Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

В. Н. Дубинин

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРСИИ ЛЕММЫ ШВАРЦА И СИММЕТРИЗАЦИЯ

Теория функций комплексного переменного богата проявлениями симметрии. Это обстоятельство обязано, по-видимому, симметрии основного понятия – "конформности". При наличии соответствующей симметрии в условиях задачи наблюдается аналогичная симметрия ее решения. Неудивительно, что ключевые утверждения теории функций так или иначе отражают принципы симметризации. Ранее мы отмечали связь классических лемм Гретша и принципов симметризации четырехугольников и колец [1, §2]. В настоящей заметке обсуждается связь принципов симметризации с классической леммой Шварца.

§1. Лемма Шварца и симметризация Шварца

В простейшей традиционной форме *лемма Шварца* формулируется следующим образом [2, гл. VIII].

Теорема 1. *Если функция f регулярна в круге $U = \{z : |z| < 1\}$, $f(0) = 0$ и $|f| < 1$ в U, то в круге U имеет место неравенство*

$$|f(z)| \leq |z|, \tag{1}$$

а кроме того, и неравенство

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2}$$

Равенства (в первом неравенстве при $z \neq 0$) имеют место только в случае, когда $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$.

Неравенство (1) можно записать в виде

$$M(r)/r \leq 1, \quad 0 < r < 1, \tag{3}$$

Ключевые слова: регулярные функции, лемма Шварца, симметризация Шварца.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00028) и ДВО РАН (грант No. 09-CO-II-01-003).

где $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Интерес к различного рода дополнениям, уточнениям и обобщениям леммы Шварца не угасает до сих пор (см., например, [3]). В частности, неравенства аналогичные (1) и (2), рассматриваются для функций вида

$$f(z) = c_n z^n + \cdots, \quad c_n \neq 0,$$

либо для p-листных функций. В других случаях условие $|f| < 1$ заменяется иными ограничениями на образ $f(U)$ в плоскости либо на римановой поверхности обратного отображения; изучаются аналогичные (3) неравенства, в которых величина $M(r)$ заменяется на длину границы $\partial f(U_r)$ либо площадь $f(U_r)$, $U_r := \{z : |z| < r\}$, $0 < r < 1$, и т.д. Отметим недавнюю статью [4], включающую помимо прочего геометрические версии леммы Шварца. В [4], в частности, отмечается, что для регулярной в круге U функции f, $f(0) = 0$, функция в левой части неравенства (3) строго возрастающая (исключая случай, когда f – линейная), а также выпуклая от $\log r$ на интервале $0 < r < 1$. Первое свойство вытекает из классического доказательства леммы Шварца, а второе есть следствие теоремы Адамара о трех кругах.

Симметризация Шварца относительно начала координат ставит в соответствие открытому множеству B открытй круг $\mathrm{Sh}\, B$ с центром в начале и площади[1], равной площади B ($\mathrm{area}\, B = \mathrm{area}\ \mathrm{Sh}\, B$). Замкнутому множеству E сопоставляется замкнутый круг $\mathrm{Sh}\, E$ с центром в точке $z = 0$ и такой же площади. Имеет место

Теорема 2 (см. [5, 6]). *Пусть $C = (E_0, E_1)$ – конденсатор на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$, пластина которого E_1 содержит бесконечно удаленную точку. Тогда для емкостей конденсаторов справедливо неравенство*

$$\mathrm{cap}\, C \geq \mathrm{cap}\left(\mathrm{Sh} E_0, \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Sh}(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_1)\right). \tag{4}$$

Если, дополнительно, конденсатор C имеет потенциальную функцию, то равенство в (4) достигается в том и только в том случае, когда конденсатор C совпадает с конденсатором $(\mathrm{Sh}\, E_0, \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Sh}\,(\overline{\mathbb{C}} \setminus E_1))$ с точностью до движения.

Привлекая лемму Гретша [6, лемма 1.3], стандартным путем получаем из теоремы 2 следующее утверждение.

[1] Здесь и ниже под площадью понимается мера Лебега.

Теорема 3. *Для любой области B комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и любой точки $z_0 \in B$ справедливо неравенство*

$$r(B, z_0) \leq r(\operatorname{Sh} B, 0), \tag{5}$$

где $r(B, z_0)$ означает внутренний радиус области B относительно точки z_0. Если, дополнительно, область B имеет классическую функцию Грина, то равенство в (5) достигается тогда и только тогда, когда B совпадает с $\operatorname{Sh} B$ с точностью до движения.

Доказательство единственности в теоремах 2 и 3 проще всего установить с помощью свойств поляризации [6].

По определению, симметризация Шварца не меняет площади области, а согласно классическому изопериметрическому неравенству, длина границы области B (при условии ее существования) не меньше длины $\partial \operatorname{Sh} B$ и равна последней только в случае когда B есть круг.

Предположим теперь, что функция f регулярна и однолистна в круге U, и рассмотрим конденсатор

$$C(r_1, r_2) = \left(\overline{U}_{r_1}, \overline{\mathbb{C}_z} \setminus U_{r_2}\right), \quad 0 < r_1 < r_2 < 1.$$

Из конформной инвариантности емкости и теоремы 2 следует

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\log \dfrac{r_2}{r_1}} &= \operatorname{cap} C(r_1, r_2) = \operatorname{cap}\, \left(f(\overline{U}_{r_1}), \overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(U_{r_2})\right) \\ &\geq \operatorname{cap}\, \left(\overline{U}_{r_1^*}, \overline{\mathbb{C}_w} \setminus U_{r_2^*}\right) = \frac{2\pi}{\log \dfrac{r_2^*}{r_1^*}}, \end{aligned}$$

где $\pi (r_k^*)^2 = \operatorname{area} f(U_{r_k^*})$, $k = 1, 2$.

Поэтому функция $(\operatorname{area} f(U_r))/r^2$ строго возрастает на интервале $0 < r < 1$, если функция f не является линейной.

В случае, когда f – произвольная регулярная функция в круге U, мы приходим к такому же выводу, привлекая вместо конформной инвариантности известный принцип мажорации:

$$\operatorname{cap} C(r_1, r_2) \geq \operatorname{cap}\, (f(\overline{U}_{r_1}), \overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(U_{r_2})). \tag{6}$$

Равенство в (6) имем место только для однолистных функций f (различные версии этого принципа можно найти, например, в работах [7–9]). Таким образом, симметризация Шварца естественным путем приводит нас к следующему обобщению леммы Шварца (ср. [4, с. 142–144]).

Теорема 4 [4, теорема 1.9]. *Если функция f регулярна в круге U, то функция* $(\operatorname{area} f(U_r))/r^2$ *строго возрастающая на интервале* $0 < r < 1$, *исключая случай, когда f – линейная.*

Заметим, что из теоремы 4 вытекает, в частности, неравенство (2). Для полноты изложения приведем здесь простую версию доказательства неравенства (6), отличную от доказательств в [7–9]. Пусть u – потенциальная функция конденсатора $C(r_1, r_2)$ (по поводу определений см. [6]). Тогда вспомогательная функция

$$v(w) = \begin{cases} \min\{u(z) : z \in U_{r_2},\ f(z) = w\}, & w \in f(U_{r_2}), \\ 1, & w \notin f(U_{r_2}) \end{cases}$$

допустима для конденсатора

$$f(C(r_1, r_2)) := \left(f(\overline{U}_{r_1}), \overline{\mathbb{C}_w} \setminus f(U_{r_2})\right).$$

Следовательно

$$\operatorname{cap} C(r_1, r_2) = \int\limits_{\mathbb{C}_z} |\nabla u|^2 d\sigma_z \geq \int\limits_{\mathbb{C}_w} |\nabla v|^2 d\sigma_w \geq \operatorname{cap} f(C(r_1, r_2)).$$

Что и требовалось доказать.

Применяя симметризацию Шварца в n-мерном евклидовом пространстве [5] и соответствующий принцип мажорации, Бетсакос [10] независимо получил обобщение теоремы 4 на случай квазирегулярных отображений. Разумеется, в этом случае вместо площади фигурирует объем (n-мерная мера Лебега). Ранее, Ю.Г.Решетняк использовал близкое утверждение как вспомогательный результат (см. [11, гл. 2, лемма 1.3). По-видимому, первые применения симметризации к рассматриваемым здесь задачам были даны независимо И. П. Митюком [12, 13], Макгрегором [14] и Маркусом [15]. Например, непосредственно из теоремы 3 и принципа мажорации И. П. Митюка [12] следует

Теорема 5 (ср. [4, следствие 1.10]). *Пусть функция f регулярна в области $G \subset \overline{\mathbb{C}_z}$ и удовлетворяет следующим условиям: $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, $f^{(n)}(z_0) = n!c_n \neq 0$, где z_0 – конечная точка области G. Пусть $z_1, z_2, \ldots$ – корни уравнения $f(z) - w_0 = 0$, отличные от z_0, причем каждый корень повторяется столько* *раз какова его кратность, и пусть $g_G(z, z_0)$ – функция Грина области G с полюсом в точке z_0. Тогда*

$$\operatorname{area} f(G) \geq \pi r^{2n}(G, z_0)|c_n|^2 \exp\left\{2\sum_{k\geq 1} g_G(z_k, z_0)\right\}. \tag{7}$$

Полагая в неравенстве (7) $G = U$, $z_0 = 0$, приходим к неравенству Макгрегора [14, теорема 1]:

$$\operatorname{area} f(U_r) \geq \pi r^{2n}|c_n|^2, \quad 0 < r < 1$$

которое обобщает неравенство (2).

Поскольку заполнение области $f(G)$ до односвязной разве лишь увеличивает внутренний радиус, то принцип мажорации [12] дает также нижнюю оценку длины внешней границы области $f(G)$. В ограничениях Макгрегора [14] она имеет вид

$$\operatorname{length} \partial_e f(U_r) \geq 2\pi r^n |c_n|, \quad 0 < r < 1. \tag{8}$$

Хорошо известно, что принцип симметризации (5) можно усилить, заменив круг $\operatorname{Sh} B$ на круг с центром в начале координат и площади, равной площади звезды области B относительно точки z_0. Поэтому в неравенстве (7) площадь $\operatorname{area} f(G)$ можно заменить на площадь звезды $f(G)$ относительно точки w_0. Аналогичное замечание относится и к неравенству (8).

§2. Логарифмическая метрика и геометрия на римановой поверхности

Для регулярной в круге U функции f, удовлетворяющей условию $f(0) = 0$, и для $0 < r < 1$ введем обозначение

$$\widetilde{\operatorname{area}} f(U_r) = \pi (r^*)^2,$$

где

$$r^* = \rho \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{E(\rho,\theta,f(U_r))}\frac{1}{t}\,dt\,d\theta\right\},$$

$$\{w : |w| \leq \rho\} \subset f(U_r),$$

$$E(\rho, \theta, f(U_r)) = \{t : w = te^{i\theta} \in f(U_r),\ \rho < t < \infty\}.$$

Величина r^* не зависит от выбора $\rho > 0$. Повторяя приведенное выше доказательство теоремы 4 с заменой симметризации Шварца на принцип усредняющей симметризации Маркуса [15] и привлекая соответствующую теорему единственности И. П. Митюка [8], приходим к следующему результату.

Теорема 6. *Если функция f регулярна в круге U и $f(0) = 0$, то функция $(\widetilde{\text{area}} f(U_r))/r^2$ строго возрастает на интервале $0 < r < 1$, исключая случай, когда f – линейная.*

В частности, если на функцию f наложить условие $\widetilde{\text{area}} f(U) < \pi$, то имеем геометрическую версию леммы Шварца:

$$\widetilde{\text{area}} f(U_r) \leq \pi r^2, \quad 0 < r < 1.$$

Для функции f из предыдущей теоремы обозначим через $\Lambda_f(r, \theta)$ расстояние от начала координат до ближайшей граничной точки множества $f(U_r)$, лежащей на луче $\arg w = \theta$, $0 < r \leq 1$. Очевидно

$$\log r^* \geq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log \Lambda_f(r, \theta) d\theta.$$

Еще в 1937 году Г. М. Голузин [16] при дополнительном условии $f'(0) = 1$ установил неравенство

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log \Lambda_f(r, \theta) d\theta \geq \log r, \quad 0 < r < 1.$$

Впоследствии А. Ф. Бермант [17] получил близкие обобщения леммы Шварца, рассматривая вместо образа круга U при отображении f риманову поверхность $\mathfrak{R}_f$, на которую круг U взаимнооднозначно отображается посредством функции $w = f(z)$. Точнее, $\mathfrak{R}_f$ – это риманова поверхность обратного отображения f^{-1}. Далее отображения на $\mathfrak{R}_f$ и в $\mathbb{C}_w$ обозначаем одной и той же буквой f. Рассмотрим “среднее модуля” мероморфной в круге U функции f; именно величину

$$\frac{1}{2\pi} \int \log |f(z)| d \arg f(z), \tag{9}$$

где интеграл распространяется в положительном направлении по всему контуру, в который отображается функцией f окружность $|z| = r$, $0 < r < 1$, или по некоторым иным ниже определяемым линиям. Функция f отображает круг U_r на подобласть поверхности $\mathfrak{R}_f$. Обозначим через λ_r границу этой подобласти, а через λ_r^* – границу ее звезды относительно точки $f(0)$. Под звездой области B, $f(0) \subset B \subset \mathfrak{R}_f$, понимается объединение всех тех конечных точек поверхности B, которые можно соединить с $f(0)$ прямолинейным отрезком в B, внутренние точки которого не являются точками ветвления $\mathfrak{R}_f$. Пусть $w = te^{i\theta}$. Интеграл (9) будет распространятся по λ_r и по λ_r^*, $0 < r < 1$. Следуя работе [17], в первом случае обозначим его через $L_r(f)$:

$$L_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda_r} \log t d\theta,$$

во втором – через

$$L_r^*(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda_r^*} \log t d\theta.$$

Мы не рассматриваем интеграл $L_r(f)$, если λ_r проходит через бесконечно удаленную точку, и полагаем по определению $L_r^*(f) = \infty$, если λ_r^* содержит бесконечность.

Теорема 7 [17, лемма 1]**.** *Если функция f регулярна в круге U, причем $f(0) = 0$, $f(z)/z \neq 0$ и $f(z) \not\equiv cz$, $c-\mathrm{const}$, то ее “логарифмическое искажение в круге U_r”*

$$L_r\left(\frac{f}{r}\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\lambda_r} \log \frac{t}{r} d\theta$$

является строго возрастающей функцией от r на интервале $0 < r < 1$.

Отсюда приходим к следующему аналогу леммы Шварца: если $L(f) := \lim\limits_{r\to 1} L_r(f) \leq 0$, то выполняются неравенства

$$L_r(f) \leq L_r(z) = \log r, \quad 0 < r < 1,$$

$$|f'(0)| \leq 1.$$

Равенства имеют место лишь для $f(z) \equiv cz$, $|c| = 1$.

Теорема 8 [17, лемма 4]**.** *Если функция f регулярна в круге U, причем $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $f(z) \not\equiv cz$, $c - \mathrm{const}$, то ее "звездное логарифмическое искажение в круге U_r"*

$$L_r^*\left(\frac{f}{r}\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda_r^*} \log\frac{t}{r}d\theta$$

является строго возрастающей функцией от r на интервале $0 < r < 1$.

Обе теоремы А. Ф. Берманта вытекают из некоторой модификации симметризации Маркуса. Вместе с тем, сами эти теоремы можно интерпретировать как принципы симметризации для колец, где экстремальными являются круговые кольца. Оригинальные доказательства А. Ф. Берманта основаны на сравнении интегралов в w- и z-плоскостях и являются, по-видимому, наиболее простыми и естественными в данной проблеме. Отметим, что работа [17] является одной из первых, где ставится вопрос о новых геометрических версиях леммы Шварца. Однако в современных работах по лемме Шварца она не упоминается. Методом А. Ф. Берманта можно получить также следующий результат.

Теорема 9 [18, теорема 1]**.** *Пусть функция f мероморфна в круге U и в некоторой окрестности точки $z = 0$ справедливо разложение*

$$f(z) = c_n z^n + c_{n+1} z^{n+1} + \cdots ,$$

$n \geq 1$, $c_n \neq 0$. *Тогда*

$$|c_n| \leq \exp\left\{\frac{1}{n}\lim_{r\to 1} L_r^*(f)\right\}. \tag{10}$$

Равенство в (10) *достигается в том и только в том случае, когда* $f(z) \equiv cz^n$, $c \neq 0$.

В работе А. Ю. Солынина [18] приводятся, в частности, важные следствия теоремы 9 (см. [18, теорема 2 и теорема 3]). Доказательство неравенства (10) в [18] выполнено с помощью техники приведенных модулей односвязных областей и треугольников [19], рассматриваемой как часть метода экстремальной метрики. Ниже даём альтернативное доказательство теоремы 9, следуя классическому подходу [20, п. 2.8] (ср. [18, с. 3136–3140]).

Доказательство теоремы 9. Обозначим через s_r прообраз звезды области $f(U_r) \subset \mathfrak{R}_f$ относительно точки $f(0)$, $0 < r \leq 1$. В односвязной области s_1 выберем однозначную ветвь $F(z)$ функции $(f(z))^{1/n}$. Для каждого τ, $0 < \tau < 1$, рассмотрим в круге U метрику $\rho_\tau(z)|dz|$, где

$$\rho_\tau(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\Big|\dfrac{F'(z)}{F(z)}\Big|, & z \in s_\tau, \\ \quad 0, & z \in U \setminus s_\tau. \end{cases}$$

Если для некоторых θ и r, $0 < r < 1$, луч на поверхности $\mathfrak{R}_f$, лежащий над лучом $\arg w = \theta$, принадлежит области $f(U_r)$, то правая часть неравенства (10) равна бесконечности. Исключая эту ситуацию, для любого τ, $0 < \tau < 1$, и любой окружности $\gamma_r = \{z : |z| = r\}$, $0 < r < \tau$, имеем

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho_\tau |dz| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{F(\gamma_r \cap s_\tau)} \frac{|d\omega|}{|\omega|} \geq 1.$$

Если теперь при отображении F какая-либо окружность γ_r, $0 < r < 1$, не переходит в окружность вида $|\omega| = \rho(r)$, то на некотором интервале $r_1 < r < r_2$ $(0 < r_1 < r_2 < 1)$ выполняется

$$\int\limits_{\gamma_r} \rho_\tau |dz| \geq 1 + k$$

для всех τ, $r_2 < \tau < 1$, где k – положительная постоянная, не зависящая от r и τ. Поэтому при $\delta < r_1$ из леммы 2.2 монографии [20] следует, что

$$\iint\limits_{\delta<|z|<\tau} \rho_\tau^2 dxdy \geq \frac{1}{2\pi} \log\frac{\tau}{\delta} + \frac{k}{\pi}\log\frac{r_2}{r_1}. \tag{11}$$

С другой стороны, образ круга $|z| < \delta$ при отображении F содержит круг $|\omega| \leq \delta_\varepsilon := \sqrt[n]{|c_n|}\delta(1 - \varepsilon(\delta))$, где $\lim\limits_{\delta\to 0} \varepsilon(\delta) = 0$. Значит, для любого τ, $r_2 < \tau < 1$, имеем

$$\iint\limits_{\delta<|z|<\tau} \rho_\tau^2 dxdy \leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint\limits_{\{\omega:\omega\in F(s_\tau), |\omega|>\delta_\varepsilon\}} \frac{1}{|\omega|} d|\omega| d\arg\omega$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^2 \int\limits_{\lambda_\tau^*} \log t\, d\theta - \frac{1}{2\pi}\log\delta_\varepsilon = \frac{1}{2\pi n^2} L_\tau^*(f) - \frac{1}{2\pi}\log\delta_\varepsilon.$$

Сопоставляя это неравенство с (11) при $\tau \to 1$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\delta}+\frac{k}{2\pi}\log\frac{r_2}{r_1}\le\frac{1}{2\pi n^2}L^*(f)-\frac{1}{2\pi}\log\delta_\varepsilon,$$

где $L^*(f)=\lim\limits_{\tau\to 1}L^*_\tau(f)$. Отсюда

$$0<k\log\frac{r_2}{r_1}\le\frac{1}{n^2}L^*(f)-\frac{1}{n}\log|c_n|.$$

Итак, имеем требуемое неравенство

$$\log|c_n|\le\frac{1}{n}L^*(f),$$

причем в случае равенства в (10) для любого r, $0<r<1$, образом окружности γ_r при отображении F является окружность вида $|\omega|=\rho(r)$. Учитывая равенство $|F'(0)|=\sqrt[n]{|c_n|}$, заключаем, что

$$|F(z)|=\sqrt[n]{|c_n|}|z| \quad \text{в круге} \quad U$$

и

$$F(z)\equiv e^{i\alpha}\sqrt{[n]}c_nz,\quad f(z)\equiv cz^n,\quad c\ne 0.$$

Теорема доказана.

Для регулярной в круге U функции f, удовлетворяющей условию $f(0)=0$, вещественного числа θ и натурального $n\ge 1$ введем обозначение

$$\mathbb{L}(f,\theta,n,r)=\prod_{k=1}^{n}\Lambda_f^{1/n}(r,\theta+2\pi k/n),\quad 0<r\le 1.$$

Непосредственно из теоремы 2 работы [21] вытекает следующее уточнение теоремы 8 в случае однолистных функций.

Теорема 10. *Пусть функция f регулярна и однолистна в круге U и $f(0)=0$. Тогда для любого вещественного θ и натурального $n\ge 1$ функция*

$$\mathbb{L}(f,\theta,n,r)(1+r^n)^{2/n}/r$$

возрастает на промежутке $0 < r \leq 1$.

В качестве следствия получаем своеобразный аналог леммы Шварца: если функция f удовлетворяет условиям теоремы 10 и если $\mathbb{L}(f, \theta, n, 1) \leq 1$, то для любого r, $0 < r \leq 1$,

$$\mathbb{L}(f, \theta, n, r) \leq \frac{r\sqrt[n]{4}}{(1 + r^n)^{2/n}}.$$

Равенство достигается для функции $f_n(z) = \frac{z\sqrt[n]{4}}{(1+(e^{-i\theta}z)^n)^{2/n}}$, которая конформно и однолистно отображает круг U на плоскость с разрезами вдоль лучей $\arg w^n = \theta n$, $|w| \geq 1$.

Упомянутая выше теорема 2 работы [21] доказана методом симметризации. Прослеживая доказательство этой теоремы, можно получить строгую монотонность соответствующей функции из теоремы 10, если исходная функция f отлична от f_n.

§3. О функциях, регулярных в круговом кольце

Рассмотрим некоторые аналоги теорем из предыдущих параграфов для функций, регулярных в кольце $K(R) = \{z : 1 < |z| < R\}$. В этом случае принципы симметризации применимы столь же успешно. Однако принципы мажорации известны лишь в "ослабленной" форме. Пусть $S(R)$ – класс регулярных и однолистных в кольце $K(R)$ функций, не обращающихся в нем в нуль и таких, что при $1 < r_1 < r_2 < R$ образ окружности $|z| = r_1$ лежит внутри образа окружности $|z| = r_2$. Для каждой функции f класса $S(R)$ обозначим через $G_f(r)$ объединение образа $f(K(r))$ со связной компонентой дополнения $f(K(r))$, содержащей начало координат, $1 < r \leq R$.

Теорема 11. *Если функция f принадлежит классу $S(R)$, то функции*

$$(\operatorname{area} G_f(r))/r^2 \quad \textit{и} \quad (\widetilde{\operatorname{area}}\, G_f(r))/r^2$$

строго возрастают на интервале $1 < r < R$, исключая случай, когда f – линейная.

Доказательство теоремы 11 аналогично доказательству, приведенному перед теоремой 4 с применением симметризации Шварца либо усредняющей симметризации Маркуса.

Для функции f класса $S(R)$, вещественного числа θ и натурального $n \geq 1$ положим по определению

$$\mathbb{M}(f, \theta, n, r) = \prod_{k=1}^{n} X_f^{1/n}(r, \theta + 2\pi k/n),$$

где $X_f(r, \varphi)$ $(1 < r \leq R)$ – расстояние от начала координат до ближайшей граничной точки множества $G_f(r)$, лежащей на луче $\arg w = \varphi$. Пусть $T(z; n, R)$ означает n-кратно симметричную функцию Тейхмюллера, конформно и однолистно отображающую кольцо $K(R)$ на плоскость с разрезами по отрезкам $\arg w^n = 0$, $0 \leq |w| \leq 1$, и по лучам $\arg w^n = 0$, $1 < T(R; n, R) \leq |w| \leq \infty$. Небольшая модификация доказательства теоремы 2 работы [21] приводит к следующему результату.

Теорема 12. *Если функция $f \in S(R)$, то для любых θ и $n \geq 1$ функция*

$$\mathbb{M}(f, \theta, n, r)/T(r; n, R)$$

возрастает на промежутке $1 < r \leq R$.

Предельный переход в теореме 12 при $n \to \infty$ дает аналог теоремы 8, но только для однолистных функций. В случае произвольной регулярной функции f в кольце $K(R)$ интересное неравенство для площади звезды римановой поверхности обратного отображения установлено Г. К. Антонюком [22].

В заключение приведем аналог теоремы А. Ю. Солынина [18, теорема 1] для функций, заданных в круговом кольце. Пусть функция f мероморфна в кольце $K(R)$, отображает окружность $|z| = 1$ на окружность $|w| = 1$ и удовлетворяет условиям:

$$|f(z)| \geq 1 \quad \text{при} \quad z \in K(R) \quad \text{и} \quad \int\limits_{|z|=1} d \arg f(z) = 2\pi n, \quad n \geq 1.$$

Для любого вещественного числа θ на римановой поверхности обратного отображения f существует n интервалов, лежащих над лучом $\arg w = \theta$, соединяющих точки на кривой $f(\{z : |z| = 1\})$ с другими точками на границе поверхности либо точками ветвления, и не проходящих через точки ветвления этой поверхности. К длине каждого такого интервала прибавим единицу и обозначим через $\Psi_f(\theta)$ произведение полученных сумм.

Теорема 13. *В принятых выше обозначениях справедливо неравенство*

$$\log R \leq \frac{1}{2\pi n^2} \int\limits_0^{2\pi} \log \Psi_f(\theta) d\theta.$$

Равенство достигается в том и только в том случае, когда $f(z) = cz^n$, $|c| = 1$.

Доказательство этой теоремы практически повторяет доказательство теоремы 9 и даже проще.

Литература

1. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов, обобщения лемм Гретша и симметризация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 73–100.
2. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* М., 1966.
3. H. P. Boas, *Julius and Julia: Mastering the art of the Schwarz lemma.* — ArXiv: 1001.0559, 2010.
4. R. B. Burckel, D. E. Marshall, D. Minda, P. Poggi-Corradini, T. J. Ransford, *Area, capacity, and diameter versions of Schwarz's lemma.* — Conform. Geom. Dyn. **12** (2008), 133–152.
5. Г. Полиа, Г. Сеге, *Изопериметрические неравенства в математической физике.* М., 1962.
6. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49**, No. 1 (1994), 3–76.
7. T. Kubo, *Hyperbolic transfinite diameter and some theorems on analytic functions in an annulus.* — J. Math. Soc. Japan **10**, No. 4 (1958), 348–364.
8. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* — Изд-во Кубанского ун-та, Краснодар, 1980.
9. H. Kloke, *Some inequalities for the capacity of plane condensers.* — Results in Math. **9**, Nos. 1–2 (1986), 82–94.
10. D. Betsakos, *Geometric versions of Schwarz's lemma for quasiregular mappings.* — Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
11. Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* Новосибирск, 1982.
12. И. П. Митюк, *Принцип симметризации для многосвязных областей.* — Докл. АН СССР **157**, No. 2 (1964), 268–270.
13. И. П. Митюк, *Принцип симметризации для многосвязных областей и некоторые его применения.* — Укр. мат. журн. **17**, No. 4 (1965), 46–54.
14. T. H. MacGregor, *Length and area estimates for analytic functions.* — Michigan Math. J. **11**, No. 4 (1964), 317–320.
15. M. Marcus, *Transformations of domains in the plane and applications in the theory of functions.* — Pacific J. Math. **14**, No. 2 (1964), 613–626.

16. Г. М. Голузин, *Некоторые теоремы покрытия для функций, регулярных в круге.* — Мат. сб. **2(44)**, No. 3 (1937), 617–619.
17. А. Ф. Бермант, *О некоторых обобщениях принципа Э.Ленделефа и их применениях.* — Мат. сб. **20(62)**, No. 1(1947), 55–112.
18. A. Yu. Solynin, *A Schwarz lemma for meromorphic functions and estimates for the hyperbolic metric.* — Proc. Amer. Math. Soc. **136**, No. 9 (2008), 3133–3143.
19. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11**, No. 1 (1999), 3–86.
20. Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения.* М., 1962.
21. В. Н. Дубинин, *К теоремам искажения в теории конформных отображений.* — Мат. заметки **44**, No. 3 (1988), 341–351.
22. Г. К. Антонюк, *О покрытии площадей для функций, регулярных в кольце.* — Вестник ЛГУ, сер. матем., механ. и астр. **1**, No. 1 (1958), 45–65.

Dubinin V. N. Geometric versions of Schwarz lemma and symmetrization.

Connection between the geometric versions of Schwarz lemma and the known symmetrization principles for some classes of analytic functions in a disk and a circular ring are discussed. In particular, simple proofs based on classical approaches are presented for some resent results of other authors.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, ул. Радио 7, 690041
Владивосток, Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 25 августа 2010 г.