} L^{2k}(s + w, \operatorname{sym}^2 f) Y^w \Gamma(w/h)\, dw + O\big(T^{-B_1}\big). \quad (4)$$

Пусть величина $\delta > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{2} \leqslant \sigma - \delta.$$

Сдвинем отрезок интегрирования в (4) на прямую

$$\operatorname{Re} w = \frac{1}{2} - \sigma + \frac{7}{8}\delta. \tag{5}$$

При этом мы проходим полюс $w = 0$ функции $\Gamma(w/h)$. Получим

$$L^{2k}(s, \operatorname{sym}^2 f) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(n, 2k) e^{-(n/Y)^h} n^{-s}$$

$$-\frac{1}{2\pi i h} \int\limits_I L^{2k}(s + w, \operatorname{sym}^2 f) Y^w \Gamma(w/h)\, dw + O\big(T^{-B_2}\big), \tag{6}$$

где интеграл берется по отрезку

$$I\colon |\tau| \leqslant h^2$$

прямой (5). Оценим рост величины $L(s + w, \operatorname{sym}^2 f)$ для $T^{1/2} \leqslant t \leqslant T$, $|\tau| \leqslant h^2$. Используем гипотезу Римана для $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ в форме: $\log L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ является регулярной функцией при $\sigma > \frac{1}{2}$.

Лемма 1. *В предположении гипотезы Римана для* $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$,

$$\log L(s, \operatorname{sym}^2 f) = O(\log t)$$

равномерно для $\sigma \geqslant \frac{1}{2} + \Delta$ $(\Delta > 0)$, *где* $t > C_1$, *причем* O*-константа зависит от* Δ.

Доказательство здесь не приводится. Оно основано на теореме Бореля–Каратеодори и аналогично соответствующему результату для $\zeta(s)$ (см. [7, с. 113]).

Лемма 2. *В предположении гипотезы Римана для* $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$,

$$\log L(1 + it, \operatorname{sym}^2 f) \ll \log \log \log t,$$

где $t > C_2$.

Доказательство следует доказательству аналогичного результата для $\zeta(s)$ [7, с. 125] и здесь не приводится. Нам достаточно оценки $\cdots \ll \log\log t$.

Функции $\log L\Big(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\delta + i(t+\tau)\Big)$ и $\log L(1 + i(t+\tau))$ оцениваются с помощью лемм 1 и 2 соответственно. По принципу Фрагмена–Линделёфа, получаем

$$\begin{aligned}\Big|\log L\Big(\frac{1}{2} + \frac{7}{8}\delta + i(t+\tau)\Big)\Big| &\\ \leqslant c_0(\delta)\big(\log T\big)^{1-(\delta/8)/(1/2-3\delta/4)}&\big(\log\log T\big)^{(\delta/8)/(1/2-3\delta/4)}\\ \leqslant c_1(\delta)\log T\cdot\left(\frac{\log\log T}{\log T}\right)^{c_2(\delta)\delta} &\leqslant \delta\log T \quad (T > T_\delta),\end{aligned}$$

поскольку при достаточно малом δ

$$c_2(\delta) \approx \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\left|L\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{8}\delta + i(t+\tau), \operatorname{sym}^2 f\right)\right| \leqslant T^\delta \quad (T > T_\delta). \tag{7}$$

На основании (7) мы можем оценить второй член в правой части равенства (6):

$$\frac{1}{2\pi i h}\int\limits_I L^{2k}(s+w, \operatorname{sym}^2 f)Y^w\Gamma(w/h)\,dw \ll \frac{1}{h}h^2T^{2k\delta}\,Y^{\frac{1}{2}-\sigma+\frac{7}{8}\delta}, \tag{8}$$

где $\ll$-константа зависит от δ. Исходя из (6), рассмотрим интегралы

$$J_1 = \int\limits_{T^{1/2}}^{T}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\nu(n,2k)\,e^{-(n/Y)^h}\,n^{-s}\right|dt$$

и

$$J_2 = \frac{1}{2\pi h}\int\limits_{T^{1/2}}^{T}\left|\int\limits_I L^{2k}(s+w, \operatorname{sym}^2 f)Y^w\Gamma(w/h)\,dw\right|dt.$$

Имеем

$$\int\limits_{T^{1/2}}^{T} \left|L(\sigma+it,\mathrm{sym}^2 f)\right|^{2k} dt = J_1 + O(J_2) + O\left(T^{-B_3}\right).$$

Полагая $Y = Th^{-4}$, с помошью (8) имеем

$$J_2 = O\left(T^{3/2-\sigma+(2k+1)\delta}\right), \tag{9}$$

где O-константа зависит от δ.

Переходим к вычислению интеграла J_1. Пусть N удовлетворяет неравенствам

$$Y^{1/2}h^2 \leqslant N \leqslant Yh^{-2} \ \left(\Longleftrightarrow T^{1/2} \leqslant N \leqslant Th^{-6}\right). \tag{10}$$

В силу (10), при $n \leqslant N$

$$e^{-(n/Y)^h} = 1 + O(h^{-2h}) = 1 + O\left(e^{-2h\log h}\right),$$

при $n > N^2$

$$e^{-(n/Y)^h} < e^{-(Yh^4/Y)^h} = e^{-h^{4h}}.$$

Далее,

$$\nu(n,2k) = \sum_{d|n} \nu(d,k)\nu(n/d,k).$$

Используя эти соотношения, имеем

$$J_1 = \int\limits_{T^{1/2}}^{T} \Bigg| \sum_{n\leqslant N} \nu(n,2k)\, e^{-(n/Y)^h} n^{-s} + \sum_{N<n\leqslant N^2} \nu(n,2k)\, e^{-(n/Y)^h} n^{-s}$$
$$+ \sum_{n>N^2} \nu(n,2k)\, e^{-(n/Y)^h} n^{-s} \Bigg| dt = \int\limits_{T^{1/2}}^{T} \Bigg| \sum_{n\leqslant N} \nu(n,k)\, n^{-s} \Bigg|^2 dt$$
$$+ O\Bigg(\int\limits_{T^{1/2}}^{T} \Bigg| \sum_{N<n\leqslant N^2} a_n\, n^{-s} \Bigg| dt \Bigg) + O\left(T^{-B_4}\right),$$

где

$$|a_n| \leqslant 2d_{6k}(n).$$

Нам потребуется следующий частный случай теоремы 7.1 [8].

Лемма 3. *Пусть*

$$S(s) = \sum_{n=1}^{N} b_n\, n^{-s}.$$

Тогда

$$\int\limits_{T_0}^{T_0+T} \Big|S(it)\Big|^2\, dt \ll (T+N) \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2$$

для произвольных положительных T_0 и T.

Разбивая интервал $(N, N^2]$ на подинтервалы вида $(Z, 2Z]$ (диадическое разбиение) и применяя затем неравенство Коши и лемму 3, имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{T^{1/2}}^{T} \Big|\sum_{N<n\leqslant N^2} a_n n^{-s}\Big|\, dt &\ll \sum_{Z} \int\limits_{T^{1/2}}^{T} \Big|\sum_{Z<n\leqslant 2Z} a_n n^{-s}\Big|\, dt \\
&\ll \sum_{Z} T^{1/2} \Big(\int\limits_{T^{1/2}}^{T} \Big|\sum_{Z<n\leqslant 2Z} a_n n^{-s}\Big|^2\, dt\Big)^{1/2} \\
&\ll \sum_{Z} T^{1/2} \Big\{(T+Z) \sum_{Z<n\leqslant 2Z} n^{\varepsilon}/n^{2\sigma}\Big\}^{1/2} \\
&\ll \sum_{Z} \Big\{\big(T + T^{1/2} Z^{1/2}\big) Z^{-\sigma+1/2+\varepsilon/2}\Big\} \\
&= \sum_{Z} \Big\{T\, Z^{-\sigma+1/2+\varepsilon/2} + T^{1/2}\, Z^{-\sigma+1+\varepsilon/2}\Big\} \\
&\ll T N^{1/2-\sigma+\varepsilon} + T^{1/2}\, N^{2-2\sigma+\varepsilon} = J_3 + J_4. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Нам необходим также известный результат Монтгомери и Вона [9].

Лемма 4. *Если $\{a_n\}$ – последовательность комплексных чисел такая, что $\sum n|a_n|^2$ сходится, то*

$$\int\limits_{0}^{T} \Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-it}\Big|^2\, dt = T \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + O\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2\Big),$$

где O-константа абсолютная

По лемме 4 и с помощью простых выкладок, имеем

$$\int\limits_{T^{1/2}}^{T} \Big| \sum_{n\leqslant N} \nu(n,k) n^{-s} \Big|^2 dt = \left(T - T^{1/2}\right) \sum_{n\leqslant N} \left|\nu(n,k)\right|^2 / n^{2\sigma}$$

$$+O\Big(\sum_{n\leqslant N} n\left|\nu(n,k)\right|^2 / n^{2\sigma} \Big) = \left(T - T^{1/2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left|\nu(n,k)\right|^2 n^{-2\sigma}$$

$$+O\left(TN^{1-2\sigma+\varepsilon}\right) + O\left(N^{2-2\sigma+\varepsilon}\right).$$

Сумма этих остаточных членов мажорируется суммой $J_3 + J_4$ (см. (11)). Выберем

$$N = T^{1/(3-2\sigma)};$$

при этом соблюдается условие (10). Тогда

$$J_3 + J_4 \ll T^{1-\frac{2\sigma-1}{2(3-2\sigma)}+\varepsilon}.$$

Выберем теперь δ настолько малым, чтобы для J_2 (см. (9)) выполнялось неравенство

$$J_2 \ll T^{1-\frac{2\sigma-1}{2(3-2\sigma)}+\varepsilon}.$$

Теорема 1 доказана.

§3. Доказательство теоремы 3

Асимптотику (1) впервые получил Ингам (1933). Другое доказательство дал Давенпорт (1935); оно приведено в книге Титчмарша [2, 7.11]. Для доказательства теоремы 3 мы применим метод Давенпорта, при этом ключевым моментом является использование асимптотики Гуда (см. §1).

Пусть

$$L_N(s,f) = \prod_{p<N} \left(1 - \lambda_f(p)p^{-s} + p^{-2s}\right)^{-1},$$
$$\eta_N(s) = L(s,f)/L_N(s,f).$$

Ниже $\lambda > 0$; тогда имеем

$$L_N(s,f)^\lambda = \prod_{p<N} \left(1 - \lambda_f(p)p^{-s} + p^{-2s}\right)^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_0'(n,\lambda) n^{-s},$$

где ряд абсолютно сходится для $\sigma > 0$,

$$\nu_0'(n,\lambda) = \nu_0(n,\lambda),$$

если $n < N$, и

$$0 \leqslant |\nu_0'(n,\lambda)| \leqslant d_{2\lambda}(n)$$

для всех n. Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_1^T \left|L_N(\sigma+it,f)\right|^{2\lambda} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_0'(n,\lambda)^2 n^{-2\sigma} \quad (\sigma > 0).$$

Отсюда следует соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \int_1^T \left|L_N(\sigma+it,f)\right|^{2\lambda} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_0^2(n,\lambda)\, n^{-2\sigma} \quad \left(\sigma > \frac{1}{2}\right). \tag{12}$$

Докажем теперь, что для $\frac{1}{2} < \sigma < 1$

$$\lim_{N\to\infty} \lim_{T\to\infty} \int_1^T \left|L(\sigma+it,f) - L_N(\sigma+it)\right|^{2k} dt = 0. \tag{13}$$

По неравенству Гёльдера,

$$\frac{1}{T} \int_1^T \left|L - L_N\right|^{2k} dt \leqslant \left\{\frac{1}{T} \int_1^T |\eta_N - 1|^2\, dt\right\}^k \left\{\frac{1}{T} \int_1^T |L_N|^{2k/(1-k)}\, dt\right\}^{1-k}. \tag{14}$$

Функция $\{\eta_N(s)-1\}^2$ всюду регулярна и имеет конечный порядок по t. Далее, для $\frac{1}{2}<\sigma<1$ получаем

$$\int\limits_1^T \left|\eta_N(\sigma+it)-1\right|^2 dt \leqslant \int\limits_1^T \left\{1+4^N\left|L(\sigma+it,f)\right|\right\}^2 dt = O(T),$$

если применить результат Гуда. Следовательно, по классической теореме Карлсона [6, 9.51], для $1/2<\sigma<1$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_1^T \left|\eta_N(\sigma+it)-1\right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_N^2(n)\,n^{-2\sigma},$$

где $\rho_N(n)$ – коэффициент при n^{-s} ряда Дирихле функции $\eta_N(s)-1$. Далее, $\rho_N(n)=0$ для $n<N$ и $0\leqslant\rho_N(n)|\leqslant d(n)$ для всех n. Из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} d^2(n)n^{-2\sigma}$$

следует, что

$$\lim_{N\to\infty}\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_1^T \left|\eta_N(\sigma+it)-1\right|^2 dt = 0. \tag{15}$$

Справедливость соотношения (13) вытекает из (14), (15) и (12).

Покажем теперь, что теорема 3 является легким следствием соотношений (12) и (13). Действительно, по известному неравенству [10, т. 28], имеем

$$\left\{\int\limits_1^T |L|^{2k}\,dt\right\}^R = \left\{\int\limits_1^T \left|L_N+L-L_N\right|^{2k} dt\right\}^R$$

$$\leqslant \left\{\int\limits_1^T |L_N|^{2k}\,dt\right\}^R + \left\{\int\limits_1^T \left|L-L_N\right|^{2k} dt\right\}^R,$$

где

$$\begin{aligned} R &= 1, && \text{если} \quad 0 \leqslant 2k \leqslant 1, \\ R &= 1/(2k), && \text{если} \quad 2k > 1. \end{aligned}$$

Сходно,

$$\left\{ \int\limits_1^T \left|L_N\right|^{2k} dt \right\}^R \leqslant \left\{ \int\limits_1^T \left|L\right|^{2k} dt \right\}^R + \left\{ \int\limits_1^T \left|L - L_N\right|^{2k} dt \right\}^R,$$

и справедливость теоремы 3 очевидна.

Литература

1. D. R. Heath-Brown, *Fractional moments of the Riemann zeta-function.* — J. London Math. Soc. (2) **24** (1981), 65–78.
2. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
3. Р. Т. Турганалиев, *Асимптотическая формула для средних значений дробной степени дзета-функции Римана.* — Труды Мат. инст-та АН СССР **158** (1981), 203–226.
4. И. Ш. Джаббаров, *Дробные моменты ζ-функции.* — Мат. заметки **38** (1985), 481–493.
5. A. Good, *Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind.* — Comment. Math. Helv. **50** (1975), 327–361.
6. Е. Титчмарш, *Теория функций.* М.-Л., 1951.
7. Е. Титчмарш, *Дзета-функция Римана.* М., 1947.
8. Г. Монтгомери, *Мультипликативная теория чисел.* М., 1974.
9. H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality.* — J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 73–82.
10. Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, М., 1948.
11. О. М. Фоменко, *Дробные моменты автоморфных L-функций.* — Алгебра и анализ **22** (2010), No. 2, 204–224.

Fomenko O. M. Fractional moments of automorphic L-functions. II.

Let $f(z)$ be a holomorphic Hecke eigencuspform of even weight $\varkappa \geqslant 12$ for $\mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$. We consider the automorphic L-functions $L(s,f)$ (Hecke's L-function of f) and $L(s,\mathrm{sym}^2 f)$ (Shimura's symmetric square L-function of f). Under the Riemann hypothesis for $L(s,\mathrm{sym}^2 f)$, we prove the following asymptotic formula as $T \to \infty$

$$\int\limits_1^T \left|L(\sigma+it,\mathrm{sym}^2 f)\right|^{2k} dt = C \cdot T + O\left(T^{1-(2\sigma-1)/\{2(3-2\sigma)\}+\varepsilon}\right),$$

where $k > 0$ and $\frac{1}{2} < \sigma < 1$.

We obtain an analogous result for $L(s, f)$ conditionally and the asymptotics

$$\int_1^T \left|L(\sigma + it, f)\right|^{2k} dt \sim C_1 \cdot T, \quad 0 < k < 1,$$

unconditionally.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 26 апреля 2010 г.