Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

Ф. И. Иванов, В. А. Шлык

О НУЛЬ–МНОЖЕСТВАХ ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ДЛИН

1. Введение

Задача описания устранимых множеств для некоторых классов отображений сводится к описанию так называемых нуль-множеств для модулей (иначе говоря, экстремальных длин) семейств кривых. Описание устранимых особенностей на плоскости в классе регулярных функций с ограниченным интегралом Дирихле выполнено Альфорсом и Бейрлингом в [1]. В частности, ими было установлено с помощью теории конформных отображений, что устранимые множества для этого класса отображений совпадают с множествами, не меняющими модули семейств кривых, соединяющих противоположные стороны координатных прямоугольников. Ими было отмечено, что такие множества не меняют модули семейств кривых, соединяющих пластины произвольного конденсатора (см. [1, теорема 9]). Подробный обзор по этой тематике можно найти в [2], см. также [3], [4].

В данной работе получено описание нуль-множеств (теорема 1) в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$, для обобщенного модуля конденсатора в смысле Айкавы-Отцуки [5] в предположении непрерывности этого модуля (предложение 2, замечание к теореме 1). Это описание проводится в рамках метода экстремальной метрики и его современной версии в виде метода экстремальной метрики векторных мер [5]. Естественно, что из него при $n = 2$ следует отмеченный выше результат Альфорса-Бейрлинга.

2. Основные определения и обозначения

Ниже G – открытое ограниченное множество в R^n, $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{H}_k$ – соответственно k-мерные меры Лебега и Хаусдорфа; A_p – класс локально

Ключевые слова: экстремальная длина, устранимая особенность, модуль конденсатора.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ–2810-2008.1), РФФИ (грант 08-01-000 28) и ДВО РАН (грант 06-III-А-01-013).

интегрируемых функций $w : R^n \to (0, \infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [6]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\, dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\, dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берётся по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $|Q| = \mathcal{L}_n(Q)$; $p, q \in (1, \infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отметим, что функцию $w \in A_p$, переопределив на множестве $\mathcal{L}_n$-меры нуль, можно считать борелевской на R^n. Пусть D – открытое множество из R^n. Обозначим через $L^{p,w}(D)$ класс функций $f : D \to [-\infty, \infty]$, для которых $\|f\|_{p,w} = \left(\int\limits_D |f|^p w\, dx \right)^{1/p} < \infty$; $L^{p,w}(D, R^n) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$: $f_i \in L^{p,w}(D)$, $i = 1, \cdots, n$. Через $L_+^{p,w}(D)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0, \infty]$, $f \in L^{p,w}(D)$; в случае, если $w \equiv 1$ в R^n, положим $L^{p,w}(D, R^n) = L_+^p(D)$. Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L_1^{p,w}(G)$ пространство функций $u : G \to [-\infty, \infty]$, локально интегрируемых в G, имеющих в G обобщенные частные производные и таких, что $\int\limits_G |\nabla u|^p w dx < \infty$.

Пусть $B(x, r)$ – открытый шар с центром в точке $x \in R^n$ радиуса $r > 0$. Определим максимальную функцию

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

для локально интегрируемой функции f в R^n, $|B(x, r)| = \mathcal{L}_n(B(x, r))$. Известно (см.[7, теорема 5.1.1]), что

$$\|Mf\|_{p,w} \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{p,w}. \tag{1}$$

Пусть $d(E, F)$, $d(E)$ – соответственно евклидово расстояние между множествами E и F, евклидов диаметр множества E для $E, F \subset R^n$; $\overline{E}, \partial E, \mathrm{int} E$ – соответственно замыкание, граница, внутренность множества E в топологии R^n. Кривой γ в R^n назовем образ числового интервала или его отрезка при непрерывном отображении его в R^n. Пусть γ – локально спрямляемая кривая в R^n. Зададим γ в терминах её дуговой длины: $x = x(s)$, $s \in T$ ($T = [a, b]$ или $T = (a, b)$).

Рассмотрим дуговую длину как меру, определенную на борелевских множествах в R^n следующим образом. Пусть B – борелевское множество в R^n. Тогда $x^{-1}(B)$ – борелевское множество в T. Положим $\mu_\gamma(B)$ равной $\mathcal{L}_1(x^{-1}(B))$, и назовем $\mu_\gamma(B)$ длиной B на γ. Элемент этой длины будем записывать как $ds = ds_\gamma = |dx|$.

В дальнейшем будем рассматривать только кривые, отличные от точки и локально спрямляемые в R^n. Пусть ρ – борелевская функция в R^n. Тогда (см. [7]) $\int\limits_\gamma \rho\, ds = \int\limits_{R^n} \rho\, d\mu_\gamma$. При этом интеграл $\int\limits_{R^n} \rho\, d\mu_\gamma$ равен интегралу $\int\limits_a^b \rho(x(s))\, ds$ в смысле Лебега.

Поскольку $x = x(s)$ удовлетворяет условию Липшица на T, то $x'(s)$ определена на борелевском множестве $A \subset T$, $\mathcal{L}_1(A) = \mathcal{L}_1(T)$ (см. [7]). Полагая $x'(s) = (0, \cdots, 0)$ на $T \setminus A$, $x(s)$ можно записать как $\int\limits_{s_0}^{s} x'(t)\, dt$ для $s, s_0 \in T$, $s > s_0$ (если $s < s_0$, то $x(s) = \int\limits_{s}^{s_0} x'(t)\, dt$). Введем в R^n векторный заряд $\nu_\gamma(B)$, порожденный длиной дуги кривой γ, по следующему правилу. Пусть B – борелевское множество в R^n, тогда

$$\nu_\gamma(B) = \int\limits_{x^{-1}(B)} x'(s)\, ds.$$

Элемент этого заряда обозначим через $d\nu_\gamma = dx_\gamma = dx$. Если $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ – борелевская вектор-функция в R^n, то

$$\int\limits_\gamma \xi\, dx = \int\limits_{R^n} \xi\, d\nu_\gamma = \int\limits_a^b \xi(x(s)) x'(s)\, ds.$$

Определим (p, w)-модуль с весом $w \in A_p$ семейства Γ кривых $\gamma \subset R^n$ как величину

$$m_{p,w}(\Gamma) = \inf_\rho \int\limits_{R^n} \rho^p w\, dx,$$

где инфимум берется по всем $\rho \in L_+^{p,w}(R^n)$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых функций ρ обозначим через $\operatorname{adm}_{p,w} \Gamma$. Как видно из текста, обозначение dx применяется в разных смыслах: для криволинейного интеграла dx – элемент векторного заряда, а для кратного интеграла – элемент объема.

Под конденсатором будем понимать набор множеств $(F_0, F_1, G) = (G)$, где $F_0,\quad F_1 \subset \overline{G}$ – непустые непересекающиеся компакты. Для конденсатора (F_0, F_1, G) через $\Gamma(F_0, F_1, G)$ обозначим семейство всех кривых $\gamma \subset G$, соединяющих F_0 и F_1. Тогда (p, w)-модуль конденсатора с весом $w \in A_p$ определим равенством $m_{p,w}(F_0, F_1, G) = m_{p,w}(\Gamma(F_0, F_1, G))$. Положим $\mathrm{adm}_{p,w}(F_0, F_1, G) = \mathrm{adm}_{p,w}\,\Gamma(F_0, F_1, G)$. Семейство всех ломаных $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)$ таких, что звенья γ являются отрезками, параллельными координатным осям, и пересечение $\gamma \cap (G \setminus U)$ для любой окрестности U компакта $F_0 \cup F_1$ содержится в объединении конечного числа звеньев ломаной γ, обозначим через $\Gamma^0(F_0, F_1, G)$.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ – положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица с измеримыми по Борелю компонентами $a_{ij}(x)$ такими, что

$$c_0^{-2} w(x)^{\frac{2}{p}} |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant c_0^2 w(x)^{\frac{2}{p}} |\xi|^2 \tag{2}$$

для любого вектора $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in R^n$, $x \in G$, где $c_0 \geqslant 1$ – постоянная и $w \in A_p$. Для $x \in R^n \setminus G$ положим $\mathcal{A}(x)$ равной единичной матрице $\mathcal{I}$, умноженной на $w(x)^{\frac{2}{p}}$.

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x) = \{b_{ij}\}$ – обратная матрица для $\mathcal{A}$. Тогда в силу (2) матрица $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию

$$c_0^{-2} w(x)^{-\frac{2}{p}} |\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant c_0^2 w(x)^{-\frac{2}{p}} |\xi|^2.$$

Положим $\mathcal{A}[\xi] = \Big(\sum\limits_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\Big)^{\frac{1}{2}}$ для $\xi \in R^n$, и если $\xi(x)$ – измеримая по Борелю вектор-функция в G, то положим

$$\mathcal{A}_p(\xi) = \Big(\int\limits_G \mathcal{A}[\xi]^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогично определим $\mathcal{B}[\xi],\quad \mathcal{B}_p(\xi)$. Заметим, что существуют положительно определенные симметрические матрицы $\sqrt{\mathcal{A}},\quad \sqrt{\mathcal{B}}$ такие, что $\left(\sqrt{\mathcal{A}}\right)^2 = \mathcal{A},\quad \left(\sqrt{\mathcal{B}}\right)^2 = \mathcal{B}$,

$$\mathcal{A}_p(\xi) = \int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}}[\xi]|^p\,dx, \quad \mathcal{B}_p(\xi) = \int\limits_G |\sqrt{\mathcal{B}}[\xi]|^p\,dx$$

и

$$c_0^{-1}w(x)^{\frac{1}{p}}|\xi| \leqslant |\sqrt{\mathcal{A}}\xi| \leqslant c_0 w(x)^{\frac{1}{p}}|\xi|, \tag{3}$$

$$c_0^{-1}w(x)^{-\frac{1}{p}}|\xi| \leqslant |\sqrt{\mathcal{B}}\xi| \leqslant c_0 w(x)^{-\frac{1}{p}}|\xi|.$$

Следуя [5], определим обобщенную ёмкость конденсатора (F_0, F_1, G) как

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G) = \inf \mathcal{A}_p(\nabla u)^p,$$

где инфимум берется по функциям $u \in C^\infty(G) \cap L^1_{p,w}(G)$, равным j в окрестности F_j, $\quad j = 0, 1$.

Пусть $d\Gamma = \{dx_\gamma : \ \gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)\}$, $\quad |\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma| = \{|\sqrt{\mathcal{B}}dx_\gamma| : \ \gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)\}$, $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma) = \inf \mathcal{A}_p(\xi)^p = m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, G))$, где инфимум берется по всем функциям $\xi \in L^{p,w}(G, R^n)$ таким, что $\int\limits_\gamma \xi\, dx_\gamma \geqslant 1$ для (p, w)-почти всех $dx_\gamma \in d\Gamma$. Последнее означает, что (p, w)-модуль семейства $\mathcal{E}_\xi = \{|dx_\gamma| : \ dx_\gamma \in d\Gamma, \ \int\limits_\gamma \xi\, dx_\gamma < 1\}$ в смысле Фюгледе (см.[8]) равен нулю. Класс всех таких функций ξ обозначим через $\widetilde{\operatorname{adm}}_{\mathcal{A},p} d\Gamma(F_0, F_1, G)$. Если в определении ξ семейство $\mathcal{E}_\xi = \varnothing$, то класс таких вектор-функций обозначим через $\operatorname{adm}_{\mathcal{A},p} d\Gamma(F_0, F_1, G)$. Аналогичные обозначения классов допустимых вектор-функций ξ будем применять и для других семейств из $d\Gamma(F_0, F_1, G)$. Помимо модуля $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, G))$ введем ещё величину

$$m_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|) = m_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma(F_0, F_1, G)|) = \inf \int\limits_G \rho^p\, dx,$$

где инфимум берется по всем функциям $\rho \in L^p_+(G)$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho|\sqrt{\mathcal{B}}dx_\gamma| \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)$. Класс всех таких функций обозначим через

$$\operatorname{adm}_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|) = \operatorname{adm}_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma(F_0, F_1, G)|).$$

Справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Если функция $w(x)^{\frac{1}{p}}\sqrt{\mathcal{B}(x)}$ непрерывна в G, то*

$$m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma) = m_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|) = C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G).$$

Предложение 2. *Если функция $w(x)^{\frac{1}{p}}\sqrt{\mathcal{B}(x)}$ непрерывна в G, то $m_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|)$ обладает свойством непрерывности: если F_0^j, F_1^j, $j \geqslant 1$, – последовательности компактов такие, что*

$$F_0^1 \cap F_1^1 = \varnothing, \quad F_0^{j+1} \subset \operatorname{int} F_0^j, \quad F_1^{j+1} \subset \operatorname{int} F_1^j, \quad F_0 = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_0^j,$$

$$F_1 = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_1^j, \quad \Gamma_j = \Gamma(F_0^j \cap \overline{G}, F_1^j \cap \overline{G}, G), \qquad \text{то}$$

$$m_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma_j|) \quad \downarrow \quad m_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma|).$$

Замечание. Предложение 2 для функции $w(x)^{\frac{1}{p}}\sqrt{\mathcal{B}(x)}$, равномерно непрерывной в G, было установлено в [5, теорема 4], и из него как следствие было получено предложение 1 (см. [5, теорема 1, теорема 5]).

В общем случае, как было отмечено Ю. В. Дымченко, для доказательства предложения 2 нужно применить исчерпание G изнутри последовательностью открытых множеств D_j, $\overline{D_j} \subset \operatorname{int} D_{j+1}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = G$, и построения из [9, лемма 2]. Данные построения, в свою очередь, представляют собой модификацию рассуждений из [5, доказательство теоремы 4, с. 85–87].

Для координатного прямоугольника $\Pi = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n : a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, \cdots, n\}$ его грани, параллельные гиперплоскости $H_i = \{x : \quad x_i = 0\}$, обозначим через $\sigma_{0i} \subset \{x : \quad x_i = a_i\}$ и $\sigma_{1i} \subset \{x : x_i = b_i\}$. Пусть E – компакт в G. Следуя Л. Альфорсу и Л. Бейрлингу [1], С. К. Водопьянову и В. М. Гольдштейну [10], E назовем $NC_{p,w}$-множеством в G, если для любого координатного прямоугольника Π, $\overline{\Pi} \subset G$, выполнены равенства

$$m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E) = m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{4}$$

Из определения $NC_{p,w}$-множества (см. [4]) следует, что E не разбивает локально G и $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Пусть X_i – семейство всех прямых в R^n, параллельных координатной x_i-оси, $i = 1, \cdots, n$. Индексируем каждую прямую $l \in X_i$ индексом a, где a – точка пересечения этой прямой с гиперплоскостью H_i. Тогда будем говорить, что некоторое свойство выполняется для $\mathcal{L}_{n-1}$-почти всех ($\mathcal{L}_{n-1}$-п. в.) прямых из X_i, если соответствующее множество точек a на H_i для прямых из X_i, не удовлетворяющих этому свойству, имеет нулевую $\mathcal{L}_{n-1}$-меру.

Пусть E – компакт в G и $\mathcal{L}_n(E)=0$. Будем говорить, что E удовлетворяет условию малости обхвата с весом $w \in A_p$ в G относительно X_i, если для каждой борелевской функции $\rho : G \to [0,+\infty)$, локально ограниченной в $G \setminus E$, $\rho \in L_+^{p,w}(G)$, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие ε-обхвата, т. е. для $\mathcal{L}_{n-1}$-п. в. прямых $l \in X_i$, $l \cap E \neq \varnothing$ (выбор прямых не зависит от выбора $\varepsilon > 0$), можно указать конечную последовательность непересекающихся интервалов $(c_k, d_k) \subset l$ и кривые $\gamma_k \subset G \setminus E$, соединяющие c_k и d_k, $k = 1, \cdots, m$, и такие, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \rho\, ds < \varepsilon$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} ds < \varepsilon$, $\sum\limits_{k=1}^{m} (d_k - c_k) < \varepsilon$, $\bigcup\limits_{k=1}^{m} (c_k, d_k) \supset l \cap E$.

Выписанное условие на l будем называть условием ε-обхвата на прямой l для ρ.

Условие $\sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_{\gamma_k} \rho\, ds < \varepsilon$, $\rho = 1$ в G, влечет в силу произвола в выборе $\varepsilon > 0$, что для $\mathcal{L}_{n-1}$-п. в. прямых $l \in X_i$, $l \cap E \neq \varnothing$, $\mathcal{L}_1(l \cap E) = 0$. Другими словами, если компакт E удовлетворяет условию малости обхвата с весом $w \in A_p$ в G относительно X_i, то $\mathcal{L}_n(E) = 0$.

Известно (см. [4, теорема 11]) описание $NC_{p,w}$-множеств в терминах малости обхвата.

Предложение 3. *Пусть E – компакт в G и $\mathcal{L}_n(E)=0$. E – $NC_{p,w}$-множество в G тогда и только тогда, когда E удовлетворяет условию малости обхвата с весом $w \in A_p$ относительно X_i,* $\quad i = 1, \cdots, n$.

Замечание. Утверждение предложения 3 останется в силе, если в определении $NC_{p,w}$-множества в G равенство (4) заменить на неравенство

$$c \cdot m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E) \geqslant m_{p,w}(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi), \tag{5}$$

где постоянная $c \geqslant 1$ не зависит от выбора координатного прямоугольника Π, $\overline{\Pi} \subset G$, и его противоположных граней $\sigma_{0i}, \quad \sigma_{1i}, \quad i = 1, \cdots, n$.

Иначе говоря, класс $NC_{p,w}$-множеств в G не изменится, если (4) заменить на (5).

3. Описание нуль-множеств для обобщенного модуля с непрерывной $w(x)^{\frac{1}{p}}\sqrt{\mathcal{B}(x)}$ в G

Пусть функция $w(x)^{\frac{1}{p}}\sqrt{\mathcal{B}(x)}$ непрерывна в G. Компакт $E, \quad E \subset G$, назовем нуль-множеством для $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma)$ в G, если для любого конденсатора (F_0, F_1, D), где $D \subset G$,

$$m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D \setminus E)) = m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D)).$$

Теорема 1. *Компакт E, $E \subset G$, является нуль-множеством для $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma)$ в G тогда и только тогда, когда E удовлетворяет условию малости обхвата с весом $w \in A_p$ в G относительно X_i, $i = 1, \cdots, n$.*

Необходимость. Сначала заметим, что для $\rho \in \operatorname{adm}_{p,w}(F_0, F_1, D)$, $D \subset G$, в силу (3) $c_0 w(x)^{\frac{1}{p}} \rho \in \operatorname{adm}_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma(F_0, F_1, D)|)$ и, наоборот, если $\rho \in \operatorname{adm}_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma(F_0, F_1, D)|)$, то $\rho c_0 w(x)^{-\frac{1}{p}} \in \operatorname{adm}_{p,w}(F_0, F_1, D)$. Отсюда

$$c_0^p m_p(F_0, F_1, D) \geqslant m_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma(F_0, F_1, D)|) \geqslant c_0^{-\frac{1}{p}} m_p(F_0, F_1, D).$$

Поэтому, если E – нуль-множество для $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma)$, то, в силу предложения 1 и замечания к предложению 3, компакт E является $NC_{p,w}$-множеством в G. Значит, ввиду предложения 3, E удовлетворяет условию малости обхвата с весом $w \in A_p$ в G относительно X_i, $i = 1, \cdots, n$, что доказывает необходимость условия теоремы 1.

Достаточность. Пусть E удовлетворяет условию малости обхвата из теоремы 1 и, следовательно, $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Установим, что для любого конденсатора (F_0, F_1, D), $D \subset G$, имеет место равенство

$$m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D \setminus E)) = m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D)).$$

В силу предложения 2 для заданного $\varepsilon > 0$ можно указать компакты F_0^1, F_0^2, F_0^3, F_1^1, F_1^2, F_1^3 такие, что $F_i^{j-1} \subset \operatorname{int} F_i^j$, $j = 1, 2, 3$, $i = 0, 1$, и

$$0 \leqslant m_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma(F_0^3 \cap \overline{D}, F_1^3 \cap \overline{D}, D \setminus E)|) - m_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma(F_0, F_1, D \setminus E)|) < \varepsilon,$$
$$0 \leqslant m_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma(F_0^3 \cap \overline{D}, F_1^3 \cap \overline{D}, D)|) - m_p(|\sqrt{\mathcal{B}} d\Gamma(F_0, F_1, D)|) < \varepsilon.$$

Здесь $F_0^0 = F_0$, $F_1^0 = F_1$ и $F_0^3 \cap F_1^3 = \varnothing$. Для $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, D \setminus E)$ $(\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, D))$ определим $\gamma^2 \in \Gamma(F_0^2 \cap \overline{D}, F_1^2 \cap \overline{D}, D \setminus E)$ $(\gamma^2 \in \Gamma(F_0^2 \cap \overline{D}, F_1^2 \cap \overline{D}, D))$ условием $\gamma^2 \subset \gamma \setminus (F_0^2 \cup F_1^2)$. Отметим, что $\overline{D \setminus E} = \overline{D}$, поскольку $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Положим $\Gamma^2(D \setminus E) = \{\gamma^2 : \gamma \in \Gamma(F_0, F_1, D \setminus E)\}$,

$\Gamma^2(D) = \{\gamma^2 : \gamma \in \Gamma(F_0, F_1, D)\}$. Заменяя $\Gamma(F_0, F_1, D)$ на $\Gamma^0(F_0, F_1, D)$, аналогично введем $\Gamma^{02}(D)$.

По построению,

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0^1 \cap \overline{D}, F_1^1 \cap \overline{D}, D \setminus E)) &\leqslant m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma^2(D \setminus E)) \\ &\leqslant m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0^3 \cap \overline{D}, F_1^3 \cap \overline{D}, D \setminus E)), \\ m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0^1 \cap \overline{D}, F_1^1 \cap \overline{D}, D)) &\leqslant m_{A,p}(d\Gamma^2(D)) \\ &\leqslant m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0^3 \cap \overline{D}, F_1^3 \cap \overline{D}, D)). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $\Gamma_k^2(D) = \{\gamma^2 \in \Gamma^2(D) : d(\gamma^2, \partial D) > \frac{1}{k}\}$, $\Gamma_k^{02}(D) = \{\gamma^2 \in \Gamma^{02}(D) : d(\gamma^2, \partial D) > \frac{1}{k}\}$, $k = 1, 2, \cdots$.

Ввиду монотонности $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma)$ (см. [5, предложение 1]), $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma_k^2(D)) \uparrow m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma^2(D))$ при $k \to \infty$. Пусть теперь $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \widetilde{\mathrm{adm}}(F_0^3 \cap \overline{D}, F_1^3 \cap \overline{D}, D \setminus E)$. В силу предложения 1 и определения $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0^3 \cap \overline{D}, F_1^3 \cap \overline{D}, D \setminus E)$, в качестве ξ можно взять ∇u, где $u \in L^1_{p,w}(D \setminus E) \cap C^\infty(D \setminus E)$, $u = j$ в окрестности F_j^3, $\quad j = 0,\ 1$. Тогда ξ – локально ограниченная вектор-функция в $D \setminus E$. Положим $\xi = \overrightarrow{0} = (0, \cdots, 0)$ на D вне $(D \setminus E) \setminus (F_0^3 \cup F_1)$. Ясно, что для любой кривой $\gamma \in \Gamma(F_0^2 \cap \overline{D}, F_1^2 \cap \overline{D}, D \setminus E)$

$$\int\limits_\gamma \xi\, dx = \int\limits_\lambda \xi\, dx \geqslant 1, \qquad \text{где } \lambda = \gamma \cap \Big((D \setminus E) \setminus (F_0^3 \cup F_1^3)\Big).$$

Для $x \in R^n \setminus D$ вектор-функцию ξ будем считать равной $\overrightarrow{0}$. Положим

$$\xi_r(x) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \xi(x+y)\, dy,$$

где $0 < r < \min\{d(F_0^2 \cup F_1^2, \partial(F_0^3 \cup F_1^3)), \frac{1}{k+1}\}$.

В силу (1), $\|\xi_r(x)\|_{p,w} \leqslant \mathrm{const}\, \|\xi(x)\|_{p,w}$ и при $r \to 0$

$$\int\limits_D |\xi_r(x) - \xi(x)|^p w\, dx \to 0. \tag{7}$$

Покажем, что $\int\limits_\gamma \xi_r\, dx \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma_{k+1}^{02}(D)$.

Действительно, по определению, ломаная γ состоит из конечного числа прямолинейных отрезков $l_1, \cdots, l_s$. Пусть $\gamma_y, \quad l_{1y}, \cdots, l_{sy}$ – результаты переноса на вектор y, $|y| < r$, соответственно $\gamma,\ l_1, \cdots, l_s$. В силу выбора r ломаная γ_y будет лежать в D и соединять F_0^3, F_1^3. Нетрудно заметить, что для $\mathcal{L}_n$-почти всех y, $|y| < r$, концы отрезка l_{iy} не принадлежат E, $\mathcal{L}_1(l_{iy} \cap E) = 0$, и для координатных функций $\xi_1, \cdots, \xi_n$ вектора ξ на l_{iy} выполняется условие малости обхвата, $i = 1, \cdots, s$. Следовательно, $\int\limits_{\gamma_y} \xi\, dx \geqslant 1$ для $\mathcal{L}_n$-почти всех y, $|y| < r$.

Это и теорема Фубини (см. [11]) дает требуемое неравенство:

$$\int\limits_{\gamma} \xi_r(x)\, dx = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{\gamma} \xi(x+y)\, dx = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{\gamma_y} \xi(x)\, dx \geqslant 1.$$

Итак, $\xi_r(x) \in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}\, d\Gamma_{k+1}^{02}(D)$ и $\xi_r(x)$ – непрерывная функция в R^n. Тогда по известному свойству аппроксимируемости криволинейного интеграла по спрямляемой кривой криволинейным интегралом по ломаной, для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_k^2(D)$ можно указать последовательность ломаных $\gamma_j \in \Gamma_{k+1}^{02}(D)$, $j \geqslant 1$, для которой

$$\Big|\int\limits_{\gamma} \xi_r\, dx - \int\limits_{\gamma_j} \xi_r\, dx\Big| < \frac{1}{j}. \tag{8}$$

При этом γ_j находится в $\frac{1}{j}$-окрестности кривой γ и, наоборот, γ находится в $\frac{1}{j}$-окрестности кривой γ_j. Неравенство (8) приводит к соотношению $\int\limits_{\gamma} \xi_r\, dx \geqslant 1$. Ввиду (7), равенства $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma^2(D)) = \lim\limits_{k\to\infty} m_p(d\Gamma_k^2(D))$ и теоремы Фюгледе [8] о связи сходимости в среднем со сходимостью по мерам (в нашем случае это dx_γ, $\gamma \in \Gamma^2(D)$), получим, что $\xi \in \widetilde{\mathrm{adm}}_{\mathcal{A},p}(d\Gamma^2(D))$. Поэтому, учитывая произвол в выборе ξ и $\varepsilon > 0$, из предложений 1, 2 и соотношений (6) получаем

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D \setminus E)) + o(1) &= m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0^3 \cap \overline{D}, F_1^3 \cap \overline{D}, D \setminus E)) \\ &\geqslant m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma^2(D)) \geqslant m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0^1 \cap \overline{D}, F_1^1 \cap \overline{D}, D)) \\ &= m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D)) + o(1). \end{aligned}$$

Значит, $m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D \setminus E)) = m_{\mathcal{A},p}(d\Gamma(F_0, F_1, D))$, что завершает доказательство теоремы 1.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 1, утверждение этой теоремы остается в силе, если требование непрерывности функции $w(x)^{\frac{1}{p}}\sqrt{\mathcal{B}(x)}$ в G заменить на условие непрерывности модуля $m_p(|\sqrt{\mathcal{B}}d\Gamma(F_0, F_1, D)|)$ в смысле предложения 2 для любого конденсатора (F_0, F_1, D), $D \subset G$.

Литература

1. L. Ahlfors, A. Beurling, *Conformal invariants and functions-theoretic null-sets.* — Acta Math. **83**, No. 1–2 (1950), 100–129.
2. В. В.Асеев, *NED-множества, лежащие в гиперплоскости.* — Сиб. мат. ж. **50**, No. 5 (2009), 760–775.
3. L. I. Hedberg, *Removable singularities and conseder capacities.* — Ark. Mat. **12**, No. 2 (1974), 181–201.
4. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
5. H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal length of vector measures.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A **24** (1999), 61–88.
6. B. Muckenhoupt, *Weighted norm unequalities for the Hardy maximal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1972), 207–226.
7. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, GAKUTO International Journal, Advances in Math. Sciences and Appl. **19** (2003), 1–343.
8. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion.* — Acta Math. **120**, No. 3 (1957), 171–219.
9. Ю. В. Дымченко, *Равенство емкости и модуля конденсатора в финслеровых пространствах.* — Мат. заметки **85**, No. 4 (2009), 594–602.
10. С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн, *Критерий устранимости множеств для пространства W_p^1, квазиконформных и квазиизопериметрических отображений.* — Сиб. мат. ж. **18**, No. 1 (1977), 48–68.
11. Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций.* — Новосибирск (2002).

Ivanov F. I., Shlyk V. A. Null-sets for the extremal lengths.

In this paper, a description of the null-sets for the generalized Aikawa-Ohtsuka condenser module is obtained under the assumption that the module has the continuity property.

Дальневосточный
государственный университет
ул. Суханова 8,
690950 Владивосток, Россия

E-mail: shlyknv@yandex.ru

Поступило 11 мая 2010 г.