Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

Д. Б. Карп

НЕРАВЕНСТВА ТУРАНА ДЛЯ ФУНКЦИИ КУММЕРА ОТ СДВИГА ПО ОБОИМ ПАРАМЕТРАМ

1. Введение

Непрерывная положительная функция $\mu \to f(\mu)$ называется лог-вогнутой на интервале (a, b), если для всех μ и $\delta > 0$ таких, что отрезок $[\mu - \delta, \mu + \delta]$ принадлежит интервалу (a, b), справедливо неравенство

$$f(\mu)^2 > f(\mu + \delta) f(\mu - \delta). \tag{1}$$

Это определение равносильно утверждению, что $\log(f)$ – вогнутая функция [1]. Изменение знака неравенства на противоположный даёт определение лог-выпуклой функции. Если неравенство (1) (или противоположное ему) справедливо лишь для целых значений δ, будем говорить, что для f выполняется неравенство Турана (обратное неравенство Турана). В случае, когда и μ и δ принимают лишь целые значения, неравенство (1) даёт определение лог-вогнутой последовательности. Несмотря на очевидную связь (если f – лог-вогнута, то $1/f$ – лог-выпукла), лог-выпуклость и лог-вогнутость обладают различными свойствами. В частности, лог-выпуклость сильнее выпуклости и аддитивна, а лог-вогнутость слабее вогнутости, вообще говоря, неаддитивна и, в отличие от лог-выпуклости, сохраняется под действием операторов свертки и биномиальной свертки.

История неравенств вида (1) насчитывает несколько сотен лет. Можно отметить неравенство Ньютона для элементарных симметрических многочленов, неравенство Ляпунова для степенных средних, неравенства Александрова-Фенхеля для смешанных объемов, неравенства Лагерра для производных целых функций, множество неравенств для комбинаторных последовательностей и так далее. В теории специальных функций одним из первых неравенств такого типа

Ключевые слова: неравенство Турана, функция Куммера, лог-выпуклас функция, лог-вогнутая функция.

Работа поддержана грантами ДВО РАН 09-III-А-01-008 и РФФИ 08-01-00028-а.

является неравенство для полиномов Лежандра

$$[P_n(x)]^2 > P_{n-1}(x)P_{n+1}(x), \quad -1 < x < 1,$$

установленное Тураном в 1946 году в письме к Сегё. С тех пор в теории специальных функций неравенства вида (1) с целым δ принято называть неравенствами Турана или неравенствами типа Турана. В настоящей работе будем также придерживаться этой терминологии. По неравенствам Турана для ортогональных полиномов и лог-вогнутости комбинаторных последовательностей существует обширная литература (см., например, [2–4] и ссылки в этих работах).

Большинство известных последовательностей ортогональных полиномов выражаются через обобщенный гипергеометрический ряд (или его базисный аналог), который для целых неотрицательных p и q и комплексных $a_1, \dots, a_p$, $b_1, \dots, b_q$ определяется формулой [5]:

$${}_pF_q\left(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n n!} x^n,$$

где $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1) = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ – символ Похгаммера или восходящий факториал. Этот ряд сходится во всей комплексной x-плоскости при $p \le q$, и в единичном круге при $p = q+1$ (в втором случае сумма ряда обладает аналитическим продолжением во всю комплексную плоскость с разрезом по вещественной оси, соединяющим точки 1 и ∞). При $p > q+1$ ряд расходится при всех ненулевых x, однако, он оказывается полезен как формальный ряд, который сводиться к полиному, если одно из чисел a_i – отрицательное целое. Сумма ряда, когда она определена, называется обобщенной гипергеометрической функцией.

В последнее время было опубликовано несколько работ, содержащих исследования лог-выпуклости (лог-вогнутости) и неравенств типа Турана для гипергеометрических функций как функций параметров, в случаях, когда они не сводятся к ортогональным полиномам. По-видимому, первый результат такого рода для функции Куммера ${}_1F_1$ содержится в неявном виде в работе Гаучи [6]. Ситник заметил в [7], что более поздний результат Алзера [8] эквивалентен результату Гаучи и оба можно записать в виде обратного неравенства Турана:

$${}_1F_1(1; n; x)^2 < {}_1F_1(1; n+\nu; x) {}_1F_1(1; n-\nu; x),$$

где числа n и $n-\nu$ – неотрицательные целые, $x>0$. В работе Ситника это неравенство распространено на нецелые значения n и ν, то есть фактически доказана лог-выпуклость на $[0,\infty)$ функции $\mu\to{}_1F_1(1;c+\mu;x)$. Более того, для остатка ряда экспоненты, равного $R_n(x)=x^{n+1}{}_1F_1(1;n+2;x)/(n+1)!$, Ситник доказал прямое неравенство Турана $R_n^2(x)>R_{n-1}(x)R_{n+1}(x)$. Без ссылки на предыдущие исследования часть этих результатов была недавно усилена Барисом, который показал в [9], что функция

$$\mu\to{}_1F_1(a;c+\mu;x)\ \text{ лог-выпукла на }\ [0,\infty)\ \text{ при }\ a,c,x>0,$$

а функция

$$\mu\mapsto{}_1F_1(a+\mu;c+\mu;x)\ \text{ лог-выпукла на }\ [0,\infty)\ \text{ при }\ a>c>0,\ x>0.$$

В частности, отсюда следуют обратные неравенства Турана для этих функций. Аналогичные неравенства для гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1$ от сдвига по двум или трем параметрам были доказаны этим же автором в [19], а для случая $a\to{}_2F_1(a,c-a;c;x)$ в [11]. Кроме того, Барис показал лог-выпуклость функций Бесселя (выражающихся через ${}_0F_1$)[9]. Доказательства в вышеупомянутых работах основаны, главным образом, на аддитивности лог-выпуклости и вогнутости [1]. Этот подход не работает, однако, для доказательства лог-вогнутости и прямых неравенств Турана, поскольку в этом случае аддитивность отсутствует.

Кэри и Горди [12], изучая модель из финансовой математики, выдвинули гипотезу о справедливости неравенства Турана

$$[{}_1F_1(a;c;x)]^2>{}_1F_1(a+1;c;x){}_1F_1(a-1;c;x)$$

при значениях параметров $a>0$, $c>a+2$, $x>0$. При помощи оригинальной комбинации соотношений смежности и перестановок порядка суммирования Барнард, Горди и Ричардс доказали эту гипотезу в [13] и, более того, показали справедливость неравенства

$$[{}_1F_1(a;c;x)]^2\geq{}_1F_1(a+\nu;c;x){}_1F_1(a-\nu;c;x)\tag{3}$$

при всех $a>0$, $c>a\geq\nu-1$ и $x\in\mathbf{R}$ или $a\geq\nu-1$, $c>-1$ $(c\neq0)$, $x>0$ и положительного целого ν. Фактически, эти авторы показали, что разность левой и правой частей (3) имеет положительные коэффициенты Тейлора при $a>0$, $a\geq\nu-1$, $c>-1$.

В работе [14] автору совместно с Ситником удалось заметно усилить и обобщить эти результаты. А именно, были рассмотрены условия положительности (отрицательности) коэффициентов Тейлора функции ($b > a > 0$, $\delta > 0$)

$$x \mapsto f(b, x)f(a + \delta, x) - f(b + \delta, x)f(a, x),$$

где f – одна из следующих функций:

$$f(a, x) = \sum f_k(a)_k x^k,$$

$$f(a, x) = \sum f_k \Gamma(a + k)x^k$$

или

$$f(a, x) = \sum f_k x^k/(a)_k,$$

причём $f_k > 0$ для всех k. Положительность (отрицательность) соответствующих коэффициентов Тейлора сразу же влечет лог-вогнутость (лог-выпуклость) функции $a \to f(a, x)$. В частности, отсюда следует, что результат Барнарда, Горди и Ричардса можно распространить на нецелые значения ν и дополнить нижней границей для отношения

$$\frac{{}_1F_1(a + \nu; c; x)\,{}_1F_1(a - \nu; c; x)}{[{}_1F_1(a; c; x)]^2},$$

ограниченного сверху единицей согласно (3).

Основным результатом настоящей статьи является неравенство

$$\frac{(c)_\nu(a - \nu)_\nu}{(c - \nu)_\nu(a)_\nu} \le \frac{{}_1F_1(a + \nu; c + \nu; x)\,{}_1F_1(a - \nu; c - \nu; x)}{[{}_1F_1(a; c; x)]^2} \le 1,$$

справедливое для целых положительных ν, $c \ge a > \nu$ и $x \ge 0$. Более того, после умножения этого неравенства на $[{}_1F_1(a; c; x)]^2$ разность правой и средней частей имеет положительные коэффициенты Тейлора. Таким же свойством обладает разность средней и левой частей.

Указанное неравенство получается как следствие двух теорем. В первой доказывается лог-вогнутость последовательности

$$F_k = {}_1F_1(a + k, c + k; x), \quad k = 0, 1, \dots ,$$

при $c > a > 0$, $x > 0$, во второй – лог-выпуклость на $[0, \infty)$ функции

$$\mu \to \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\Gamma(a+\mu+n)}{\Gamma(c+\mu+n)} x^n$$

при $g_n > 0$, $c > a > 0$ и $x > 0$. Недоказанными при этом остаются следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Функция

$$\mu \to {}_1F_1(a+\mu; c+\mu; x)$$

лог-вогнута на $[0, \infty)$ при $c > a > 0$ и $x > 0$.

Гипотеза 2. Функция

$$\mu \to \frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+\mu)} {}_1F_1(a+\mu; c+\mu; x)$$

лог-вогнута на $[0, \infty)$ при $a > c > 0$ и $x > 0$.

Как было сказано выше, Барис показал лог-выпуклость первой функции при $a > c > 0$, $x > 0$. Лог-выпуклость второй функции при $c > a > 0$, $x \geq 0$ доказана в настоящей работе, а также другим способом в работе автора [15].

2. Основные результаты

Лемма 1. *Для функции Куммера справедливо тождество:*

$$\begin{aligned}{}_1F_1(a+1; c+1; x)^2 - {}_1F_1(a+2; c+2; x){}_1F_1(a; c; x) = \frac{(c-a)x}{c+1}\\ \left[\frac{1}{c+1}{}_1F_1(a+1; c+2; x)^2 - \frac{1}{c+2}{}_1F_1(a+2; c+3; x){}_1F_1(a; c+1; x)\right.\\ \left. + \frac{1}{c(c+1)}{}_1F_1(a+1; c+2; x){}_1F_1(a+2; c+2; x)\right].\end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Воспользуемся следующими соотношениями смежности:

$$\begin{aligned}&(c-a){}_1F_1(a+1; c+2; x)\\ &\qquad = (c+1){}_1F_1(a+1; c+1; x) - (a+1){}_1F_1(a+2; c+2; x)\end{aligned} \tag{5}$$

(см. [5, формула 6.4(4)]);

$$\begin{aligned}&(c-a)x\,{}_1F_1(a+2;c+3;x)\\&\qquad=(c+1)(c+2)({}_1F_1(a+2;c+2;x)-{}_1F_1(a+1;c+1;x))\end{aligned}\tag{6}$$

(получается комбинацией [5, формула 6.4(5)] и [5, формула 6.4(4)]);

$$\begin{aligned}&(a+1)x\,{}_1F_1(a+2;c+2;x)\\&\qquad=(c+1)(x-c)\,{}_1F_1(a+1;c+1;x)+c(c+1)\,{}_1F_1(a;c;x)\end{aligned}\tag{7}$$

(см. [16, формула (16.1.9c)]). Применение (5) и (6) даёт для левой части (4) после приведения подобных тождество

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c+1}\,{}_1F_1(a+1;c+2;x)^2-\frac{1}{c+2}\,{}_1F_1(a+2;c+3;x)\,{}_1F_1(a;c+1;x)\\&+\frac{1}{c(c+1)}\,{}_1F_1(a+1;c+2;x)\,{}_1F_1(a+2;c+2;x)\\&=\frac{a(a+1)}{(c-a)^2c}F_2^2-\frac{c(c+1)}{(c-a)^2x}F_2F_0-\frac{(c+1)(a-x)}{(c-a)^2x}F_1^2\\&+\frac{c(c+1)}{(c-a)^2x}F_1F_0+\frac{a(c+c^2-x-2cx)-cx}{(c-a)^2cx}F_2F_1,\end{aligned}$$

где мы использовали сокращение $F_i := {}_1F_1(a+i;c+i;x)$. Применение этой формулы приводит к следующему выражению для разности правой и левой частей (4):

$$\frac{cF_1-aF_2}{c(c+1)(c-a)}(x(a+1)F_2-(c+1)(x-c)F_1-c(c+1)F_0)=0.$$

Последнее равенство выполнено благодаря (7). □

Лемма 2. *Пусть $c>a>0$ и $n>0$. Тогда функция*

$$h(x):=\frac{(a+1+x)(c+1+n-x)}{(a+n-x)(c+2+x)}+\frac{(a+1+n-x)(c+1+x)}{(a+x)(c+2+n-x)}\tag{8}$$

имеет на отрезке $[0,n]$ единственный минимум в точке $x=n/2$.

Доказательство. Очевидно, что $h(x)=h(n-x)$. Следовательно, достаточно доказать, что функция $h(x)$ строго убывает на отрезке

$[0, n/2]$ или, что то же самое, что она строго возрастает на $[n/2, n]$. Разложение $h(x)$ на простейшие дроби приводит к тождеству:

$$h(x) = 2 + \frac{1+c-a}{2+a+c+n}\left[\frac{1+2a+n}{a+x} + \frac{1+2a+n}{a+n-x}\right.$$
$$\left. - \frac{3+2c+n}{2+c+x} - \frac{3+2c+n}{2+c+n-x}\right].$$

Следовательно, вопрос о монотонности $h(x)$ сводится к вопросу о монотонности выражения в квадратных скобках. Сделаем замены $c+2=b$, $x=n/2+y$. Тогда выражение в квадратных скобках примет вид:

$$\begin{aligned}
&(1+2a+n)\left(\frac{1}{a+n/2+y} + \frac{1}{a+n/2-y}\right)\\
&-(2b+n-1)\left(\frac{1}{b+n/2+y} + \frac{1}{b+n/2-y}\right)\\
=&\frac{(2a+n)^2}{(a+n/2+y)(a+n/2-y)} + \frac{2a+n}{(a+n/2+y)(a+n/2-y)}\\
-&\frac{(2b+n)^2}{(b+n/2+y)(b+n/2-y)} + \frac{2b+n}{(b+n/2+y)(b+n/2-y)}.
\end{aligned}$$

Положим здесь $a+n/2=\tilde{a}$, $b+n/2=\tilde{b}$. Получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{4\tilde{a}^2}{(\tilde{a}+y)(\tilde{a}-y)} + \frac{2\tilde{a}}{(\tilde{a}+y)(\tilde{a}-y)} - \frac{4\tilde{b}^2}{(\tilde{b}+y)(\tilde{b}-y)}\\
&+\frac{2\tilde{b}}{(\tilde{b}+y)(\tilde{b}-y)} = 2(\tilde{a}+\tilde{b})\frac{y^2(2(\tilde{b}-\tilde{a})-1)+\tilde{a}\tilde{b}}{(\tilde{b}^2-y^2)(\tilde{a}^2-y^2)}.
\end{aligned}$$

В силу условия $c > a > 0$, коэффициент при y^2 в числителе положителен. Следовательно, числитель строго возрастает а знаменатель строго убывает на отрезке $y \in [0, \tilde{a}]$, а тем более на меньшем отрезке $y \in [0, n/2]$ или $x \in [n/2, n]$. □

Теорема 1. *Пусть $c > a > 0$ и $x > 0$. Тогда имеет место неравенство Турана*

$${}_1F_1(a+1; c+1; x)^2 > {}_1F_1(a+2; c+2; x)\,{}_1F_1(a; c; x) \tag{9}$$

и, более того, коэффициенты Тейлора разности левой и правой частей (9) *положительны, кроме свободного члена, равного нулю.*

Доказательство. Сохраняя обозначение $F_i = {}_1F_1(a+i;c+i;x)$, запишем согласно (4):

$$\frac{(c+1)^2}{(c-a)x}(F_1^2 - F_2F_0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

где

$$\begin{aligned}A_n = &\sum_{k=0}^{n} \frac{(a+1)_k(a+1)_{n-k}}{(c+2)_k(c+2)_{n-k}k(n-k)}\\ &- \frac{(c+1)(a+2)_k(a)_{n-k}}{(c+2)(c+3)_k(c+1)_{n-k}k(n-k)} + \frac{(a+1)_k(a+2)_{n-k}}{c(c+2)_k(c+2)_{n-k}k(n-k)}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{N_k}{(c+2)_k(c+2)_{n-k}} = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{M_k}{(c+2)_k(c+2)_{n-k}}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}N_k = &\frac{(a+1)_k(a+1)_{n-k}}{k(n-k)}\\ &- \frac{(a+2)_k(a)_{n-k}(c+1+n-k)}{k(n-k)(c+2+k)} + \frac{(a+1)_k(a+2)_{n-k}}{ck(n-k)}\end{aligned}$$

и

$$M_k = \begin{cases} N_k + N_{n-k}, & k < n/2,\\ N_k = (N_k + N_{n-k})/2, & k = n/2.\end{cases}$$

Необходимо доказать, что $A_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Для этого докажем, что

(a) $\sum_{k=0}^{[n/2]} M_k = \sum_{k=0}^{n} N_k > 0$;

(b) числа M_k, $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$, меняют знак не более одного раза причём с минуса на плюс;

(c) последовательность $1/[(c+2)_k(c+2)_{n-k}]$, $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$, возрастает.

Нетрудно видеть, что условия (a), (b) и (c) в совокупности влекут положительность чисел A_n. Утверждение (c) почти очевидно:

$$\frac{(c+2)_{k-1}(c+2)_{n-k+1}}{(c+2)_k(c+2)_{n-k}} = \frac{c+2+n-k}{c+1+k} > 1$$

поскольку $k < n-k+1$. Покажем справедливость (a). Действительно:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} N_k = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+1)_k(a+1)_{n-k}}{k!(n-k)!}$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+2)_k(a)_{n-k}(c+1+n-k)}{k!(n-k)!(c+2+k)}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(a+1)_k(a+2)_{n-k}}{ck!(n-k)!}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k}{k!} x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+1)_m}{m!} x^m\right)$$
$$-\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+2)_k}{k!(c+2+k)} x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m(c+1+m)}{m!} x^m\right)$$
$$+\frac{1}{c}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+1)_k}{k!} x^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a+2)_m}{m!} x^m\right) = \frac{1}{(1-x)^{2a+2}}$$
$$-\frac{1}{c+2}\,{}_2F_1(a+2, c+2; c+3; x)\frac{(c+1)-x(c+1-a)}{(1-x)^{a+1}}$$
$$+\frac{1}{c(1-x)^{2a+3}} = \frac{1}{(1-x)^{a+1}}\left\{\frac{1}{(1-x)^{a+1}}\right.$$
$$\left.+\left(x\frac{c+1-a}{c+2} - \frac{c+1}{c+2}\right){}_2F_1(a+2, c+2; c+3; x) + \frac{1}{c(1-x)^{a+2}}\right\}.$$

Коэффициент при x^n в разложении в степенной ряд первого сомножителя, очевидно, положителен. Коэффициент при x^n, $n \geq 1$, в разложении в степенной ряд выражения в фигурных скобках равен

$$\frac{(a+1)_n}{n!} + \frac{(c+1-a)(a+2)_{n-1}}{(c+n+1)(n-1)!} - \frac{(c+1)(a+2)_n}{(c+n+2)n!} + \frac{(a+2)_n}{cn!}$$
$$= \frac{(a+2)_{n-1}}{n!}\left(a+1 + \frac{(c+1-a)n}{(c+n+1)} - \frac{(c+1)(a+n+1)}{(c+n+2)} + \frac{(a+n+1)}{c}\right)$$

$$= \frac{(a+2)_{n-1}}{n!} \times$$
$$\frac{(2+2a+4c+4ac+2c^2+2ac^2+5n+3an+8cn+2acn+3c^2n+4n^2+an^2+3cn^2+n^3)}{c(c+n+1)(c+n+2)},$$

и, следовательно, также положителен. Остается проверить, что свободный член равен $1+1/c-(c+1)/(c+2)=2(c+1)^2/(c(c+2))>0$. Таким образом, коэффициент при x^n, $n=0,1,\ldots$, всего выражения, равный $\sum\limits_{k=0}^{n} N_k$, положителен.

Остаётся доказать, что последовательность $\{M_k\}_{k=0}^{[n/2]}$ меняет знак не более одного раза, причём с минуса на плюс. Положим $M_{k'}>0$. Покажем, что в это случае $M_{k'+1}>0$. Действительно, при $k<n/2$:

$$M_k = 2\frac{(a+1)_k(a+1)_{n-k}}{k!(n-k)!} + \frac{(a+1)_k(a+2)_{n-k}}{ck!(n-k)!} + \frac{(a+1)_{n-k}(a+2)_k}{ck!(n-k)!}$$

$$-\frac{(a+2)_k(a)_{n-k}(c+1+n-k)}{k!(n-k)!(c+2+k)} - \frac{(a+2)_{n-k}(a)_k(c+1+k)}{k!(n-k)!(c+2+n-k)}$$

$$= \frac{(a+1)_k(a+2)_{n-k-1}}{k!(n-k)!}\Bigg\{2(a+1) + \frac{a+1+n-k}{c}$$

$$+\frac{a+1+k}{c} - \frac{a(a+k+1)(c+1+n-k)}{(a+n-k)(c+2+k)} - \frac{a(a+1+n-k)(c+1+k)}{(a+k)(c+2+n-k)}\Bigg\}$$

$$= \frac{(a+1)_k(a+2)_{n-k-1}}{k!(n-k)!}\left\{\frac{2(a+1)(n+c+1)}{c} - ah(k)\right\},$$

где $h(k)$ определено формулой (8). Согласно лемме 2, функция $h(k)$ монотонно убывает на промежутке $k\in[0,n/2]$. Следовательно, если выражение в фигурных скобках положительно при некотором $k=k'$, то оно тем более положительно при $k=k'+1$. Осталось рассмотреть случай $k=n/2$, но в этом случае, согласно определению чисел M_k, значение $M_{n/2}$ получается делением приведенной формулы на 2, что не может нарушить положительности. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\nu\in\mathbf{N}$. При $c>a>\nu$ и $x>0$ имеет место неравенство:*

$$ {}_1F_1(a;c;x)^2 > {}_1F_1(a+\nu;c+\nu;x)\,{}_1F_1(a-\nu;c-\nu;x). \tag{10}$$

Доказательство. Зафиксируем неотрицательное целое k. Неравенство (9) при $a+1=a'+k$, $c+1=c'+k$ и $x>0$ можно записать в виде

$$\frac{F_k}{F_{k-1}} > \frac{F_{k+1}}{F_k},$$

где по-прежнему $F_k = {}_1F_1(a'+k;c'+k;x)$. Применяя это неравенство для последовательных значений k, получим цепочку неравенств ($\nu \in \mathbf{N}$):

$$\frac{F_{k-\nu+1}}{F_{k-\nu}} > \cdots > \frac{F_{k-1}}{F_{k-2}} > \frac{F_k}{F_{k-1}} > \frac{F_{k+1}}{F_k} > \frac{F_{k+2}}{F_{k+1}} > \cdots > \frac{F_{k+\nu}}{F_{k+\nu-1}}.$$

или

$$F_k^2 > F_{k-1}F_{k+1} > F_{k-2}F_{k+2} > \cdots > F_{k+\nu}F_{k-\nu}.$$

При $k=0$ приходим к неравенству (10). □

Теорема 2. *Пусть ряд $g(a,c;x)$ задан формулой*

$$g(a,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)} x^n, \tag{11}$$

где $g_n > 0$, $c > a > 0$, и пусть $\delta_1, \delta_2 > 0$ – произвольные положительные числа. Тогда коэффициенты степенного ряда

$$\varphi_{a,c,\delta_1,\delta_2}(x) = g(a,c;x)g(a+\delta_1+\delta_2, c+\delta_1+\delta_2;x) \\ - g(a+\delta_1, c+\delta_1;x)g(a+\delta_2,c+\delta_2;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m x^m$$

положительны: $\varphi_m > 0$, $m = 0, 1, \ldots$

Замечание. Ряды в теореме 2 рассматриваются как формальные, вопросы сходимости не обсуждаются.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобиться следующий результат Столярского [17] (см. также обобщение в [18]).

Лемма 3. *Пусть $\alpha_1 > \beta_1 \geq \beta_2 > \alpha_2 \geq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$. Тогда функция*

$$x \mapsto \frac{\Gamma(x+\alpha_1)\Gamma(x+\alpha_2)}{\Gamma(x+\beta_1)\Gamma(x+\beta_2)},$$

убывает на $[0, \infty)$.

Умножение рядов даёт:

$$\varphi_m = \sum_{k=0}^{m} g_k g_{m-k} \left\{ \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+k)(c+\delta_1+\delta_2+m-k)} \right.$$
$$\left. - \frac{\Gamma(a+\delta_1+k)\Gamma(a+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+\delta_1+k)(c+\delta_2+m-k)} \right\}.$$

Далее перегруппировкой слагаемых (первый с последним, второй с предпоследним и т.д.) последняя сумма может быть записана в виде:

$$\varphi_m = \sum_{k=0}^{[m/2]} g_k g_{m-k} M_k, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} M_k = &\underbrace{\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+k)(c+\delta_1+\delta_2+m-k)}}_{=u} \\ &+ \underbrace{\frac{\Gamma(a+m-k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+k)}{\Gamma(c+m-k)\Gamma(c+\delta_1+\delta_2+k)}}_{=v} \\ &- \underbrace{\frac{\Gamma(a+\delta_1+k)\Gamma(a+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+\delta_1+k)(c+\delta_2+m-k)}}_{=r} \\ &- \underbrace{\frac{\Gamma(a+\delta_1+m-k)(a+\delta_2+k)}{\Gamma(c+\delta_1+m-k)\Gamma(c+\delta_2+k)}}_{=s} \end{aligned}$$

при $k < m/2$, и

$$M_k = \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+k)\Gamma(c+\delta_1+\delta_2+m-k)} - \frac{\Gamma(a+\delta_1+k)\Gamma(a+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+\delta_1+k)\Gamma(c+\delta_2+m-k)}$$

при $k = m/2$ (для нечётных m это слагаемое отсутствует). Мы хотим показать, что $M_k > 0$. Докажем сначала, что $u > v$. Действительно, это неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(c+\delta_1+\delta_2+k)}{\Gamma(c+k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+k)} > \frac{\Gamma(a+m-k)(c+\delta_1+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+m-k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+m-k)}.$$

Положим $\alpha_1 = c + \delta_1 + \delta_2$, $\alpha_2 = a$, $\beta_1 = \max(c, a + \delta_1 + \delta_2)$ и $\beta_2 = \min(c, a + \delta_1 + \delta_2)$, $x_1 = k$, $x_2 = m - k$. Тогда по лемме 3 с учетом условия $k < m - k$ получим требуемое неравенство.

Покажем теперь, что $u > r$, то есть

$$\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+m-k)}{\Gamma(a+\delta_1+k)\Gamma(a+\delta_2+m-k)} > \frac{\Gamma(c+k)(c+\delta_1+\delta_2+m-k)}{\Gamma(c+\delta_1+k)(c+\delta_2+m-k)}$$

Полагая $\alpha_1 = \delta_1 + \delta_2 + m - k$, $\alpha_2 = k$, $\beta_1 = \max(\delta_1 + k, \delta_2 + m - k)$, $\beta_2 = \min(\delta_1 + k, \delta_2 + m - k)$ и $x_1 = a$, $x_2 = c$, по лемме 3 снова получим требуемое неравенство Аналогично доказывается, что $u > s$.

Покажем теперь, что $uv > rs$. Это следует перемножением следующих двух неравенств

$$\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+k)}{\Gamma(a+\delta_1+k)(a+\delta_2+k)} > \frac{\Gamma(c+k)\Gamma(c+\delta_1+\delta_2+k)}{\Gamma(c+\delta_1+k)\Gamma(c+\delta_2+k)}$$

и

$$\frac{\Gamma(a+m-k)\Gamma(a+\delta_1+\delta_2+m-k)}{\Gamma(a+\delta_2+m-k)\Gamma(a+\delta_1+m-k)} > \frac{\Gamma(c+m-k)(c+\delta_1+\delta_2+m-k)}{(c+\delta_2+m-k)\Gamma(c+\delta_1+m-k)},$$

каждое из которых проверяется по лемме 3.

Из комбинации доказанных неравенств следует, что $u + v > r + s \Leftrightarrow M_k > 0$. Действительно, деление на u превращает $r + s < u + v$ в $r' + s' < 1 + v'$, где $r' = r/u \in (0,1)$, $s' = s/u \in (0,1)$, $v' = v/u \in (0,1)$. Поскольку $r's' < v'$ в силу $rs < uv$, требуемое неравенство следует из элементарного неравенства $r' + s' < 1 + r's'$. □

Следствие 2. *Функция*

$$\mu \to \frac{\Gamma(a+\mu)}{\Gamma(c+\mu)}{}_1F_1(a+\mu; c+\mu; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+\mu+n)}{\Gamma(c+\mu+n)} \frac{x^n}{n!} \qquad (13)$$

лог-выпукла на $[0, \infty)$ *при* $c > a > 0$, $x \geq 0$.

Доказательство. В теореме 2 положим $g_n = 1/n!$, тогда функция, указанная в формулировке следствия, совпадает с функцией

$g(a+\mu,c+\mu;x)$ из (11). Для непрерывных функций лог-выпуклость эквивалента тому, что функция

$$\mu \to \frac{g(a+\mu+h,c+\mu+h;x)}{g(a+\mu,c+\mu;x)}$$

возрастает для любого $h>0$ (такое возрастание называют лог-выпуклостью по Райту, подробности можно найти в [1, с. 3]). Таким образом, нам необходимо доказать, что

$$\frac{g(a+\mu_1+h,c+\mu_1+h;x)}{g(a+\mu_1,c+\mu_1;x)} > \frac{g(a+\mu_2+h,c+\mu_2+h;x)}{g(a+\mu_2,c+\mu_2;x)}$$

при $x>0$, $c>a>0$, $\mu_1>\mu_2>0$ и для любого $h>0$. Полагая $a'=a+\mu_2$, $c'=c+\mu_2$, $h=\delta_2$, и $\delta_1=\mu_1-\mu_2>0$, перепишем это неравенство в виде

$$\frac{g(a'+\delta_1+\delta_2,c'+\delta_1+\delta_2;x)}{g(a'+\delta_1,c'+\delta_1;x)} > \frac{g(a'+\delta_2,c'+\delta_2;x)}{g(a',c';x)}.$$

Последнее неравенство в точности совпадает с неравенством $\varphi_{a,c,\delta_1,\delta_2}(x)>0$ из теоремы 2. $\square$

Замечание. Барис доказал в [9], что функция $\mu \to {}_1F_1(a+\mu;c+\mu;x)$ лог-выпукла на $[0,\infty)$ при $a>c>0$ и $x>0$. Его результат можно усилить, показав, что для функции

$$f(a,c;x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{(a)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}, \quad f_n>0, \tag{14}$$

выполняется аналог теоремы 2, но при $a>c>0$. Доказательство этого результата почти дословно воспроизводит доказательство теоремы 2.

Следствие 3. *При $c>a>\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ и $x>0$ справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{(c)_\nu(a-\nu)_\nu}{(c-\nu)_\nu(a)_\nu} \le \frac{{}_1F_1(a+\nu;c+\nu;x)\,{}_1F_1(a-\nu;c-\nu;x)}{[{}_1F_1(a;c;x)]^2} \le 1.$$

Доказательство. Оценка сверху совпадает со следствием 1. Для доказательства оценки снизу достаточно заметить, что лог-выпуклость функции (13) влечет неравенство

$$\left[\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}{}_1F_1(a;c;x)\right]^2 \\ \leq \left[\frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(c+\nu)}{}_1F_1(a+\nu;c+\nu;x)\right]\left[\frac{\Gamma(a-\nu)}{\Gamma(c-\nu)}{}_1F_1(a-\nu;c-\nu;x)\right],$$

которое, с учетом формулы $(a)_\nu = \Gamma(a+\nu)/\Gamma(a)$, непосредственно сводится к требуемой оценке. □

Следствие 4. *При $c-\nu > a > 0$, $\nu \in \mathbf{N}$ и $x < 0$ справедлива двусторонняя оценка*

$$\frac{(c)_\nu(c-a-\nu)_\nu}{(c-\nu)_\nu(c-a)_\nu} \leq \frac{{}_1F_1(a;c+\nu;x){}_1F_1(a;c-\nu;x)}{[{}_1F_1(a;c;x)]^2} \leq 1.$$

Доказательство. Достаточно применить преобразование Куммера ${}_1F_1(a;c;x) = e^x{}_1F_1(c-a;c;-x)$ к неравенству из следствия 3. □

Литература

1. D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić, A. M. Fink, *Classical and new Inequalities in Analysis.* Kluwer Acad. Publ., 1993.
2. C. Berg, R. Szwarc, Bounds on Turán determinants. — J. Approx. Theory **161**, No. 1 (2009), 127–141.
3. R. Szwarc, *Positivity of Turán determinants for orthogonal polynomials.* — Harmonic analysis and hypergroups (Delhi 1995), 165–182, Trends Math., Birkhauser Boston, Boston, MA 1998.
4. F. Brenti, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry: an update.* Jerusalem combinatorics'93, 71–89, Contemp. Math., **178**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974. (1994)
5. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions.* Vol. 1. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
6. W. Gautschi, *A note on succesive remainders of the exponential series.* — Elem. Math. **37** (1982), 46–49.
7. С. М. Ситник, *Неравенства для остаточного члена ряда Тейлора экспоненциальной функции.* Препринт ин-та автоматики и процессов управления ДВО РАН, 1993.
8. H. Alzer, *An inequality for the exponential function* — Arch. Math. **55** (1990), 462–464.
9. A. Baricz, *Functional inequalities involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind.* — Expo. Math. **26**, No. 3 (2008), 279–293.

10. A. Baricz, *Turán type inequalities for generalized complete elliptic integrals.* — Math. Z. **256** (2007), 895–911.
11. A. Baricz, *Turán type inequalities for hypergeometric functions.* — Proc. Amer. Math. Soc. **136**, No. 9 (2008), 3223–3229.
12. M. Carey, M. B. Gordy, *The Bank as Grim Reaper: Debt Composition and Recoveries on Defaulted Debt.* — Preprint (2007).
13. R. W. Barnard, M. Gordy, K. C. Richards, *A note on Turán type and mean inequalities for the Kummer function.* — J. Math. Anal. Appl. **349**, No. 1 (2009), 259–263.
14. D. Karp, S. M. Sitnik, *Log-convexity and log-concavity of hypergeometric-like functions.* — J. Math. Anal. Appl. **364** (2010) 384–394.
15. Д. Б. Карп, *Об одной задаче из многомерной статистики для функции Куммера.* — Тр. Всероссийской конф. "XXXV Дальневосточная математическая школа–семинар им. акад. Е. В. Золотова", Владивосток, 31 августа–5 сентября 2010 г. (в печати).
16. A. Cuyt, V. B. Petersen, B. Verdonk, H. Waadeland, W. B. Jones, *Handbook of Continued Fractions for Special Functions.* Springer, 2008.
17. K. B. Stolarsky, *From Wythoff's Nim to Chebyshev's inequality.* — Amer. Math. Monthly **98** (1991), 889–900.
18. H. Alzer, *On some inequalities for the gamma and psi functions.* — Math. Comput. **66**, No. 217 (1997), 373–389.

Karp D. B. Turan's inequalities for the Kummer function in a simultaneous shift of the two parameters.

Direct and reverse Turan's inequalities are proved for the confluent hypergeometric function (the Kummer function) viewed as a function of a simultaneous shift in the upper and lower parameters. The reverse Turan inequality is derived from a stronger result on the log-convexity of a function of a sufficiently general form, whose particular case is the Kummer function. Two conjectures above the log-concavity of the Kummer function are formulated. The paper continues the research of a number of authors who studied the log-convexity and log-concavity of hypergeometric functions in parameters.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, ул. Радио 7, 690041
Владивосток, Россия
E-mail: dmkrp@yandex.ru

Поступило 29 июля 2010 г.