Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

Н. В. Проскурин

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НУЛЕЙ КУБИЧЕСКОЙ L–ФУНКЦИИ

В этой заметке мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с распределением вещественных частей нулей кубической L-функции. Напомним, что кубическая L-функция определяется рядом Дирихле

$$L(\tau; s) = \sum_{\nu} \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

В правой части суммирование осуществляется по всем ν вида $(\sqrt{-3})^{-3}\,\delta$, где $\delta \neq 0$ – целое число поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$, $\|\cdot\|\colon \mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,) \to \mathbb{Q}$ – норма ($\|z\| = z\bar{z}$), $\tau(\nu)$ – коэффициенты Фурье кубической тета-функции Куботы-Паттерсона, см. [1–2]. Ряд сходится абсолютно в полуплоскости Re $s > 1$ и определяет аналитическую функцию, имеющую мероморфное продолжение на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Эта функция была рассмотрена автором в [3]. Мы знаем, в частности, что функция

$$s \mapsto (2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s - 1/6)\,\Gamma(s + 1/6)\,L(\tau; s)$$

инвариантна относительно замены s на $1 - s$, и что $L(\tau;\cdot)$ не имеет особенностей помимо простого полюса в точке $5/6$. Нетривиальные нули функции $L(\tau;\cdot)$ расположены симметрично относительно вещественной прямой и относительно критической прямой Re $s = 0.5$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением нулей, лежащих в квадранте

$$\operatorname{Re} s \geq 0.5, \quad \operatorname{Im} s \geq 0.$$

Нули функции $L(\tau;\cdot)$, лежащие в этом квадранте вне критической прямой Re $s = 0.5$, занумеруем в порядке возрастания их мнимых частей – $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$. О некоторых методах и результатах вычисления нулей сообщалось ранее [4]. К настоящему моменту, посредством более совершенных методов автором вычислены все нули в квадранте

$$\operatorname{Re} s \geq 0.5, \quad 9002 > \operatorname{Im} s \geq 0.$$

Ключевые слова: кубическая L-функция, распределение нулей.

Эта работа частично финансировалась грантом РФФИ 08-01-00233 .

Все вычисленные нули – простые. Среди них имеется 27914 нулей на критической прямой и 8724 нуля – $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{8724}$ – вне критической прямой. Списки нулей можно найти на сайте
`http://www.pdmi.ras.ru/~np`.

Пусть $\sigma_n = \operatorname{Re}\rho_n$, $n = 1, 2, \dots$. Нас интересует распределение точек σ_n на вещественной оси. На рис. 1 изображена гистограмма распределения точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_{8724}$. Вычисления показывают, что $\sigma_n < 1$ для $n \leq 8724$. Мы принимаем гипотезу, сформулированную в [4], согласно которой все нетривиальные нули лежат в критической полосе, так что $\sigma_n < 1$ для всех $n = 1, 2, \dots$ [1]

Распределение точек σ_n можно рассмотреть с различных точек зрения. Наиболее естественным представляется следующий подход. Пусть I – открытый интервал, t – вещественное положительное число и

$$\nu_t(I) = \frac{\text{число нулей } \rho_n \text{ с } 0 < \operatorname{Im}\rho_n \leq t \text{ и } \operatorname{Re}\rho_n \in I}{\text{число всех нулей } \rho_n \text{ с } 0 < \operatorname{Im}\rho_n \leq t}.$$

Так определённые ν_t являются вероятностными мерами и мы можем рассмотреть предел

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \nu_t.$$

Если этот предел существует, мы можем надеяться найти плотность f предельной меры μ, т.е. такую функцию f, что

$$\mu(I) = \int\limits_I f(z)\,dz \quad \text{для всех открытых интервалов } I,$$

и соответствующую функцию распределения –

$$P(x) = \int\limits_{1/2}^{x} f(z)\,dz \quad \text{для всех } x \geq 0.5.$$

Для целого $m \geq 1$ и вещественного $x \geq 0.5$ положим

$$D_m(x) = \frac{1}{m}\{\text{число всех } n \leq m \text{ с } \sigma_n \leq x\}.$$

[1] В [3] доказано, что $\sigma_n < 1.3533$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

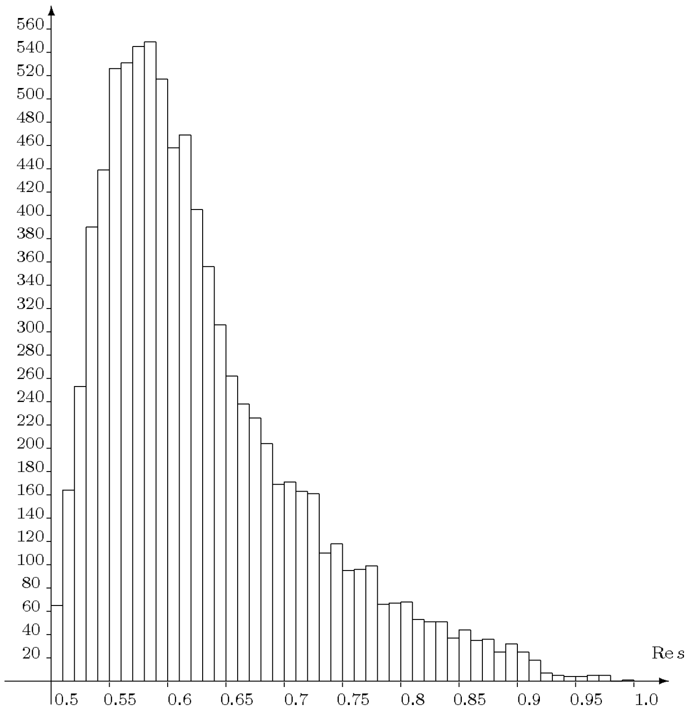

Рис. 1. Гистограмма распределения точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{8724}$. Отрезок $[0.5, 1]$ разбит на 50 отрезков длины 0.01. Если $[a, b]$ один из этих отрезков, то высота столбика над ним равна числу тех n, для которых $a < \sigma_n \leq\ b$.

Понятно, что функции D_m с большим m аппроксимируют функцию P и

$$\lim_{m\to\infty} D_m(x) = P(x) \quad \text{для всех } x.$$

Было бы очень интересно найти функцию f в каком-то явном виде или хотя бы сформулировать точную гипотезу. Это представляется весьма трудной проблемой. График функции f выглядит приблизительно как огибающая гистограммы, представленной на рис. 1, сжатая по вертикали с коэффициентом 100/8724. Наши вычисления показывают, что, по-видимому, $f(0.5) = 0$, функция f имеет максимум в некоторой точке $c \in [0.56, 0.6]$, возрастает на отрезке $[0.5, c]$, убывает на отрезке $[c, 1]$ и, наконец, $f(1) = 0$. Вблизи точки 0.5 функция f почти линейна, т.е. $f(x) = (x - 0.5)\,g(x)$ с некоторой функцией g, которая вблизи точки 0.5 почти постоянна. Труднее определить поведение f вблизи 1. В пределах наших вычислений, имеется только один нуль с вещественной частью > 0.98. Это ρ_{58} с мнимой частью $147.1889196\ldots$ и с вещественной частью $\sigma_{58} = 0.9948596\ldots$. Если наши наблюдения правильно отражают ситуацию, найдётся такое число $p < 1$, что $f(x) = 0$ для всех $x \geq p$, $f(x) \neq 0$ для $0.5 < x < p$ и $f(x)$ убывает приблизительно как $(x - p)^3$ при приближении x к p слева. По-видимому, точно определить функцию f по одним только вычислениям нулей невозможно.

Литература

1. S. J. Patterson, *A cubic analogue of the theta series* I, II. — J. reine angew. Math. **296** (1977), 125–161, 217–220.
2. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions.* — Lect. Notes Math. 1677 (1998).
3. Н. В. Проскурин, *О рядах Дирихле, ассоциированных с кубической тета-функцией.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 212–232.
4. Н. В. Проскурин, *Вычисление нулей L-функции, ассоциированной с кубической тета-функцией.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 180–194.

Proskurin N. V. On the distribution of the zeros of the cubic L-function.

The distribution of the real parts of the zeros of the cubic L-function is considered. Some observations based on numeric results are presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 1 сентября 2010 г.