Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

В. Н. Дубинин

О КОМПОНЕНТАХ ЛЕМНИСКАТЫ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ПОЛИНОМА, ОТЛИЧНЫХ ОТ ЕГО НУЛЕЙ

Введение

Пусть R – рациональная функция степени n, представимая в виде $R = P/Q$, где P и Q – полиномы, не имеющие общих нулей, причем P – полином степени n, а Q – полином степени $< n$, и пусть $R(0) = 0$, $R'(0) \neq 0$. Шейл-Смолл поставил вопрос об определении хотя бы какой-нибудь окрестности точки $w = 0$, в которой можно было бы выделить однозначную ветвь $f(w)$ обратной функции $z = R^{-1}(w)$, $f(0) = 0$, удовлетворяющую неравенству

$$\operatorname{Re}\frac{wf'(w)}{f(w)} \geq \frac{1}{n}$$

(см. [1, п. 10.3.2]). Полученное неравенство представляло бы интерес касательно формы линий уровня $|R(z)| = \mathrm{const}$ в области однолистности функции R. В данной заметке рассматривается близкая задача, но только для полиномов P ($Q \equiv 1$). Именно, доказывается следующая

Теорема. *Пусть P – полином степени не выше n, и пусть E – связная компонента лемнискаты $|P(z)| \leq 1$, не содержащая критических точек полинома P , отличных от его нулей. Тогда для любой точки $z \in E \setminus \{a\}$ выполняется неравенство*

$$\left|\frac{(z-a)P'(z)}{P(z)}\right| \leq n, \tag{1}$$

где a – нуль полинома P, принадлежащий компоненте E. Равенство в (1) для любой точки z достигается в случае $P(z) = cz^n$, $c \neq 0$.

Ключевые слова: полином, лемниската, симметризация Штейнера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00028) и ДВО РАН (грант No. 09-I-П4-02).

Если компонента E на содержит критических точек, то из (1) следует, что для соответствующей ветви f обратной к полиному P функции в круге $|w| < 1$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{wf'(w)}{f(w)-a}\right| \geq \frac{1}{n}.$$

Это слабее постановки Шейл-Смолла, однако в отличие от [1] мы допускаем наличие критической точки в E. Полученный результат имеет следующее геометрическое истолкование. Пусть для простоты $a = 0$ и $\log(\cdot)$ означает однозначную ветвь логарифма, отображающую плоскость с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси на некоторую полосу ширины 2π. Для любой линии уровня $c(\tau)$ $(|P(z)| = \tau < 1)$ "кривая" $\gamma(\tau) = \log c(\tau)$ соединяет противоположные стороны указанной полосы и, следовательно, ее длина $\geq 2\pi$. С другой стороны, образ $\gamma(\tau)$ при отображении $\log P(\exp(\cdot))$ покрывает вертикальный отрезок длины 2π не более, чем n раз. Следовательно, на кривой $\gamma(\tau)$ найдется точка ζ, в которой коэффициент растяжения

$$\left|\,[\log P(\exp\zeta)]'\right| \leq n,$$

что означает неравенство (1) в некоторой точке $z = \exp\zeta$ линии уровня $c(\tau)$. Наша теорема утверждает, что на самом деле это неравенство имеет место в любой точке кривой $c(\tau)$. Требование, чтобы множество E не содержало критической точки, отличной от нуля, является существенным. Например, для полинома $P(z) = z^3/2 - 3z^2/4$ лемниската $|P(z)| \leq 1$ содержит обе критические точки $z = 0$ и $z = 1$, и, следовательно, является связной. Точка $z = 2$ принадлежит этой лемнискате, но

$$\frac{2P'(2)}{P(2)} = 6 > 3.$$

Следствие. *Если в условиях теоремы в некоторой точке $z \in E$ выполняется $P(z) > 0$, то для полярной производной D_aP относительно точки a справедливы оценки*

$$\operatorname{Re} D_aP(z) = \operatorname{Re}\,[nP(z) - (z-a)P'(z)] \geq 0, \quad \operatorname{Im} D_aP(z) \geq 0.$$

Доказательство теоремы будет дано в §2 и оно восходит в идейном плане к доказательству гипотезы Хеймана о покрытии вертикальных отрезков при конформном отображении круга [2].

§1. Вспомогательные построения и утверждения

Пусть P – полином степени n, и пусть E – связная компонента лемнискаты $|P(z)| \le 1$, не содержащая критических точек полинома P, отличных от его нулей (т.е. точек ζ, для которых $P'(\zeta) = 0$, $P(\zeta) \ne 0$). Пусть a – нуль полинома P, лежащий в E, и пусть z_0 – точка компоненты E, для которой $P(z_0) > 0$.

Обозначим через $\mathcal{R}$ риманову поверхность функции $\mathcal{P}^{-1}$, обратной полиному P. Далее рассматриваем функцию $\mathcal{P}^{-1}$ как однозначную функцию, заданную на поверхности $\mathcal{R}$, и пусть $\mathcal{P} : \overline{\mathbb{C}}_z \to \mathcal{R}$ есть функция, обратная $\mathcal{P}^{-1}$ в этом смысле. Под проекцией точки $W \in \mathcal{R}$ понимается точка $P(\mathcal{P}^{-1}(W)) \in \overline{\mathbb{C}}_w$. Предположим, что луч $\{w : \operatorname{Im} w = 0,\ 0 < \operatorname{Re} w < \infty\}$ не содержит критических значений полинома P (т.е. точек $P(\zeta)$ для которых $P'(\zeta) = 0$ при некотором ζ). Обозначим через $\mathcal{L}$ луч на поверхности $\mathcal{R}$, точнее, жорданову кривую, однолистно лежащую над указанным выше лучом сферы $\overline{\mathbb{C}}_w$ и соединяющую точки $\mathcal{P}(a)$ и $\mathcal{P}(\infty)$. Пусть $T = \{t_k\}_{k=0}^m$, $0 = t_0 < P(z_0) = t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = \infty$, – разбиение промежутка $0 \le t \le \infty$, содержащее все те значения t из $1 < t < \infty$, при которых окружность $\gamma(t) := \{w : |w| = t\}$ содержит по крайней мере одно критическое значение $P(\zeta)$ с $\zeta \in E$. Наконец, обозначим через $\mathcal{C}(t)$ замкнутую жорданову кривую на $\mathcal{R}$, пересекающую луч $\mathcal{L}$, лежащую над окружностью $\gamma(t)$ и ориентированную соответственно с положительной ориентацией на проекции $\gamma(t)$, $0 < t < \infty$, $t \notin T$; $c(t)$ – образ кривой $\mathcal{C}(t)$ при отображении $\mathcal{P}^{-1}$.

Лемма 1. *Приращение аргумента*

$$\triangle_{c(t)} \arg P(z)$$

есть неубывающая функция от t на множестве $\{t : 0 < t < \infty,\ t \notin T\}$.

Доказательство. Пусть $0 < t' < t'' < \infty$, $t', t'' \notin T$. Точки $\mathcal{P}(a)$ и $\mathcal{P}(\infty)$ находятся по разные стороны от кривой $\mathcal{C}(t')$ и от кривой $\mathcal{C}(t'')$ на поверхности $\mathcal{R}$. Следовательно, непересекающиеся жордановые кривые $c(t')$ и $c(t'')$ отделяют точку a от ∞ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$. Поэтому одна из них лежит во внутренности другой. Далее, двигаясь по лучу $\mathcal{L}$ от $\mathcal{P}(a)$ до $\mathcal{P}(\infty)$, сперва встречаем кривую $\mathcal{C}(t')$, а затем $\mathcal{C}(t'')$. Это означает, что кривая $c(t')$ лежит во внутренности кривой $c(t'')$. Следовательно, число $N_{t'}$ нулей полинома P, лежащих внутри $c(t')$, не превосходит числа нулей $N_{t''}$ внутри $c(t'')$ (с учетом их кратностей).

Осталось воспользоваться принципом аргумента:

$$2\pi N_t = \triangle_{c(t)} \arg P(z), \quad t = t', t''.$$

Лемма доказана.

Точки $\mathcal{P}(a)$ и $\mathcal{P}(\infty)$ расположены по разные стороны от кривой $\mathcal{C}(t)$ при любом t, $0 < t < \infty$, $t \notin T$. Отсюда следует, что для каждого $k = 0, \dots, m-1$ двусвязная область

$$G_k = \bigcup_{t_k < t < t_{k+1}} C(t)$$

также разделяет точки $\mathcal{P}(a)$ и $\mathcal{P}(\infty)$. В тоже время, кривая $\mathcal{P}(H)$, $H = \{z : z_0 + (a - z_0)\tau,\ 1 \le \tau \le \infty\}$, соединяет эти точки. Поэтому для каждого $k = 0, \dots, m-1$ на кривой $\mathcal{P}(H)$ найдется по крайней мере одна жорданова дуга $\mathcal{H}_k$, лежащая в области $\mathcal{G}_k$ и соединяющая ее граничные компоненты. Таким образом, в принятых выше обобзначениях справедлива следующая

Лемма 2. *Для любого $k = 0, \dots, m-1$ область $\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k$ односвязна.*

Далее нам понадобится понятие емкости конденсатора (см., например, [3]). Для достаточно малых положительных r и ρ на сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$ рассмотрим конденсаторы

$$C(r) = (H, \{z : |z - z_0| \le r\})$$

и

$$C(r, \rho) = (H \cup \{z : |z - a| \le \rho\} \cup \{z : |z| \ge 1/\rho\} \\ \cup \bigcup_{P'(\zeta)=0} \{z : |z - \zeta| \le \rho\}, \{z : |z - 1| \le r\}).$$

Лемма 3. *При фиксированном r, $0 < r < |a - z_0|$, для емкостей конденсаторов справедливо равенство*

$$\lim_{\rho \to 0} \operatorname{cap} C(r, \rho) = \operatorname{cap} C(r).$$

Доказательство. Воспользуемся непрерывностью емкости и тем фактом, что добавление к пластинам конденсатора конечного числа точек не меняет емкости этого конденсатора:

$$\lim_{\rho\to 0}\operatorname{cap} C(r,\rho) = \operatorname{cap}\left(H \cup \bigcup_{P'(\zeta)=0}\{\zeta\}, \{z : |z-z_0| \le r\}\right) = \operatorname{cap} C(r)$$

(см. предложения 1.4 и 1.6 из статьи [3]). Лемма доказана.

Введем следующие ниже обозначения и дадим некоторые комментарии к ним.

$\zeta = f_k(W)$ – однозначная ветвь функции $\zeta = \log(W/P(z_0))$, конформно и однолистно отображающая область $\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k$ в “полосу” $\Pi_k := \{\zeta : \xi_k < \operatorname{Re}\zeta < \xi_{k+1}\}$, $k = 0,\dots,m-1$. Здесь $\xi_k = \log(t_k/P(z_0))$, $k = 0,1,\dots,m$. Выбор такой ветви возможен ввиду леммы 2. При $k = 1$ и $k = m$ Π_k – полуплоскость.

$u(z)$ – потенциальная функция конденсатора $C(r,\rho)$, т.е. вещественнозначная непрерывная на $\overline{\mathbb{C}}_z$ функция, равная нулю на первой пластине конденсатора $C(r,\rho)$, единице на второй и гармоническая в дополнении этих пластин.

$$v_k(\zeta) = \begin{cases} u\left(\mathcal{P}^{-1}(f_k^{-1}(\zeta))\right), & \zeta \in f_k(\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k), \\ 0, & \zeta \in \Pi_k \setminus f_k(\mathcal{G}_k \setminus \mathcal{H}_k), \end{cases} \qquad k = 0,\dots,m-1.$$

Доопределим функцию v_k на $\partial\Pi_k$ по непрерывности. Полученную при этом функцию будем вновь обозначать v_k. Нетрудно видеть, что функция v_k удовлетворяет условию Липшица в полосе $\overline{\Pi}_k$, $k = 0,\dots,m-1$, а функция v_j к тому же равна единице на множестве $f_j(\mathcal{P}(\{z : |z-z_0| \le r\}) \cap \mathcal{G}_j)$, $j = 0,1$.

$v_k^*(\zeta)$ – результат симметризации Штейнера функции $v_k(\zeta)$, $\zeta \in \overline{\Pi}_k$, относительно вещественной оси (см. [4]). Каждая функция $v_k^*(\zeta)$ липшицева в $\overline{\Pi}_k$ и равна нулю на множестве $\{\zeta \in \overline{\Pi}_k : |\operatorname{Im}\zeta| \ge \pi n\}$, $k = 0,\dots,m-1$. Из леммы 1 вытекают неравенства

$$v_{k-1}^*(\xi_k + i\eta) \le v_k^*(\xi_k + i\eta), \quad -\infty < \eta < \infty, \quad k = 2,\dots,m-1. \tag{2}$$

$\zeta = F(z)$ – функция, конформно и однолистно отображающая единичный круг $|z| < 1$ на полосу $|\operatorname{Im}\zeta| < \pi n$ так, что $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$.

$\widetilde{r}$ – верхняя грань всех r, для которых множество $F(\{z : |z| < r\}) \cap \{\zeta : \mathrm{Re}\,(-1)^j\zeta < 0\}$ принадлежит результату симметризации Штейнера относительно вещественной оси множества $f_j(\mathcal{P}(\{z : |z - z_0| \le r\}) \cap \mathcal{G}_j)$ при $j = 0$ и $j = 1$.

$v(\zeta)$ – потенциальная функция конденсатора $\widetilde{C}(\widetilde{r}) = (\overline{\mathbb{C}}_\zeta \setminus \{\zeta : |\mathrm{Im}\,\zeta| < \pi n\}, F(\{z : |z| \le \widetilde{r}\}))$. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad \text{на прямой} \quad \mathrm{Re}\,\zeta = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial \xi} \le 0 \quad \text{на любой прямой} \quad \mathrm{Re}\,\zeta = \xi > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Линии уровня потенциальной функции v совпадают с линиями уровня функции F (т.е. с кривыми $|F^{-1}(\zeta)| = \mathrm{const}$).

Для достаточно гладкой функции λ на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{C}$ положим

$$I(\lambda, \Omega) = \int\limits_{\Omega} |\nabla \lambda|^2 d\sigma.$$

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{m-1} I(v_k^*, \Pi_k) \ge I(v, \mathbb{C}).$$

Доказательство. Положим $G_k = \{\zeta \in \Pi_k : |\mathrm{Im}\,\zeta| < \pi n\}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, и $l_k = \{\zeta : \mathrm{Re}\,\zeta = \xi_k,\ |\mathrm{Im}\,\zeta| < \pi n\}$, $k = 2, \dots, m-1$. Для каждого k, $0 \le k \le m-1$, имеем

$$\begin{aligned} I(v_k^*, \Pi_k) &= I(v_k^*, G_k) = I(v_k^* - v + v, G_k) = I(v_k^* - v, G_k) + I(v, G_k) \\ &\quad + 2 \iint\limits_{G_k} \left[\frac{\partial(v_k^* - v)}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial(v_k^* - v)}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] d\xi d\eta \\ &\ge I(v, G_k) - 2 \int\limits_{\partial G_k} (v_k^* - v) \frac{\partial v}{\partial n}\, ds, \end{aligned}$$

где $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к границе области G_k (угловые точки исключаются). Учитывая соотношения (2) и (3), получаем

$$\sum_{k=0}^{m-1} I(v_k^*, \Pi_k) \geq \sum_{k=0}^{m-1} I(v, G_k) - 2\sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{\partial G_k} (v_k^* - v)\frac{\partial v}{\partial n} ds$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} I(v, G_k) - 2\sum_{k=2}^{m-1} \int\limits_{l_k} \left[(v_{k-1}^* - v)\Big(-\frac{\partial v}{\partial \xi}\Big) + (v_k^* - v)\frac{\partial v}{\partial \xi}\right] ds$$
$$= \sum_{k=0}^{m-1} I(v, G_k) + 2\sum_{k=2}^{m-1} \int\limits_{l_k} (v_{k-1}^* - v_k^*)\frac{\partial v}{\partial \xi} ds \geq I(v, \mathbb{C}).$$

Лемма доказана.

§2. Доказательство теоремы

Достаточно доказать неравенство (1) в произвольной точке $z_0 \in E \setminus \{a\}$, для которой $P(z_0) > 0$, считая при этом, что луч $\{w : \operatorname{Im} w = 0,\ 0 < \operatorname{Re} w < \infty\}$ не содержит критических значений полинома P. Примем обозначения, введенные в §1. Следующая цепочка соотношений вытекает последовательно из конформной инвариантности интеграла Дирихле, теоремы Полиа и Сеге о симметризации функций (см. [4]) и леммы 4:

$$\operatorname{cap} C(r, \rho) = I(u, \mathbb{C}) \geq \sum_{k=0}^{m-1} I(v_k, \Pi_k)$$
$$\geq \sum_{k=0}^{m-1} I(v_k^*, \Pi_k) \geq I(v, \mathbb{C}) = \operatorname{cap} \widetilde{C}(\widetilde{r}).$$

Привлекая лемму 3, имеем в итоге

$$\operatorname{cap} C(r) \geq \operatorname{cap} \widetilde{C}(\widetilde{r}). \tag{4}$$

Для вычисления асимптотики емкости конденсаторов при $r \to 0$ воспользуемся известными формулами (см., например, [3, (1.6) и (1.8)]), в которых $r(B, a)$ означает внутренний радиус области B относительно точки $a \in B$. В результате получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{cap} C(r) &= -\frac{2\pi}{\log r} - \frac{1}{2\pi}(\log r(\mathbb{C}_z \setminus H, z_0))\left(\frac{2\pi}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \\ &= -\frac{2\pi}{\log r} - 2\pi(\log[4|a-z_0|])\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \\ &\qquad r \to 0.\end{aligned}$$

Далее, вторая пластина конденсатора $\widetilde{C}(\widetilde{r})$ представляет собой "почти круг" радиуса $(r|P'(z_0)|/P(z_0))(1+o(1))$ при $r \to 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}\operatorname{cap} \widetilde{C}(\widetilde{r}) &= -\frac{2\pi}{\log(r|P'(z_0)|/P(z_0))} - 2\pi\big(\log r\big(\{\zeta : |\operatorname{Im}\zeta| < \pi n\}, 0\big)\big) \\ &\times \left(\frac{1}{\log(r|P'(z_0)|/P(z_0))}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \\ &= -\frac{2\pi}{\log(r|P'(z_0)|/P(z_0))} - 2\pi(\log(4n)) \\ &\times \left(\frac{1}{\log(r|P'(z_0)|/P(z_0))}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) \\ &= -\frac{2\pi}{\log r}\left(1 - \frac{\log|P'(z_0)/P(z_0)|}{\log r} + o\left(\frac{1}{\log r}\right)\right) \\ &- 2\pi(\log(4n))\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right) = -\frac{2\pi}{\log r} \\ &- 2\pi(\log|4nP(z_0)/P'(z_0)|)\left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0.\end{aligned}$$

Подставляя найденные асимптотические выражения в неравенство (4), приходим к заключению

$$|a - z_0| \le \big|nP(z_0)/P'(z_0)\big|.$$

В наших предположениях полученное неравенство совпадает с неравенством (1) ($z = z_0$). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Литература

1. T. Sheil-Small, *Complex polynomials.* — Cambridge Univ. Press., Cambridge, 2002.
2. В. Н. Дубинин, *О покрытии вертикальных отрезков при конформном отображении.* — Мат. заметки **28**, No. 1 (1980), 25–32.
3. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49**, No. 1 (1994), 3–76.
4. W. K. Hayman, *Multivalent functions.* Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1994.

Dubinin V. N. On the components of the lemniscate containing no critical points of a polynomial other than its zeros.

Let P be a complex polynomial of degree n and let E be a connected component of the set $\{z : |P(z)| \leq 1\}$ containing no critical points of P other than its zeros. We prove the inequality $|(z-a)P'(z)/P(z)| \leq n$ for all $z \in E \setminus \{a\}$, where a is the zero of the polynomial P lying in E. Equality is attained for $P(z) = cz^n$ and any z, $c \neq 0$.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, ул. Радио 7, 690041
Владивосток, Россия

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 17 мая 2010 г.