

Г. В. Кузьмина

МЕТОД ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ МЕТРИКИ В ЗАДАЧЕ О МАКСИМУМЕ КОНФОРМНОГО ИНВАРИАНТА

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительная роль в современной геометрической теории функций принадлежит задачам об экстремальном разбиении (см., например, обзорные статьи [1, 2]).

Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ – система различных точек на z -сфере $\overline{\mathbb{C}}$, и пусть $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ – семейство систем $\{D_1, \dots, D_n\}$ неналегающих односвязных областей, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$. Через $M(D, a)$ обозначаем приведенный модуль области D относительно точки $a \in D$: $M(D, a) = \frac{1}{2\pi} \log R(D, a)$, если $a \neq \infty$, $M(D, \infty) = -\frac{1}{2\pi} \log R(D, \infty)$, где $R(D, a)$ – конформный радиус области D относительно точки $a \in D$. Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – система положительных чисел.

Задача о максимуме взвешенной суммы приведенных модулей

$$\mathcal{M}(\mathbf{a}; \alpha) = \max_{\{D_1, \dots, D_n\} \in \mathcal{D}(\mathbf{a})} \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 M(D_k, a_k) \quad (1)$$

в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ относится к основным задачам об экстремальном разбиении. В прямой связи с указанной задачей находится вопрос о максимуме по всем системам \mathbf{a} функционала вида

$$J(\mathbf{a}; \alpha) = 2\pi \mathcal{M}(\mathbf{a}; \alpha) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} \gamma_{k,l} \log |a_k - a_l| \quad (2)$$

($\gamma_{k,l}$ – надлежащие вещественные постоянные), являющегося инвариантом относительно группы Γ дробно-линейных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$. При $n = 2, 3$ указанные задачи совпадают, при $n = 4$ они различны.

В задаче о максимуме суммы (1) при $n = 2, 3$ известны классические результаты М. А. Лаврентьева (1934), Г. М. Голузина (1951),

Ключевые слова: экстремальная метрика, проблема модуля для семейства кривых, приведённый модуль области, конформный инвариант.

Л. И. Колбиной (1952, 1955) (см., например, [1]). При доказательствах в этих работах использовались вариационные методы. В настоящее время указанные результаты относятся к числу элементарных приложений метода экстремальной метрики.

Задача о максимуме инварианта

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{1}) = 2\pi\mathcal{M}(\mathbf{a}, \mathbf{1}) - \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \log |a_k - a_l| \quad (3)$$

в случае $n = 4$ решена в [3]: найден максимум этого инварианта для всех систем точек $\{a_1, \dots, a_4\}$ с данным ангармоническим отношением этих точек и, как следствие, найден максимум инварианта (3) для любых систем $\{a_1, \dots, a_4\}$. Другим путем последний результат был получен в [4]. Доказательства в [3, 4] довольно сложны. Так, в [4] использовался вариационный метод Шиффера.

Теория задач об экстремальном разбиении получила развитие в ряде работ. Так, В. Н. Дубинин ввёл в рассмотрение разделяющее преобразование конденсаторов и областей (см., например, работы [5, 6] и монографию [7]). Е. Г. Емельянов и А. Ю. Сольнин установили общие свойства модулей семейств кривых, указали связь между различными задачами об экстремальном разбиении, позволяющую в ряде случаев избежать сложной симметризационной техники (см. [8, 9] и обзорную статью [10]). Эти результаты получили разнообразные приложения (см. публикации в настоящей серии “Записок научных семинаров ПОМИ”).

Что касается задачи о максимуме функционала (2), то при $n=4$ максимум этого инварианта в случае симметричной системы $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2\}$ найден в [11], в случае системы $\alpha = \{3, 1, 1, 1\}$ – в [12]. Доказательства в [11, 12] используют различные соображения геометрического характера.

В случае $n = 5$ максимум функционала (3) для систем точек, симметричных относительно окружности (или прямой) найден в [13], при несколько другом условии – в [7].

Других результатов общего характера в задаче о максимуме инварианта вида (2) в настоящее время неизвестно.

Данная работа имеет целью продемонстрировать применение чисто экстремально-метрического подхода при решении задач об экстремальном разбиении. В п. 2 настоящей работы исследуются задачи о максимуме суммы (1) и максимуме инварианта (2) для четверок

точек с различным ангармоническим отношением и при различных значениях весовых параметров $\alpha = \{\alpha, 1, 1, 1\}$ (теоремы 1 и 2). Предлагаемое доказательство основывается на результатах теории задач об экстремальном разбиении и использует структуру траекторий ассоциированного квадратичного дифференциала.

2. ТЕОРЕМЫ О МАКСИМУМЕ КОНФОРМНОГО ИНВАРИАНТА

2.1. Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ – система различных точек $\overline{\mathbb{C}}$, и пусть $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ – семейство систем $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ неналегающих односвязных областей на $\overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in D_k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$J_z(\mathbf{a}, \alpha) = 2\pi\mathcal{M}(a_1, a_2, a_3, a_4; \alpha, 1, 1, 1) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \{\log|a_2 - a_3| + \log|a_2 - a_4| + \log|a_3 - a_4|\} - \frac{2\alpha^2}{3} \{\log|a_1 - a_2| + \log|a_1 - a_3| + \log|a_1 - a_4|\}. \quad (4)$$

Величина $J_z = J_z(\mathbf{a}, \alpha)$ – инвариант относительно группы Γ дробно-линейных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$: если $\tau(z) \in \Gamma$, то из равенств

$$R(\tau(D), \tau(a)) = R(D, a)|\tau'(a)|, \quad |\tau(a) - \tau(b)|^2 = |a - b|^2|\tau'(a)\tau'(b)|$$

следует, что $J_\tau = J_z$.

В дальнейшем систему $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ обозначаем через $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$. $\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha, 1, 1, 1)$ и $J(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha, 1, 1, 1)$ обозначаем через $\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha)$ и $J(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha)$, а также через $\mathcal{M}(\mathbf{a}; \alpha)$ и $J(\mathbf{a}; \alpha)$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, где $a_0 = 0$, a_1, a_2, a_3 – точки окружности $|z| = 1$. При $\alpha \geq 1$ максимум суммы $\mathcal{M}(\mathbf{a}; \alpha)$ в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a})$ достигается, с точностью до преобразования поворота, только для симметричной системы точек $\mathbf{a}^* = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$, где $\omega = e^{2i\pi/3}$, и системы круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q^{(1)}(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{(9 - \alpha^2)z^3 + \alpha^2}{z^2(z^3 - 1)^2} dz^2.$$

Имеем равенство

$$2\pi\mathcal{M}(\mathbf{a}^*; \alpha) = -\frac{1}{3} \{(\alpha + 3)^2 \log(\alpha + 3) + (\alpha - 3)^2 \log|\alpha - 3| - \alpha^2 \log(4\alpha^2)\} + 3 \log 12. \quad (5)$$

При $\alpha \geq \sqrt{3}$ максимум $J^{(1)}(\alpha)$ функционала $J(\mathbf{a}; \alpha)$ для всех указанных систем \mathbf{a} достигается, с точностью до преобразований из группы Γ , только для системы точек $\mathbf{a}^* = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$,

$$J^{(1)}(\alpha) = 2\pi\mathcal{M}(\mathbf{a}^*; \alpha) - (1 - \alpha^2/3) 3 \log \sqrt{3}.$$

2.2. Доказательство. Пусть

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad 0 < \arg a_2 < \arg a_3 < 2\pi.$$

Положим

$$\lambda_k = \arg \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad (a_4 = a_1), \quad 0 < \lambda_k < 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad \sum_{k=1}^3 \lambda_k = 1.$$

Рассмотрим разбиение z -сферы на углы

$$S_k = \{0 < |z| < \infty, \quad \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

При отображении

$$w = f_k(z) = \left\{ \frac{z}{a_k} \right\}^{1/(3\lambda_k)} \quad (6)$$

углу S_k соответствует угол

$$S_k^* = \{w : 0 < |w| < \infty, \quad 2\pi(k-1)/3 < \arg w < 2\pi k/3\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

На w -сфере рассмотрим экстремальную конфигурацию задачи о $\mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2; \alpha)$. Ассоциированным квадратичным дифференциалом этой задачи служит дифференциал

$$Q^{(1)}(w)dw^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{(9 - \alpha^2)w^3 + \alpha^2}{w^2(w^3 - 1)^2} dw^2, \quad (7)$$

точки $0, 1, \omega, \omega^2$ служат полюсами второго порядка этого дифференциала. Структура траекторий и ортогональных траекторий дифференциала (7) обладает симметрией относительно каждого из трех лучей, выходящих из начала координат соответственно под углами $0,$

$2\pi/3, 4\pi/3$ к вещественной оси w -плоскости. Наряду с дифференциалом (7) введем в рассмотрение дифференциал

$$-Q^{(1)}(w)dw^2. \quad (8)$$

Обратимся к структуре траекторий этого дифференциала.

Пусть $1 \leq \alpha < 3$. В этом случае нули $b_k = \{\alpha^2/(9 - \alpha^2)\}^{1/3} e^{i\pi(2k-1)/3}$, $k = 1, 2, 3$, дифференциала (8) лежат на биссектрисах углов S_k^* . Через $T(a, b)$ обозначаем траекторию этого дифференциала, соединяющую точки a и b , через $T[a, b]$ – ее замыкание. В структуре траекторий дифференциала (8) имеется 6 полосообразных областей: P_1, P_2, P_3 и P_4, P_5, P_6 . Здесь P_1 – двуугольник с вершинами 0 и 1 и внутренними углами в этих вершинах, равными $2\pi/3$ и $2\pi\alpha/3$. Одной из сторон P_1 является объединение отрезка $[0, b_1]$ и дуги $T[b_1, 1]$, другой стороной – объединение отрезка $[0, b_3]$ и дуги $T[b_3, 1]$. Двуугольник P_1 содержит отрезок $(0, 1)$ и разделяется вещественной осью w -плоскости на двуугольники P_1^- и P_1^+ , где $b_1 \in \partial P_1^-$, $b_3 \in \partial P_1^+$, симметричные относительно этой оси. Области P_3 и P_5 являются образами P_1 соответственно при преобразованиях $w \rightarrow \omega w$ и $w \rightarrow \omega^2 w$. Двуугольник P_2 имеет вершины 1 и ω и внутренние углы в этих вершинах, равные $\pi(1 - 2\alpha/3)$. Одна из сторон этого двуугольника образуется дугами $T[1, b_1]$ и $T[\omega, b_1]$, другая является объединением полупрямых $\{w = t, t \geq 1\}$ и $\{w = \omega t, t \geq 1\}$. Двуугольник P_2 содержит полупрямую $\{w = b_1 t, t \geq 1\}$ и симметричен относительно этой полупрямой. P_4 и P_6 являются образами P_2 соответственно при преобразованиях $w \rightarrow \omega w$ и $w \rightarrow \omega^2 w$.

Случай $\alpha = 3$ является предельным для $\alpha < 3$. В этом случае дифференциал (8) имеет нуль шестого порядка в точке $w = \infty$, являющейся предельной концевой точкой шести траекторий этого дифференциала. Эти траектории являются полупрямыми, выходящими из начала координат или имеющими начало координат на своих продолжениях. Поэтому все граничные дуги полосообразных областей дифференциала (8) расположены на границах углов S_k^* и биссектрисах этих углов.

При $\alpha > 3$ нули b_k , $k = 1, 2, 3$, дифференциала (8) лежат на полупрямых, являющихся сторонами углов S_k^* , и структура траекторий этого дифференциала существенно отличается от предыдущего случая. Имеется 6 полосообразных областей дифференциала (8):

P_1, \dots, P_6 . Двуугольник P_1 имеет своими вершинами точки 0 и 1, внутренние углы в этих вершинах, равные $2\pi/\alpha$ и 2π , его противоположными сторонами служат отрезок $[0, 1]$ и объединение отрезка $[1, b_1]$ и замыканий траекторий $T^+(0, b_1)$ и $T^-(0, b_1)$ дифференциала (8), соединяющих указанные точки и лежащих соответственно в верхней и нижней полуплоскостях w -плоскости. Двуугольник P_2 имеет обе свои вершины в начале координат и внутренние углы в этих вершинах, равные $(\pi/3)(1 - 3/\alpha)$. Противоположные стороны двуугольника P_2 образуются сторонами угла S_1^* и замыканиями траекторий $T^+(0, b_1)$ и $T^-(0, b_1)$. Двуугольники P_3 и P_4 соответствуют двуугольникам P_1 и P_2 при преобразовании $w \rightarrow e^{2i\pi/3}w$, P_5 и P_6 соответствуют тем же двуугольникам при преобразовании $w \rightarrow e^{4i\pi/3}w$.

Пусть $1 \leq \alpha < 3$. В силу симметрии системы полособразных областей дифференциала (8) относительно сторон углов S^* , $k = 1, 2, 3$, имеем равенство

$$\mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2) = 3\{2h_1^2 M(P_1^+) + h_2^2 M(P_2)\},$$

где

$$h_1 = \frac{\alpha}{6}, \quad h_2 = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6}.$$

Пусть $f_k(P)$ – прообразы двуугольника P при отображениях (6). По формуле преобразования приведенных модулей двуугольников при конформном отображении [8, 10] получаем

$$\begin{aligned} M(f_k(P_1^+)) &= M(P_1^+) + \frac{1}{2\pi\alpha/6} \log(3\lambda_k), \\ M(f_k(P_2)) &= M(P_2) + \frac{1}{\pi(1 - \alpha/3)} \log(3\lambda_k), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^3 \{2h_1^2 M(f_k(P_1^+)) + h_2^2 M(f_k(P_2))\} \\ &= 3\{2h_1^2 M(P_1^+) + h_2^2 M(P_2)\} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \log(3\lambda_k). \end{aligned}$$

По теореме о связи двух задач об экстремальном разбиении [9, 10], отсюда вытекает неравенство

$$\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha) \leq \mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2; \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \log(3\lambda_k). \quad (9)$$

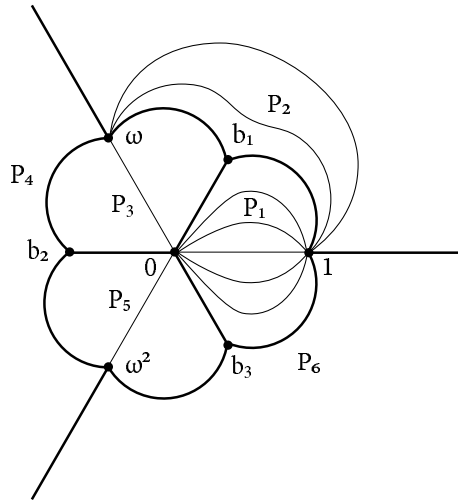


Рис. 1. ($1 < \alpha < 3$).

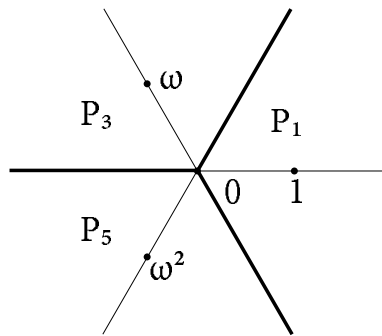
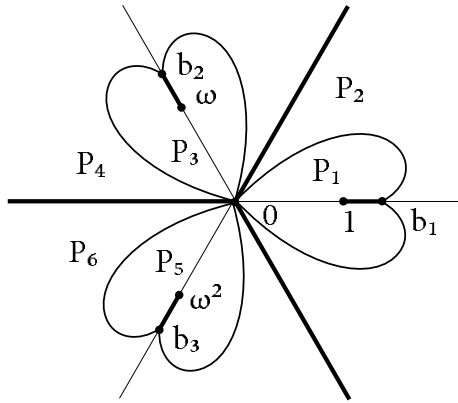


Рис. 2. ($\alpha = 3$).

Очевидно, неравенство (9) справедливо и при $\alpha = 3$.

Пусть теперь $\alpha > 3$. Тогда (пользуемся обозначениями рис. 3)

$$\mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2; \alpha) = 3\{h_1^2 M(P_1) + h_2^2 M(P_2)\},$$

Рис. 3. ($\alpha > 3$).

где

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\alpha}.$$

По формуле преобразования приведенных модулей двуугольников,

$$\begin{aligned} M(f_k(P_1)) &= M(P_1) + \frac{1}{2\pi} \log(3\lambda_k), \\ M(f_k(P_2)) &= M(P_2) \end{aligned}$$

и потому

$$\sum_{k=1}^3 \{h_1^2 M(f_k(P_1)) + h_2^2 M(f_k(P_2))\} = \mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2; \alpha) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \log(3\lambda_k).$$

Следовательно, неравенство (9) справедливо при всех $\alpha \geq 1$. Очевидно также, что равенство в (9) достигается только при $\lambda_k = 1/3$, $k = 1, 2, 3$.

Остановимся на доказательстве неравенства (9), основывающимся на свойстве допустимой метрики проблемы модуля.

Метрика

$$\rho^*(w)dw^2 = |Q^*(w)|^{1/2}|dw| \quad (10)$$

является экстремальной метрикой проблемы модуля $\mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2)$. Метрика (10) индуцирует на z -сфере метрику

$$\rho(z)|dz| = \rho^*(f_k(z))|f'_k(z)||dz|, \quad z \in S_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Нетрудно убедиться, что эта метрика допустима в проблеме модуля $\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha)$.

Действительно, пусть γ – кривая на $\overline{\mathbb{C}}$, гомотопная точечной кривой в точке $a_0 = 0$. Эта кривая отделяет точку a_0 от a_1, a_2, a_3 и потому пересекается с каждым из отрезков $(0, a_k)$, $k = 1, 2, 3$. Пусть γ_k – дуга кривой γ , пересекающая отрезки $(0, a_1)$ и $(0, a_2)$ и имеющая непустое пересечение с S_1 . Пусть γ_k^* – образ множества $\gamma \cap S_1$ в угле S_1^* . Множество γ_k^* содержит дуги, соединяющие противоположные стороны каждого из двуугольников P_1^+ и $P_3^- = P_3 \cap S_1^*$, а при $\alpha > 3$ также и дуги, соединяющие противоположные стороны двуугольников P_2 и P_4 . Другими словами, γ_k^* содержит дуги, соединяющие противоположные стороны каждого из двуугольников, имеющих общую вершину в начале координат и в совокупности заполняющих угол S_1^* . Аналогичным свойством обладают кривые γ_2 и γ_3 . Следовательно, длина кривой γ в ρ -метрике $\geq 3 \cdot \frac{1}{3}\alpha = \alpha$.

Пусть теперь γ – кривая, гомотопная точечной кривой в одной из точек a_1, a_2, a_3 , пусть в точке a_1 . Кривая γ пересекает каждый из отрезков $(0, 1)$ и $w \geq 1$. Пусть $\gamma_1 = \gamma \cap S_1$, γ_1^* – образ этого множества в угле S_1^* . Множество γ_1^* содержит дуги, соединяющие противоположные стороны двуугольников P_1^+ и P_2 в случае $1 \leq \alpha < 3$ и противоположные стороны двуугольника P_1^+ , возможно, и двуугольника P_2 в случае $\alpha > 3$. Поэтому длина γ_1 в ρ -метрике $\geq 1/2$, а длина всей кривой γ в ρ -метрике ≥ 1 .

Это показывает, что метрика (10) допустима в рассматриваемой проблеме модуля.

Из указанного свойства метрикам (10) и формулы преобразования приведенного модуля области при конформном отображении вновь вытекает неравенство (9).

Из неравенства (9) и равенства

$$\sum_{1 \leq k < l \leq 3} \log |a_k - a_l| = \sum_{k=1}^3 \log(2 \sin \pi \lambda_k)$$

получаем

$$\begin{aligned} & 2\pi\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \sum_{1 \leq k < l \leq 3} \log |a_k - a_l| \\ & \leq 2\pi\mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2; \alpha) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) 3 \log \sqrt{3} \\ & + \sum_{k=1}^3 \left\{ \log(3\lambda_k) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \log(2 \sin \pi \lambda_k) \right\} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) 3 \log \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что при условии $\alpha^2 \geq 3$ при всех рассматриваемых значениях $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\sum_{k=1}^3 \left\{ \log(3\lambda_k) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \log(2 \sin \pi \lambda_k) \right\} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) 3 \log \sqrt{3} \leq 0, \quad (11)$$

и равенство в (11) достигается при $\lambda_k = 1/3$, $k = 1, 2, 3$, и только при этих значениях λ_k . Следовательно,

$$\begin{aligned} & 2\pi\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3; \alpha) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \sum_{1 \leq k < l \leq 3} \log |a_k - a_l| \\ & \leq 2\pi\mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2; \alpha) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) 3 \log \sqrt{3}, \end{aligned}$$

и равенство достигается только при $\lambda_k = 1/3$, $k = 1, 2, 3$, т.е. в случае, указанным в формулировке теоремы.

Что касается случая $\alpha \leq 1$, то оказывается несколько неожиданным, что при $\alpha = 1$ полученное неравенство для $\mathcal{M}(a_0, a_1, a_2, a_3; 1)$ является недостаточным для доказательства того факта (см. [3, 4]), что максимум инварианта $J(\mathbf{a}; 1)$ для всех рассматриваемых систем \mathbf{a} достигается для симметричной системы $\mathbf{a}^* = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$. Действительно, существуют значения λ_k , $k = 1, 2, 3$, удовлетворяющих требуемым условиям, для которых выражение (11) при $\alpha = 1$ оказывается положительным.

Пользуясь выражением (12) для дифференциала $Q^{(1)}(z)dz^2$ и известными дифференциальными уравнениями для функций, отображающих круговые области квадратичного дифференциала на круг, приходим к равенствам для $\mathcal{M}(0, 1, \omega, \omega^2; \alpha)$ и для максимума инварианта (4).

2.3. Теорема 2. Пусть $\mathbf{a}(t) = \{\infty, -1, 0, t\}$, $0 < t \leq 1$, – система точек, лежащих на одной прямой, и пусть $\alpha = \{\alpha, 1, 1, 1\}$. При $1 \leq \alpha \leq \sqrt{3}$ максимум суммы $\mathcal{M}(\mathbf{a}^*; \alpha)$ в семействе $\mathcal{D}(\mathbf{a}(t))$ достигается только для системы точек $\mathbf{a}(1) = \{\infty, -1, 0, 1\}$ и для системы круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q^{(2)}(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\alpha^2 w^4 + (3 - \alpha^2)w^2 + 1}{z^2(z-1)^2} dz^2.$$

Имеем равенство

$$2\pi\mathcal{M}(\mathbf{a}(1), \alpha) = -\frac{1}{4}\{(\alpha-1)^2 \log(\alpha-1) + (\alpha+1)^2 \log(\alpha+1) + (\alpha+3)^2 \log(\alpha+3) + (\alpha-3)^2 \log|\alpha-3| - 2\alpha^2 \log(4\alpha^2)\} + 7 \log 2.$$

Пусть $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ – система точек, лежащих на одной прямой или окружности. При $1 \leq \alpha \leq 3$ максимум $J^{(2)}(\alpha)$ функционала $J(\mathbf{a}; \alpha)$ для всех указанных систем \mathbf{a} достигается, с точностью до преобразований из группы Γ , только для системы точек $\mathbf{a}(1) = \{\infty, -1, 0, 1\}$,

$$J^{(2)}(\alpha) = 2\pi\mathcal{M}(\mathbf{a}(1); \alpha) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right) \log 2.$$

2.4. Доказательство. Пусть $\mathbf{a} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ – система точек, лежащих на одной окружности или прямой. Задача о максимуме инварианта $J(\mathbf{a}; \alpha)$ для указанных систем точек в случае $\alpha = 1$ решается крайне просто. Действительно, достаточно считать, что

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{e^{i\beta}, e^{-i\beta}, -e^{i\beta}, -e^{-i\beta}\}, 0 < \beta \leq \pi/4.$$

Эту систему точек обозначим через $\mathbf{a}(\beta)$. Экстремальную систему областей $\{D_0, D_1, D_2, D_3\}$ задачи о $\mathcal{M}(\mathbf{a}(\beta); 1)$ образуют координатные углы, $a_k \in D_k$, $R(D_k, a_k) = \sin 2\beta$, $k = 0, 1, 2, 3$; $2\pi\mathcal{M}(\mathbf{a}(\beta); 1) = 4 \log(\sin 2\beta)$ и

$$J(\mathbf{a}(\beta); 1) = 4 \log(\sin 2\beta) - \frac{4}{3} \log(4 \sin 2\beta).$$

Максимум правой части последнего равенства – обозначим его через $J^{(2)}(1)$ – достигается при $\beta = \pi/4$ и равен $\log 4^{-4/3}$. Естественно, $J^{(2)}(1)$ меньше максимума $J(1)$ инварианта $J(\mathbf{a}; 1)$ для всех систем \mathbf{a} : $J(1) = \log(4^{-8/3} 3^3) > J^{(2)}(1)$ [3].

2.5. При $\alpha = 1$ задача оказывается значительно более сложной. Пусть четверка точек (a_0, a_1, a_2, a_3) лежит на одной прямой. Можем считать, что

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{\infty, -1, 0, t\}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Ассоциированным квадратичным дифференциалом задачи о $\mathcal{M}(\infty, -1, 0, t; \alpha)$ служит дифференциал

$$Q^{(2)}(z, t)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{P(z)}{(z+1)^2 z^2 (z-t)^2} dz^2;$$

здесь $P(z) = \alpha^2 z^4 + \dots$ – полином четвертой степени, для определения которого, в силу нормирующих условий теоремы 2, имеем равенства

$$P(0) = t^2, \quad P(-1) = (1+t)^2, \quad P(t) = t^2(1+t)^2.$$

Для дифференциала $Q^{(2)}(z)dz^2 = Q^{(2)}(z, 1)dz^2$, определяющего экстремальную конфигурацию задачи о $\mathcal{M}(\infty, -1, 0, 1; \alpha)$, имеем простое выражение:

$$Q^{(2)}(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\alpha^2 z^4 + (3 - \alpha^2)z^2 + 1}{z^2(z^2 - 1)^2} dz^2, \quad (14)$$

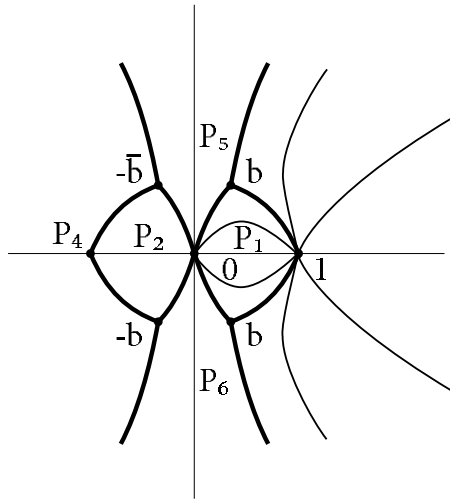
точки $\infty, 1, 0, -1$ – двойные полюсы этого дифференциала. Дадим краткое описание структуры траекторий дифференциала

$$-Q^{(2)}(z)dz^2. \quad (15)$$

При $1 < \alpha < 3$ нулями дифференциала (15) являются $b, -b, \bar{b}, -\bar{b}$, где

$$b = \rho e^{i\beta}, \quad \rho = 1/\sqrt{\alpha}, \quad \beta = \arcsin \sqrt{(3 + 2\alpha - \alpha^2)/4\alpha}.$$

В структуре траекторий дифференциала (15) присутствуют 6 пологообразных областей: P_1, \dots, P_6 . Двухугольник P_1 имеет вершинами точки 0 и 1, содержит на границе нули b и \bar{b} дифференциала (15) и заполнен траекториями этого дифференциала, соединяющими точки 0 и 1. Двухугольник $P_2 = \{-z : z \in P_1\}$ имеет вершинами точки 0, -1 и содержит на границе нули $-b, -\bar{b}$ дифференциала (15). Двухугольник P_3

Рис. 4. ($1 < \alpha < 3$).

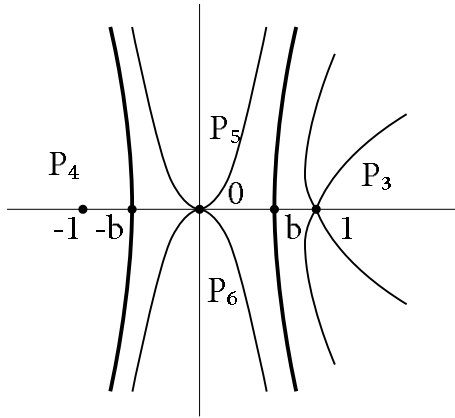
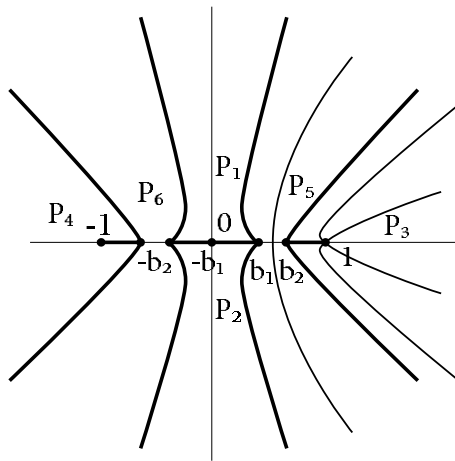
имеет вершинами точки $1, \infty$ и содержит на границе нули b и \bar{b} , двуугольник $P_4 = \{-z : z \in P_3\}$ имеет вершинами точки -1 и ∞ , содержит на границе нули $-b$ и $-\bar{b}$. Каждый из двуугольников P_1, \dots, P_4 симметричен относительно вещественной оси z -плоскости. Двуугольник P_5 имеет вершинами точки $0, \infty$, содержит на границе $b, -b$ и расположен в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Двуугольник $P_6 = \{-z : z \in P_5\}$ имеет вершины в тех же точках 0 и ∞ , содержит на границе $\bar{b}, -\bar{b}$ и расположен в полуплоскости $\text{Im } z < 0$ (см. рис. 4).

Случай $\alpha = 3$ – предельный для предыдущего случая. Дифференциал (15) имеет двойные нули в точках $1/3$ и $-1/3$, области P_1 и P_2 вырождаются и в структуре траекторий дифференциала (15) присутствуют 4 полосообразные области: P_3, P_4, P_5 и P_6 (см. рис. 5).

При $\alpha > 3$ дифференциал (15) имеет 4 различных нуля $b_1, b_2, -b_1, -b_2$ на вещественной оси: $-1 < -b_2 < -b_1 < 0 < b_1 < 1 < b_2$, где

$$b_1^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ \alpha^2 - 3 - \sqrt{(\alpha^2 - 3)^2 - 4\alpha^2} \right\},$$

$$b_2^2 = \frac{1}{2\alpha^2} \left\{ \alpha^2 - 3 + \sqrt{(\alpha^2 - 3)^2 - 4\alpha^2} \right\},$$

Рис. 5. ($\alpha = 3$).Рис. 6. ($\alpha > 3$).

и в структуре траекторий присутствуют 6 полосообразных областей: P_1, \dots, P_6 . Двухугольник P_1 имеет вершинами 0 и ∞ , содержит

на границе нули b_1 и $-b_1$ и расположен в верхней полуплоскости, $P_2 = \{-z : z \in P_1\}$. Двуугольник P_3 имеет вершинами 1 и ∞ и содержит на границе отрезок $[0, b_2]$, $P_4 = \{-z : z \in P_3\}$. P_5 имеет обе вершины в ∞ и содержит на границе точки b_1 и b_2 , $P_6 = \{-z : z \in P_5\}$. Каждый из двуугольников P_3, \dots, P_6 симметричен относительно вещественной оси z -плоскости (см. рис. 6).

При исследовании величины $\mathcal{M}(\infty, -1, 0, t; \alpha)$ можно построить разбиение z -сферы на двуугольники с вершинами в отмеченных точках и исследовать выполнение согласования параметров в теореме о связи двух задач об экстремальном разбиении [9, 10]. В качестве альтернативного подхода применим теорему о зависимости модуля экстремально-метрической проблемы от полюса второго порядка ассоциированного квадратичного дифференциала [9, 10]. Пусть

$$\tilde{Q}^{(2)}(z) = 4\pi^2 Q^{(2)}(z, t)(z - t)^2.$$

По указанной теореме в [9, 10],

$$2\pi \frac{d}{dt} \mathcal{M}(\infty, -1, 0, t; \alpha) = \frac{d}{dt} \tilde{Q}^{(2)}(z, t) \Big|_{z=t}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\infty, -1, 0, t; \alpha) = & \left\{ - \frac{P'(z)z(z+1) - P(z)2(2z+1)}{z^3(z+1)^3} \right. \\ & \left. - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right) \frac{1+2z}{z(1+z)} \right\} \Big|_{z=t}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $P(z)$ – полином в (12). В силу условия в (13), $P(t) = t^2(1+t)^2$ и из (16) получаем

$$\frac{d}{dt} J(\infty, -1, 0, t; \alpha) = - \frac{P'(t)}{t^2(1+t)^2} + \frac{1+2t}{t(1+t)} \left(1 + \frac{\alpha^2}{3} \right). \quad (17)$$

При $t = 1$ имеем $P'(1) = 2(3 + \alpha^2)$,

$$\frac{d}{dt} J(\infty, -1, 0, 1; \alpha) = 0.$$

Из хорошо известных оценок для произведения конформных радиусов неналегающих областей следует, что при всех достаточно малых $t \in (0, 1)$

$$J(\infty, -1, 0, t; \alpha) < J(\infty, -1, 0, 1; \alpha).$$

Предположив, что существует значение $t \in (0, 1)$, для которого $J(\infty, -1, 0, t; \alpha) > J(\infty, -1, 0, 1; \alpha)$, в силу непрерывной зависимости исследуемого функционала от t заключаем, что существует значение $t_0 \in (0, 1)$, для которого

$$\frac{d}{dt}J(\infty, -1, 0, t; \alpha) = 0.$$

Из (17) при $t = t_0$ получаем

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{2P(t)(2t+1)}{t(t+1)} - \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right)t(t+1)(2t+1) \\ &= t(t+1)(2t+1) \left(1 - \frac{\alpha^2}{3}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

Будем считать, что $1 \leq \alpha \leq 3$. В этом случае нулями дифференциала (12) служат точки $b_1, \bar{b}_1, b_2, \bar{b}_2$:

$$P(z) = \alpha^2(z^2 - 2zx_1 + \rho_1^2)(z^2 - 2zx_2 + \rho_2^2),$$

где $x_k = \operatorname{Re} b_k$, $\rho_k = |b_k|$. Условия (13) принимают вид:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \rho_1^2 \rho_2^2 &= t^2, \\ \alpha^2(1 + 2x_1 + \rho_1^2)(1 + 2x_2 + \rho_2^2) &= (1+t)^2, \\ \alpha^2(t^2 - 2tx_1 + \rho_1^2)(t^2 - 2tx_2 + \rho_2^2) &= t^2(1+t)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Несложные, но несколько громоздкие вычисления и геометрические свойства траекторий дифференциала (12) показывают, что система условий (18), (19) совместна только при $t = 1$. Таким образом, при $1 \leq \alpha \leq 3$ и $0 < t < 1$

$$J(\infty, -1, 0, t; \alpha) < J(\infty, -1, 0, 1; \alpha).$$

Очевидно, при $1 \leq \alpha \leq \sqrt{3}$ отсюда следует неравенство

$$\mathcal{M}(\infty, -1, 0, 1, t; \alpha) \leq \mathcal{M}(\infty, -1, 0, 1; \alpha), \quad (20)$$

и равенство в (20) имеет место только при $t = 1$.

Выше мы кратко остановились на доказательстве утверждения теоремы о максимуме инварианта $J(\mathbf{a}; \alpha)$ при $1 \leq \alpha \leq 3$. Распространение доказательства на случай других значений параметра α требует дальнейшего исследования структуры траекторий дифференциала (12).

Из теорем 1 и 2 и сравнения значений $J^{(1)}(\alpha)$ и $J^{(2)}(\alpha)$ вытекает

Следствие. Пусть $J(\alpha)$ – максимум инварианта $J(\mathbf{a}; \alpha)$ для всех систем \mathbf{a} . При $\sqrt{3} \leq \alpha < 3$ этот максимум достигается, с точностью до преобразований из группы Γ , только для симметричной системы $\mathbf{a}^* = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$. При $\alpha = 3$ указанный максимум достигается для систем \mathbf{a}^* и $\mathbf{a}(1) = \{\infty, -1, 0, 1\}$ и, с точностью до преобразований из группы Γ , только для этих систем точек, $J(3) = 0$.

Замечание. Задача о максимуме $J(3)$ инварианта $J(\mathbf{a}; \alpha)$ для всех систем \mathbf{a} решена в [12] другим путем.

Можно предположить, что максимум инварианта $J(\mathbf{a}; \alpha)$ достигается для симметричной системы точек \mathbf{a}^* при всех $1 \leq \alpha \leq 3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций*. — Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 3, 41–103; вып.5, 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*. — Успехи мат. наук **49** (1994), 13–76.
3. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
4. И. Федоров, *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **112** (1981), 172–183.
5. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **168** (1988), 48–66.
6. В. Н. Дубинин, Д. А. Кириллова, *К задачам об экстремальном разбиении*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 54–74.
7. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*. Владивосток, 2009.
8. Е. Г. Емельянов, *К задачам об экстремальном разбиении*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **154** (1986), 76–89.
9. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **160** (1987), 91–98.
10. А. Ю. Солянин, *Модули и экстремально-метрические проблемы*. — Алгебра и анализ **11** (1999), вып. 1, 3–86.
11. Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 103–114.
12. Е. Г. Емельянов, *Конформно-инвариантные функционалы на римановой сфере*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 134–154.
13. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **185** (1990), 72–95.

Kuz'mina G. V. The method of extremal metric in the problem on the maximum of a conformal invariant.

Applications of an extremal metric approach to the problems on extremal decomposition are presented. Problems on the maxima of a certain weighted sum of the reduced modules of simply connected domains and of a related conformal invariant are solved.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 1 сентября 2010 г.