Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

С. И. Калмыков

ТЕОРЕМЫ ПОКРЫТИЯ ДЛЯ ПОЛИНОМОВ, ИМЕЮЩИХ КРИВОЛИНЕЙНУЮ МАЖОРАНТУ НА ДВУХ ОТРЕЗКАХ

§1. Введение и вспомогательные сведения

Неравенствам для полиномов с мажорантой на отрезке вещественной оси посвящено большое число работ, отметим, например, статьи [1, 2]. Цель настоящей работы – получение теорем покрытия для аналитических функций, связанных с полиномами, имеющими криволинейную мажоранту на двух симметричных отрезках. Наш подход основан на принципах мажорации для мероморфных функций [3, 4]. Доказанные утверждения содержат и дополняют некоторые классические и новые результаты, включающие в себя оценки старших коэффициентов полиномов и неравенства бернштейновского типа. Приведенные во втором параграфе теоремы были анонсированы в кратком сообщении [5].

Функцию Грина $g_D(z,\zeta)$ области D называют классической, если она обращается в нуль на границе D. Для данной области D, имеющей классическую функцию Грина, набора точек $\{z_k\}_{k=1}^m$, $z_k \in D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $k = 1, \dots, m$ и числа $r > 0$ введем обозначение

$$D_r(z_1, \dots, z_m) = \left\{ z : \sum_{k=1}^m g_D(z, z_k) > r \right\}.$$

Если $f(D) = G$, то будем говорить, что f осуществляет полное m-кратное накрытие области G областью D, если любая последовательность точек $z_k \in D$, стремящаяся к ∂D, переходит в последовательность точек w_k, стремящаяся к ∂G, и каждой точке $w \in G$ соответствует в ровно m прообразов в области D.

В недавних работах [3] и [4] доказана следующая теорема.

Ключевые слова: теоремы покрытия, неравенства для полиномов, полиномы Чебышева.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00028).

Теорема 1. *Пусть области D и G имеют классические функции Грина, $D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $\infty \in G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$. Предположим, что функция f является мероморфной в области D, имеет по крайней мере один полюс в D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \partial G$ (т.е. при стремлении точки z к границе области D все предельные значения функции $f(z)$ принадлежат границе G). Тогда для любого $r > 0$ справедливо включение*

$$f(D_r(z_1, \dots, z_m)) \backslash f(\partial D_r(z_1, \dots, z_m)) \supset G_r(\infty)), \tag{1}$$

где $z_1, \dots, z_m$ – полюсы функции f в области D, каждый из которых учитывается столько раз, какова его кратность.

Далее, пусть $r > 0$ – произвольное фиксированное число. Равенство в (1) имеет место в том и только том случае, когда f осуществляет полное m-кратное накрытие области G областью D.

Нам понадобятся также следующие хорошо известные представления полиномов Чебышева первого, второго, третьего и четвертого родов соответственно [6]:

$$T_n(z) = \frac{1}{2}((z + \sqrt{z^2-1})^n + (z - \sqrt{z^2-1})^n),$$
$$U_n(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^{n+1} - (z - \sqrt{z^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{z^2-1}},$$
$$V_n(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}} + (z - \sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(z + \sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}} + (z - \sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}},$$
$$W_n(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}} - (z - \sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(z + \sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}} - (z - \sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}}.$$

§2. Основные результаты

Введем обозначение

$$L_{\alpha,r} = \{z \in \mathbb{C} : |\sqrt{z^2-1} + \sqrt{z^2-\alpha^2}| = r\sqrt{1-\alpha^2}\}.$$

Некоторые свойства лемнискаты $L_{\alpha,r}$ приводятся, например, в работе Левина и Саффа [7].

Применяя теорему 1 к функции $f = P(z)$ и каждой регулярной ветви функции $f = \sqrt{(1-z^2)(z^2-\alpha^2)}P(z)$ на множестве $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1])$ [8], приходим к следующим двум утверждениям.

Теорема 2. *Пусть полином*

$$P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0, \quad c_n \neq 0, \quad c_l \in \mathbb{R}, \quad l = 0, 1, \ldots n, \quad n \geqslant 1,$$

удовлетворяет условию

$$|P(x)| \leqslant 1, \quad x \in [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда для любого числа $\rho > 1$ образ лемнискаты $L_{\alpha,\rho}$ при отображении $\omega = P(z)$ лежит внутри эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n} + \rho^n$.

Если n – четное число, то образ лемнискаты совпадает с указанным эллипсом тогда и только тогда, когда

$$P_n(z) = \pm T_{n/2}\left(\frac{2z^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right).$$

Теорема 3. *Пусть полином*

$$P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0, \quad c_n \neq 0, \quad c_l \in \mathbb{R}, \quad l = 0, 1, \ldots n, \quad n \geqslant 1$$

удовлетворяет условию

$$|P(x)|\sqrt{(1 - x^2)(x^2 - \alpha^2)} \leqslant 1, \quad x \in [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда для любого числа $\rho > 1$ образ лемнискаты $L_{\alpha,\rho}$ при отображении $\omega = \sqrt{(1 - z^2)(z^2 - \alpha^2)}P(z)$ лежит внутри эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n-2} + \rho^{n+2}$.

Если n – четное число, то образ лемнискаты совпадает с указанным эллипсом тогда и только тогда, когда

$$P_n(z) = \pm \frac{2}{1 - \alpha^2} U_{n/2}\left(\frac{2z^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}\right).$$

Отметим, что доказательства вторых утверждений теорем 1 и 2 аналогичны доказательству соответствующего утверждения теоремы 4.

Устремляя α к нулю в теореме 2, получаем утверждение К. Дочева [9]. Если полином $P(z) = c_n z_n + \ldots + c_0$, $c_n \neq 0$, с вещественными коэффициентами c_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, нормирован условиями

$\max\{P(z) : z \in [-1,1]\} = -\min\{P(z) : z \in [-1,1]\} = 1$, то для любого $\rho > 1$ образ эллипса $|z-1|+|z+1| = \rho+1/\rho$ при отображении $w = P(z)$ лежит внутри эллипса $|w-1|+|w+1| = \rho^n + 1/\rho^n$. Здесь экстремальным является случай, когда $P(z)$ совпадает с полиномом Чебышева первого рода $T_n(z)$. Из этого утверждения следуют классические неравенства Чебышева, Бернштейна–Сеге и Маркова [10, 11].

Функция $f = \sqrt{1-z^2}P(z)$ не допускает выделения регулярной ветви в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1,-\alpha] \cup [\alpha,1])$, следовательно, к ней мы не можем применить теорему 1, тем не менее имеет место следующая

Теорема 4. *Пусть полином*

$$P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0, \quad c_n \neq 0, \quad c_l \in \mathbb{R}, \quad l = 0,1,\ldots n, \quad n \geqslant 1,$$

удовлетворяет условию

$$|P(x)|\sqrt{1-x^2} \leqslant 1, \quad x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha,1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда для любого $\rho > 1$ полный образ лемнискаты $L_{\alpha,\rho}$ при отображении $\omega = \sqrt{1-z^2}P(z)$ лежит внутри эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n-1} + \rho^{n+1}$.

Если n – четное число, то образ лемнискаты совпадает с указанным эллипсом тогда и только тогда, когда

$$P_n(z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} W_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Доказательство. Пусть $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1,-\alpha] \cup [\alpha,1])$ и $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [-1,1]$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(z) := (n+1)g_D(z,\infty) - g_G(P(z)\sqrt{1-z^2},\infty),$$

гармоническую на открытом множестве

$$B := \{z \in D : P(z)\sqrt{1-z^2} \in G\}.$$

Действительно, из симметрии области G следует, что h не зависит от выбора корня, кроме того, в окрестностях конечных точек функция

Грина $g_D(z,\infty)$, а также суперпозиция $g_G(P(z)\sqrt{1-z^2},\infty)$ являются гармоническими. В окрестности бесконечности имеем представление

$$g_D(z,\infty) = \log|z| + h_1,$$
$$g_G(P(z)\sqrt{1-z^2},\infty) = (n+1)\log|z| + h_2,$$

где h_j, $j = 1, 2$, – гармонические функции, поэтому особенности сокращаются.

Заметим, что $B = \{z \in \overline{\mathbb{C}}_z : P(z)\sqrt{1-z^2} \notin [-1,1]\}$, поэтому если точка $z_0 \in \partial B$, то первое слагаемое в определении функции h неотрицательно, а второе равно нулю.

По принципу максимума,

$$h(z) \geq 0 \quad \text{на} \quad B.$$

Пусть теперь $w \in G_r(\infty) \subset G$. Тогда в области D существует по крайней мере одна точка z, для которой $P(z)\sqrt{1-z^2} = w$. Таким образом, $z \in B$ и

$$(n+1)g_D(z,\infty) \geq g_G(w,\infty) > r. \tag{2}$$

Поэтому $w \in f(D_r(\infty,\dots,\infty))$, где под f понимается двузначная функция $P(z)\sqrt{1-z^2}$. Кроме того, $w \notin f(\partial D_r(\infty,\dots,\infty))$. В противном случае найдется точка $z \in \partial D_r(\infty,\dots,\infty) \subset D$ и такая, что $f(z) = w \in G$. Тогда $z \in B$, что противоречит неравенству (2), так как первое слагаемое в (2) в этом случае равно r.

Для завершения доказательства первого утверждения теоремы достаточно воспользоваться явными представлениями функций Грина областей D и G [12, 13]:

$$g_D(z,\infty) = \log\left|\frac{\sqrt{z^2-1}+\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right|, \tag{3}$$

$$g_G(w,\infty) = \log|w+\sqrt{w^2-1}|, \tag{4}$$

где ветви корней выбраны таким образом, что $\lim\limits_{z\to\infty} g_D(z,\infty) = \lim\limits_{w\to\infty} g_G(w,\infty) = +\infty$.

Если теперь n – четное число и

$$P_n(z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}W_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

то, введя обозначение

$$\phi(z) = \frac{2z^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2},$$

получаем

$$\begin{aligned}
P(z)\sqrt{1-z^2} &= \pm\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} W_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right) \\
&= \pm\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} W_{n/2}(\phi(z)) \\
&= \pm\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \frac{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}} - (\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}}{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{1}{2}} - (\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{1}{2}}} \\
&= \pm\frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \cdot \frac{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}} - (\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}}{\dfrac{\sqrt{z^2-\alpha^2}+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \dfrac{\sqrt{z^2-\alpha^2}-\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{1-\alpha^2}}} \\
&= \pm i\frac{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}} - (\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае множество B совпадает с областью D. Следовательно, по принципу максимума,

$$h(z) \equiv 0 \quad \text{на} \quad D,$$

т. е.

$$(n+1)g_D(z,\infty) = g_G(P(z)\sqrt{1-z^2},\infty), \quad z \in D.$$

Отсюда следует, что при отображении $\omega = P(z)\sqrt{1-z^2}$ лемниската $L_{\alpha,\rho}$ переходит в эллипс с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n-1} + \rho^{n+1}$.

Обратно, если при отображении $\omega = P(z)\sqrt{1-z^2}$ лемниската $L_{\alpha,\rho}$ переходит в эллипс с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n-1} + \rho^{n+1}$, то найдется точка $z_1 \in D$ такая, что

$$(n+1)g_D(z_1,\infty) = g_G(P(z_1)\sqrt{1-z_1^2},\infty).$$

Тогда снова по принципу максимума

$$h(z) \equiv 0 \quad \text{на} \quad B$$

и $B = D$. Кроме того,

$$2g_G(P(z)\sqrt{1-z^2}, \infty) = g_{G1}(P^2(z)(1-z^2), \infty),$$

где $G_1 = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$.

Таким образом,

$$(2n+2)g_D(z,\infty) = g_{G1}(P^2(z)(1-z^2), \infty), \quad z \in D.$$

Из последнего, согласно принципу Линделефа [12], следует, что отображение $P^2(z)(1-z^2)$ осуществляет полное $(2n+2)$-кратное накрытие области G_1 областью D. Таким образом, согласно теореме 4.2 работы [14], имеет место равенство

$$|c_n^2| = \frac{2^{2n}}{(1-\alpha^2)^{n+1}}.$$

Из единственности решения задачи о наименьшем отклонении от нуля на двух отрезках полинома с вещественными коэффициентами и старшим коэффицентом, равным 1 ([15] стр. 209), следует, что

$$P_n^2(z)(1-z^2) = \frac{1 - T_{n+1}\left(\dfrac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)}{2},$$

следовательно,

$$P_n(z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} W_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть полином*

$$P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0, \quad c_n \neq 0, \quad c_l \in \mathbb{R}, \quad l = 0, 1, \ldots n, \quad n \geqslant 1$$

удовлетворяет условию

$$|P(x)|\sqrt{x^2-\alpha^2} \leqslant 1, \quad x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда для любого числа $\rho > 1$ полный образ лемнискаты $L_{\alpha,\rho}$ при отображении $\omega = \sqrt{z^2-\alpha^2}P(z)$ лежит внутри эллипса с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n-1} + \rho^{n+1}$.

Если n – четное число, то образ лемнискаты совпадает с указанным эллипсом тогда и только тогда, когда

$$P_n(z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}V_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Доказательство. Пусть $D = \overline{\mathbb{C}}\setminus([-1,-\alpha]\cup[\alpha,1])$ и $G = \overline{\mathbb{C}}_w\setminus[-1,1]$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(z) := (n+1)g_D(z,\infty) - g_G(P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2},\infty).$$

Эта функция – гармоническая на открытом множестве

$$B := \{z\in D : P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2}\in G\}.$$

Действительно, из симметрии области G следует, что h не зависит от выбора корня, кроме того, в окрестностях конечных точек, функции Грина $g_D(z,\infty)$, а также суперпозиция $g_G(P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2},\infty)$ являются гармоническими. В окрестности бесконечности имеем представление

$$g_D(z,\infty) = \log|z| + h_1,$$
$$g_G(P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2},\infty) = (n+1)\log|z| + h_2,$$

где h_j, $j=1,2$ – гармонические функции, поэтому особенности сокращаются.

Заметим, что $B = \{z\in\overline{\mathbb{C}}_z : P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2}\notin[-1,1]\}$, поэтому если точка $z_0\in\partial B$, то первое слагаемое в определении функции h неотрицательное, а второе равно нулю.

По принципу максимума,

$$h(z)\geq 0 \quad \text{на} \quad B.$$

Пусть теперь $w\in G_r(\infty)\subset G$. Тогда в области D существует по крайней мере одна точка z, для которой $P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2} = w$. Таким образом, точка $z\in B$ и

$$(n+1)g_D(z,\infty)\geq g_G(w,\infty) > r. \tag{5}$$

Поэтому $w\in f(D_r(\infty,\dots,\infty))$, где под f понимается двузначная функция $P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2}$. Кроме того, $w\notin f(\partial D_r(\infty,\dots,\infty))$. В противном случае найдется точка $z\in\partial D_r(\infty,\dots,\infty)\subset D$ и такая, что

$f(z) = w \in G$. Тогда $z \in B$, что противоречит неравенству (5), так как первое слагаемое в (5) в этом случае равно r.

Для завершения доказательства первой части теоремы достаточно воспользоваться явными представлениями (3), (4) для функций Грина областей D и G соответственно.

Если теперь n – четное число и

$$P_n(z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}V_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

то, введя обозначение

$$\phi(z) = \frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2},$$

получаем

$$\begin{aligned}
P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2} &= \pm\frac{\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}V_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\\
&= \pm\frac{\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}V_{n/2}(\phi(z))\\
&= \pm\frac{\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}+(\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}}{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{1}{2}}+(\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{1}{2}}}\\
&= \pm\frac{\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\cdot\frac{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}+(\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}}{\dfrac{\sqrt{z^2-\alpha^2}+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\dfrac{\sqrt{z^2-\alpha^2}+\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{1-\alpha^2}}}\\
&= \pm\frac{(\phi(z)+\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}+(\phi(z)-\sqrt{\phi^2(z)-1})^{\frac{n+1}{2}}}{2}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае множество B совпадает с областью D. Следовательно, по принципу максимума,

$$h(z) \equiv 0 \quad \text{на} \quad D,$$

то есть

$$(n+1)g_D(z,\infty) = g_G(P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2},\infty).$$

Отсюда следует, что при отображении $\omega = P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2}$ лемниската $L_{\alpha,\rho}$ переходит в эллипс с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n-1}+\rho^{n+1}$.

Обратно, если при отображении $\omega = P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2}$ лемниската $L_{\alpha,\rho}$ переходит в эллипс с фокусами в точках ± 1 и большой осью, равной $\rho^{-n-1}+\rho^{n+1}$, то найдется точка $z_1 \in D$ такая, что

$$(n+1)g_D(z_1,\infty) = g_G(P(z_1)\sqrt{z^2-\alpha^2},\infty).$$

Тогда снова по принципу максимума

$$h(z) \equiv 0 \quad \text{на} \quad B$$

и $B = D$. Кроме того,

$$2g_G(P(z)\sqrt{z^2-\alpha^2},\infty) = g_{G1}(P^2(z)(z^2-\alpha^2),\infty),$$

где $G_1 = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$

Таким образом,

$$(2n+2)g_D(z,\infty) = g_{G1}(P^2(z)(z^2-\alpha^2),\infty), \quad z \in D.$$

Из последнего, согласно принципу Линделефа [12], следует, что отображение $P^2(z)(z^2-\alpha^2)$ осуществляет полное $(2n+2)$-кратное накрытие области G_1 областью D. Таким образом, согласно теореме 4.2 работы [14] имеет место равенство

$$|c_n^2| = \frac{2^{2n}}{(1-\alpha^2)^{n+1}}.$$

Из единственности решения задачи о наименьшем отклонении от нуля на двух отрезках полинома с вещественными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1 ([15, стр. 209]), следует, что

$$P_n^2(z)(z^2-\alpha^2) = \frac{1+T_{n+1}\left(\dfrac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)}{2},$$

следовательно,

$$P_n(z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}V_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Теорема доказана.

Устремляя в теоремах 4 и 5 ρ сначала к бесконечности, а затем к 1, получаем теоремы 3 и 4 работы [4]. Следующую теорему можно аналогичным образом получить из теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть полином* $P(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$, $c_n \neq 0$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n$, *удовлетворяет условию*

$$|P(x)|\sqrt{(1-x^2)(x^2-\alpha^2)} \leq 1, \quad x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1], \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда имеют место неравенства

$$|c_n| \leq \frac{2^{n+1}}{(1-\alpha^2)^{(n+2)/2}} \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned} &|(1-x^2)(x^2-\alpha^2)P'(x) - x(2x^2-1-\alpha^2)P(x)| \\ &\qquad \leq (n+2)|x|\sqrt{1-(1-x^2)(x^2-\alpha^2)P^2(x)} \end{aligned} \tag{7}$$

при $x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1]$.

Равенство в каждом из неравенств при четных n *достигается тогда и только тогда, когда*

$$P_n(z) = \pm\frac{2}{1-\alpha^2} U_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Доказательство. Из представления (3) функции Грина области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1])$ с полюсом в бесконечности имеем

$$g_D(z,\infty) = \log\left|\frac{\sqrt{z^2-1}+\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right| = \log|z| + \log\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} + o(1),\ z \to \infty.$$

Поэтому для точек z, лежащих в окрестности ∞ и расположенных на лемнискате $L_{\alpha,r}$, выполняется

$$|z| = \exp\left\{\log r - \log\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} + o(1)\right\}, \quad z \to \infty.$$

Пусть снова $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [-1,1]$, а $g_G(w,\infty)$ – функция Грина области G (см. (4)). Тогда по теореме 3 в соответствующих точках w при достаточно большом r имеем

$$\begin{aligned} \log r^{n+2} &\geq g_G(P(z)\sqrt{(1-z^2)(z^2-\alpha^2)}, \infty) \\ &= \log|P(z)\sqrt{(1-z^2)(z^2-\alpha^2)}| + \log 2 + o(1) \\ &= \log|c_n| + (n+2)\log r - (n+2)\log\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} + \log 2 + o(1). \end{aligned}$$

После простых вычислений приходим к неравенству (6).

Функция Грина $g_D(z,\infty)$ и суперпозиция

$$g_G(P(z)\sqrt{(1-z^2)(z^2-\alpha^2)},\infty)$$

имеют производную вдоль нормали к отрезкам $[-1,-\alpha]$ и $[\alpha,1]$ почти в каждой точке области. Кроме того, эти функции обращаются в нуль на этих отрезках. Из теоремы 3 и геометрического смысла модуля производной вытекает неравенство (7).

Согласно теореме 2 статьи [4] и теореме 4.2 работы [14], равенства в (6) и (7) достигаются одновременно, поэтому рассмотрим только неравенство (6).

Если

$$P_n(z)=\pm\frac{2}{1-\alpha^2}U_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

то очевидно, что в (6) имеет место равенство.

Докажем обратное утверждение. Пусть n – четное и в (6) достигается равенство. Из единственности решения задачи о наименьшем отклонении от нуля на двух отрезках полинома с вещественными коэффициентами и старшим коэффициентом, равным 1 ([15, стр. 209]) следует, что

$$P_n^2(z)(1-z^2)(z^2-\alpha^2)=\frac{1-T_{n+2}\left(\dfrac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)}{2},$$

следовательно,

$$P_n(z)=\pm\frac{2}{1-\alpha^2}U_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Теорема доказана.

Литература

1. M. A. Lachance, *Bernstein and Markov inequalities for constrained polynomials.* — Lect. Notes Math. **1045** (1984), 125–135.
2. Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Markoff type inequalities for curved majorants.* — Numerical methods of approx. theory **8** (1987), 169–183.
3. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *Принцип мажорации для мероморфных функций.* — Мат. сб. **198**, No.12 (2007), 37–46.

4. С. И. Калмыков, *Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 143–157.
5. С. И. Калмыков, *О полиномах, имеющих криволинейную мажоранту на двух отрезках.* — Изв. вузов. Математика **10** (2009), 72–75.
6. Я. Л. Геронимус, *Теория ортогональных многочленов.* М., 1950.
7. A. L. Levin, E. B. Saff, *Potential theoretic tools polynomial and rational approximation.* — Harmonic Analysis and Rational Approximation, Lect. Notes in Control and Inf. Sci. **327** (2006), 71–94.
8. Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, *Лекции по теории функций комплексного переменного.* М., 1989.
9. К. Дочев, *О некоторых экстремальных свойствах многочленов.* — Докл. АН СССР. (3) **153** (1963), 519–521.
10. P. Borwein, *Polynomials and Polynomial Inequalities.* Springer-Verlag, N. Y. 1995.
11. В. Н. Дубинин, *Конформные отображения и неравенства для алгебраических полиномов.* — Алгебра и анализ. **13**, No.5 (2001), 16–43.
12. С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного.* Т. 2, М., 1962.
13. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены.* М., 1962.
14. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* Изд. Кубанского гос. ун-та, Краснодар, 1980.
15. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций.* М., 1970.

Kalmykov S. I. Covering theorems for polynomials with curved majorants on two segments.

In this paper, covering theorems for analytic functions related to polynomials that have curved majorants on two symmetric intervals are proved. These theorems contain and complement some new and classical results for polynomials with constraints on one and two intervals.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041 Владивосток, Россия
E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило 30 августа 2010 г.