Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

О. Л. Виноградов, В. В. Жук

СКОРОСТЬ УБЫВАНИЯ КОНСТАНТ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОРЯДКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

§1. Введение

Пусть $E_n(f)_p$ – наилучшее приближение функции f множеством H_{n-1} тригонометрических многочленов степени не выше $n-1$ в пространстве 2π-периодических функций L_p, $A_\sigma(f)_p$ – наилучшее приближение функции f множеством $\mathbf{E}_\sigma$ целых функций степени не больше $\sigma > 0$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$, $\omega_m(f,h)_p$ – модуль непрерывности m-го порядка функции f с шагом h в пространстве L_p или $L_p(\mathbb{R})$.

В работе рассматривается вопрос о точных константах в обобщенной теореме Джексона (см., например, [1, глава V])

$$E_n(f)_p \leqslant K\omega_m(f,h)_p, \quad A_\sigma(f)_p \leqslant K\omega_m(f,h)_p.$$

Положим

$$\varkappa_{n,m}(\alpha)_p = \sup_{f\in L_p} \frac{E_n(f)_p}{\omega_m(f,\frac{\alpha\pi}{n})_p}, \quad \varkappa_m(\alpha)_p = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varkappa_{n,m}(\alpha)_p.$$

Аналогичная $\varkappa_{n,m}(\alpha)_p$ величина для пространства $L_p(\mathbb{R})$

$$\zeta_{\sigma,m}(\alpha)_p = \sup_{f\in L_p(\mathbb{R})} \frac{A_\sigma(f)_p}{\omega_m(f,\frac{\alpha\pi}{\sigma})_p},$$

как легко доказывается сжатием аргумента, не зависит от σ, и поэтому будет обозначаться $\zeta_m(\alpha)_p$. Действительно,

$$\omega_m\Big(f(\sigma\cdot),\frac{\alpha\pi}{\sigma}\Big)_p = \sigma^{-1/p}\omega_m(f,\alpha\pi)_p,$$

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, точные константы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Минобрнауки РФ No. 2010-1.1-111-128-033.

а из равносильности соотношений $g \in \mathbf{E}_1$ и $g(\sigma\cdot) \in \mathbf{E}_\sigma$ следует равенство

$$A_\sigma(f(\sigma\cdot))_p = \sigma^{-1/p} A_1(f)_p.$$

Поэтому

$$\frac{A_1(f)_p}{\omega_m(f, \alpha\pi)_p} = \frac{A_\sigma(f(\sigma\cdot))_p}{\omega_m(f(\sigma\cdot), \frac{\alpha\pi}{\sigma})_p}.$$

Следовательно, верхние грани отношений при произвольном $\sigma > 0$ и при $\sigma = 1$ совпадают, то есть $\zeta_{\sigma,m}(\alpha)_p = \zeta_{1,m}(\alpha)_p$.

При $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\gamma_m = \frac{1}{C_m^{\lfloor m/2 \rfloor}},$$

где $\lfloor\cdot\rfloor$ – целая часть, а C_m^k – биномиальные коэффициенты. По формуле Стирлинга $\gamma_m \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{m}}{2^m}$.

Приведем известные результаты, касающиеся величин $\varkappa_{n,m}(\alpha)_p$ и $\zeta_m(\alpha)_p$ для модулей непрерывности порядка выше первого. При этом мы не будем упоминать утверждения, специфические для пространств L_2 и $L_2(\mathbb{R})$.

С. Б. Стечкин [2] при $m \geqslant 2$ доказал, что $\varkappa_m(\alpha)_\infty < +\infty$. При $m = 2$ этот факт был ранее указан в книге [3, п. 89].

Для второго модуля непрерывности В. В. Жук [4; см. 5, с. 326] с помощью второй функции Стеклова доказал, что

$$\varkappa_2(\alpha)_p \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{8\alpha^2}.$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ В. В. Шалаев [6; см. 5, с. 321] доказал точность этого неравенства в равномерной метрике в том смысле, что $\varkappa_2(\frac{1}{2})_\infty = 1$. О. Л. Виноградов [7] доказал соотношение

$$\sup_{f \in C} \frac{\|f - R_n(f)\|_\infty}{\omega_2(f, \frac{\pi}{n})_\infty} = 0,581\ldots,$$

где R_n – оператор Рогозинского, причем оценка сверху верна в L_p при всех $p \in [1, \infty]$. Отсюда следует, что $\varkappa_2(1)_p \leqslant 0,581\ldots$

С помощью линейных комбинаций функций Стеклова с различным шагом Жук [8, с. 57] получил неравенства

$$\varkappa_{2r}(\alpha)_p \leqslant \left(1 + \frac{2\mathcal{K}_{2r} r^{2r}}{\alpha^{2r}\pi^{2r}} \sum_{j=1}^{r} \frac{C_{2r}^{r+j}}{j^{2r}}\right)\gamma_{2r},$$

где $\mathcal{K}_m$ – константы Фавара:

$$\mathcal{K}_m = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(m+1)}}{(2k+1)^{m+1}}.$$

Ранее аналогичные линейные комбинации односторонних функций Стеклова использовал Ю. А. Брудный [9] при доказательстве теоремы типа Уитни.

В статье [10] (см. также книгу [11, с. 203–209]) Жук с помощью формул численного дифференцирования установил неравенство

$$\varkappa_{2r}(\alpha)_p \leqslant \frac{1}{(2r+1)!}\sum_{l=0}^{r} C_{2r+1}^{2l+1}|T_r^{(2l+1)}(0)|\frac{\mathcal{K}_{2l}}{\alpha^{2l}\pi^{2l}}, \tag{3}$$

где $T_r(t) = t\prod_{k=1}^{r}(t^2-k^2)$. Там же получены похожие оценки приближений через обынтегрированные модули непрерывности. Тем же методом Жук оценивал функционалы более общего вида, не обязательно заданные на классах периодических функций. Из этих общих оценок вытекает, что аналогичные (3) неравенства остаются справедливыми для приближений целыми функциями конечной степени в пространствах $L_p(\mathbb{R})$. В [10] содержатся еще некоторые уточнения неравенств для малых α. Оценка (3) позволяет заключить, что $\varkappa_m(\alpha)_\infty \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при достаточно больших α.

Все перечисленные оценки наилучших приближений сверху были установлены посредством линейных методов приближения.

С. Фукар, Ю. В. Крякин и А. Ю. Шадрин [12] доказали неравенство

$$\varkappa_m(2)_p < 5\gamma_m, \tag{4}$$

причем оценка достигается при помощи сумм Валле Пуссена. Также было получено соотношение

$$\varkappa_m(1)_p = O\big(\sqrt{m}\ln(m+1)\cdot\gamma_m\big). \tag{5}$$

Неравенству (4) предшествовало неравенство для нормы функции $f \perp H_{n-1}$:

$$\|f\|_p \leqslant \Big(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\Big)^{-1}\gamma_{2r}\,\omega_{2r}\Big(f,\frac{\alpha\pi}{n}\Big), \quad \alpha > \mu_{2r}, \tag{6}$$

представляющее и самостоятельный интерес. Здесь и далее

$$\mu_{2r} = \left(\frac{8}{\pi^2} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant r \\ j-\text{ нечетно}}} \frac{C_{2r}^{r+j}}{C_{2r}^{r}} \frac{1}{j^2} \right)^{1/2}.$$

В частности, при $\alpha = 2$ из неравенства (6) вытекает, что

$$\|f\|_p \leqslant \sqrt{2}\, \gamma_{2r}\, \omega_{2r}\left(f, \frac{2\pi}{n}\right),$$

а при $\alpha = 1$ – что

$$\|f\|_p \leqslant \left(\cos \frac{\pi \mu_{2r}}{2}\right)^{-1} \gamma_{2r}\, \omega_{2r}\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Далее в [12] показано, что $1 - \mu_{2r}^2 \asymp \frac{1}{\sqrt{r}}$ и, таким образом, $\left(\cos \frac{\pi \mu_{2r}}{2}\right)^{-1} \asymp \sqrt{r}$. (Запись $a_r \asymp b_r$ означает, что существуют такие положительные числа k и K, для которых $k a_r \leqslant b_r \leqslant K a_r$ при всех r.)

Что касается оценок снизу, Г. И. Натансон (см. [8, с. 111]) получил неравенство

$$\varkappa_{2r}(r)_\infty \geqslant \gamma_{2r}.$$

В [12] с помощью функции-ступеньки доказано, что при всех $n > \alpha m$

$$\varkappa_{n,m}(\alpha)_\infty \geqslant c_m \gamma_m,$$

где

$$c_m = \begin{cases} \frac{m}{m+1}, & m \text{ нечетно}, \\ 1, & m \text{ четно}. \end{cases} \tag{7}$$

Этот же пример или еще более простой пример функции sign показывают, что и

$$\zeta_m(\alpha)_\infty \geqslant c_m \gamma_m.$$

Некоторые порядковые оценки для величин $\varkappa_{n,m}(\alpha)_p$, среди которых оценка снизу $\varkappa_{n,m}\left(\frac{2n}{m}\right)_\infty \geqslant k\gamma_m$, получены В. И. Ивановым [13].

Работа [12] содержит также некоторое обсуждение результатов, повторять которое мы не будем и отошлем читателя к указанной статье.

В настоящей работе устанавливаются неравенства Джексона с константами, как в (6), для приближений целыми функциями конечной степени в различных пространствах и строятся линейные методы приближения, реализующие эти константы. При этом частично используются идеи из [12]. Доказывается, что неравенство (6) верно не только для нормы функции, ортогональной H_{n-1}, но и для наилучшего приближения произвольной функции. Сопоставление оценок сверху и снизу приводит к двойным неравенствам

$$c_m\gamma_m \leqslant \varkappa_m(2)_\infty \leqslant \sqrt{2}\gamma_m, \quad c_m\gamma_m \leqslant \zeta_m(2)_\infty \leqslant \sqrt{2}\gamma_m.$$

Некоторые результаты этой работы были объявлены в [14].

§2. Обозначения и вспомогательные результаты

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; $UCB(\mathbb{R})$ – пространство ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, а C – пространство 2π-периодических непрерывных функций, с равномерными нормами $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$; если $1 \leqslant p < \infty$, то $L_p(\mathbb{R})$ – пространство измеримых, суммируемых на оси с p-й степенью, а L_p – пространство измеримых, 2π-периодических, суммируемых на периоде с p-й степенью функций f, с нормами $\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\right)^{1/p}$, где $E = \mathbb{R}$ или $[-\pi, \pi]$ соответственно; $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_∞ – пространства измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|;$$

$L(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$; если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ ($1 \leqslant p < \infty$) или пространства $UCB(\mathbb{R})$ ($p = \infty$), P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$. Если выполняются условия:

1) пространство инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$,

2) существует такая постоянная B, что $P(f) \leqslant B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$,

то будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ являются: $(UCB(\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_\infty)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, пространства периодических функций $\bigl(C, \|\cdot\|_p\bigr)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций [15], показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами (равномерной, Степанова, Вейля, Безиковича).

Центральные разности и модули непрерывности порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ функции f определяются равенствами

$$\delta_t^r(f, x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k f\left(x + \frac{rt}{2} - kt\right),$$

$$\omega_r(f, h)_P = \sup_{0 \leqslant t \leqslant h} P\bigl(\delta_t^r(f)\bigr);$$

$$A_\sigma(f)_P = \inf_{\substack{g \in \mathbf{E}_\sigma \\ f-g \in \mathfrak{M}}} P(f-g)$$

– наилучшее приближение функции f множеством $\mathbf{E}_\sigma$ целых функций степени не больше σ по полунорме P $(\inf \varnothing = +\infty)$; аналогично определяется величина $A_{\sigma-0}(f)_P$ – наилучшее приближение множеством $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ целых функций степени меньше σ. Индекс p у наилучшего приближения, модуля непрерывности и т.п. означает, что $P(f) = \|f\|_p$. Отметим, что если $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, то множество $\mathfrak{M}$ с одной из полунорм: $\omega_r(\cdot, h)_P$, $A_\sigma(\cdot)_P$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$ тоже является пространством класса $\mathcal{B}$.

Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$c(f, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt,$$

а свертка двух функций f и g – равенством

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t)\, dt;$$

при такой нормировке $c(f * g) = c(f)c(g)$. Если действие оператора U на функцию f состоит в умножении преобразования Фурье f на функцию φ, то φ называют функцией множителей оператора U. Для оператора свертки с ядром G: $U(f) = f * G$, функция множителей равна $c(G)$. Если $U\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, то полунорма оператора U определяется формулой

$$N_P(U) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \frac{P(U(f))}{P(f)}.$$

Следующая оценка свертки для пространств $L_p(\mathbb{R})$ общеизвестна, а для пространств класса $\mathcal{B}$ доказана в [16].

Лемма 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $G \in L(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathfrak{M}$. *Тогда* $\varphi * G \in \mathfrak{M}$ *и* $P(\varphi * G) \leqslant \frac{1}{2\pi}\|G\|_1 P(\varphi)$.

Пусть еще I – тождественный оператор, D – оператор дифференцирования, $X_{\sigma,m}$ – оператор Ахиезера–Крейна–Фавара (см. [17, п. 87, 101–103] и [5, с. 147]), т.е. оператор свертки, функция множителей которого равна

$$\xi_{\sigma,m}(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{y}{2\sigma}\right)^m \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{l(m+1)}}{(l + \frac{y}{2\sigma})^m}, & |y| \leqslant \sigma, \\ 0, & |y| > \sigma. \end{cases}$$

Известно [17, п. 101–103] и [16], что если $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, то для всех $f \in \mathfrak{M}$ таких, что $f^{(m)} \in \mathfrak{M}$, выполняется неравенство

$$P(f - X_{\sigma,m}(f)) \leqslant \frac{\mathcal{K}_m}{\sigma^m} P(f^{(m)}).$$

Далее, $\varphi_\sigma(t) = \operatorname{sign}\cos\sigma t$,

$$\Phi_h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\Bigl(1 - \dfrac{|t|}{h}\Bigr), & |t| \leqslant h, \\ 0, & |t| > h \end{cases}$$

– ядро Стеклова второго порядка,

$$W_{h,2r}(f) = \frac{(-1)^r}{C_{2r}^r} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_t^{2r}(f)\Phi_h(t)\,dt, \quad U_{h,2r} = I - W_{h,2r}.$$

Ясно, что $U_{h,2r}$ – оператор свертки, и его функция множителей равна

$$\lambda_{h,2r}(y) = 1 - \frac{2^{2r}}{C_{2r}^r} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^{2r}\frac{yt}{2}\,\Phi_h(t)\,dt.$$

Для оценки $\lambda_{h,2r}$ мы используем следующую известную лемму.

Лемма 2. (1) *Если $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, f возрастает, g убывает, то*

$$\int_a^b fg \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f \int_a^b g.$$

(2) *Если $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f = f(a+b-\cdot)$, f возрастает на $[a, \frac{a+b}{2}]$, g выпукла вниз, то*

$$\int_a^b fg \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f \int_a^b g.$$

(3) *Если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f имеет период $T > 0$, $f = f(T-\cdot)$, f возрастает на $\left[0, \frac{T}{2}\right]$, $h > 0$, g убывает и выпукла вниз на $[0,h]$, $g(h) = 0$, то*

$$\int_0^h fg \leqslant \frac{1}{T} \int_0^T f \int_0^h g.$$

Доказательство. 1. Утверждение 1 – это классическое неравенство Чебышева (см., например, [5, с. 18]).

2. Поскольку g выпукла вниз, функция $g + g(a+b-\cdot)$ убывает на $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. По неравенству Чебышева

$$\int_a^b fg = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)\big(g(t) + g(a+b-t)\big)\,dt$$
$$\leqslant \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f \int_a^{\frac{a+b}{2}} \big(g(t) + g(a+b-t)\big)\,dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \int_a^b g.$$

3. Продолжим g нулем на $(h, +\infty)$; продолженная функция g будет выпукла вниз на $[0, +\infty)$. Применяя утверждение 2 и учитывая периодичность f, для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ получаем:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} fg \leqslant \frac{1}{T} \int_0^T f \int_{kT}^{(k+1)T} g.$$

Остается взять такое $n \in \mathbb{N}$, для которого $(n+1)T \geqslant h$, и сложить полученные неравенства по k от 0 до n.

Лемма 3. $\lambda_{h,2r}(y) \in [0,1)$ *при всех* $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Ввиду четности функции $\lambda_{h,2r}$ достаточно рассмотреть $y > 0$. Неравенство $\lambda_{h,2r}(y) < 1$ очевидно. Докажем, что $\lambda_{h,2r}(y) \geqslant 0$. Положим $f(t) = \frac{2^{2r}}{C_{2r}^r} \sin^{2r} \frac{yt}{2}$, $g = 2\Phi_h$. Тогда f имеет период $T = \frac{2\pi}{y}$, f и g удовлетворяют условиям пункта 3 леммы 2, причем $\frac{1}{T}\int\limits_0^T f = \int\limits_0^h g = 1$. Поэтому $\int\limits_0^h fg \leqslant 1$, то есть $\lambda_{h,2r}(y) \geqslant 0$.

§3. Построение операторов и оценки констант сверху

В следующей технической лемме общеизвестное утверждение о сходимости абсолютно (нормально) сходящегося ряда в банаховом пространстве переносится на ряды операторов в пространстве с полунормой.

Лемма 4. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ *– банахово пространство,* $\mathfrak{M}$ *– замкнутое подпространство* X, P *– полунорма на* $\mathfrak{M}$, *удовлетворяющая условию: существует такая постоянная* B, *что* $P(f) \leqslant B\|f\|$ *для всех* $f \in \mathfrak{M}$; $\{U_k\}_{k=0}^\infty$ *– последовательность линейных операторов в* X, $U_k(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$, $\sum\limits_{k=0}^\infty \|U_k\|_{X\to X} < +\infty$, $\sum\limits_{k=0}^\infty N_P(U_k) < +\infty$, $R = \sum\limits_{k=0}^\infty U_k$. *Тогда:*

(1) $R(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{M}$;

(2) $N_P(R) \leqslant \sum\limits_{k=0}^\infty N_P(U_k)$;

(3) *ряд* $\sum\limits_{k=0}^\infty U_k$ *сходится к* R *по полунорме* N_P.

Доказательство. Как известно, R – линейный непрерывный оператор в X, и ряд сходится к R по операторной норме.

1. Обозначим $S_N = \sum\limits_{k=0}^N U_k$. Возьмем $f \in \mathfrak{M}$; тогда $S_N(f) \in \mathfrak{M}$ и $S_N(f) \to R(f)$. Поскольку $\mathfrak{M}$ замкнуто, $R(f) \in \mathfrak{M}$.

2. Пусть $f \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$P\big(S_N(f) - R(f)\big) \leqslant B\big\|S_N(f) - R(f)\big\| \to 0;$$

Поэтому $P\big(S_N(f)\big) \to P(R(f))$. Далее,

$$P(S_N f) \leqslant \sum_{k=0}^N P\big(U_k(f)\big) \leqslant \bigg(\sum_{k=0}^N N_P(U_k)\bigg) P(f).$$

Устремляя N к ∞, находим:

$$P(R(f)) \leqslant \Bigl(\sum_{k=0}^{\infty} N_P(U_k)\Bigr) P(f),$$

откуда следует (2).

3. Применяя утверждение (2) к последовательности $\{U_k\}_{k=N+1}^{\infty}$, получаем:

$$P\bigl((S_N - R)(f)\bigr) = P\Bigl(\sum_{k=N+1}^{\infty} U_k(f)\Bigr) \leqslant \Bigl(\sum_{k=N+1}^{\infty} N_P(U_k)\Bigr) P(f).$$

Следовательно, $N_P(S_N - R) \leqslant \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} N_P(U_k) \to 0$, что и означает 3).

Если ряд операторов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k$ сходится к оператору R по полунорме N_P и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} N_P(U_k) < +\infty$, то будем говорить, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k$ абсолютно сходится к R по полунорме N_P.

Лемма 5. *Пусть $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $\alpha > \mu_{2r}$, $h = \frac{\alpha\pi}{\sigma}$. Тогда ряд*

$$I + \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(U_{h,2r}^k - X_{\sigma,2k} U_{h,2r}^k\bigr)$$

абсолютно сходится по полунорме N_P к некоторому оператору $R_{\sigma,h,2r}$, и для любой $f \in \mathfrak{M}$

$$P(R_{\sigma,h,2r}(f)) \leqslant \Bigl(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\Bigr)^{-1} P(f). \tag{8}$$

Доказательство. По лемме 1 члены ряда действуют из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$. По свойствам операторов Ахиезера–Крейна–Фавара для всех $f \in \mathfrak{M}$ и $k \in \mathbb{N}$

$$P\bigl(U_{h,2r}^k(f) - X_{\sigma,2k}\bigl(U_{h,2r}^k(f)\bigr)\bigr) \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\sigma^{2k}} P\bigl(D^{2k} U_{h,2r}^k(f)\bigr)$$

$$\leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\sigma^{2k}} N_P\bigl(D^{2k} U_{h,2r}^k\bigr) P(f) \leqslant \frac{\mathcal{K}_{2k}}{\sigma^{2k}} N_P^k\bigl(D^2 U_{h,2r}\bigr) P(f).$$

Воспользуемся неравенством $N_P\big(D^2U_{h,2r}\big) \leqslant \frac{\pi^2\mu_{2r}^2}{h^2}$, которое доказано в [12] для пространств L_p, но доказательство без изменений переносится на пространства класса $\mathcal{B}$. Получим

$$N_P\big(U_{h,2r}^k - X_{\sigma,2k}U_{h,2r}^k\big) \leqslant \mathcal{K}_{2k}\left(\frac{\pi\mu_{2r}}{\sigma h}\right)^{2k}.$$

Известно разложение

$$\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{K}_{2k}\tau^{2k} = \left(\cos\frac{\pi\tau}{2}\right)^{-1}, \quad \tau = \frac{\pi\mu_{2r}}{\alpha} < 1.$$

Следовательно, ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} N_P\big(U_{h,2r}^k - X_{\sigma,2k}U_{h,2r}^k\big)$$

сходится, причем это верно для любого пространства класса $\mathcal{B}$ и, в частности, для объемлющего пространства X ($X = L_p(\mathbb{R})$ или $UCB(\mathbb{R})$). Остается воспользоваться леммой 4.

Положим

$$Q_{\sigma,h,2r} = I - R_{\sigma,h,2r}W_{h,2r} = U_{h,2r} - \sum_{k=1}^{\infty}\big(U_{h,2r}^k - X_{\sigma,2k}U_{h,2r}^k\big)(I - U_{h,2r}).$$

Установим несколько свойств операторов $Q_{\sigma,h,2r}$.

Q1. Если $f \perp \mathbf{E}_\sigma$, то $Q_{\sigma,h,2r}(f) = 0$.

Действительно, в этом случае $X_{\sigma,2k}U_{h,2r}^k(f) = 0$ при всех k. Следовательно, $U_{h,2r}^k(f) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по лемме 5, поэтому

$$Q_{\sigma,h,2r}(f) = U_{h,2r}(f) - \sum_{k=1}^{\infty}\big(U_{h,2r}^k(f) - U_{h,2r}^{k+1}(f)\big) = 0.$$

Q2. Оператор $Q_{\sigma,h,2r}$ действует в $\mathbf{E}_\sigma$.

Пусть $\rho > \sigma$, а $f_{\rho,\sigma}$ – такая функция, что $f_{\rho,\sigma} \in \mathbf{E}_\rho$ и $f - f_{\rho,\sigma} \perp \mathbf{E}_\sigma$ [17, п. 106]. Тогда $Q_{\sigma,h,2r}(f) = Q_{\sigma,h,2r}(f_{\rho,\sigma})$. По лемме 1 каждое слагаемое в сумме принадлежит $\mathbf{E}_\rho$, а тогда и сумма ряда принадлежит $\mathbf{E}_\rho$. Так как $\rho > \sigma$ произвольно, $Q_{\sigma,h,2r}(f) \in \mathbf{E}_\sigma$.

Q3. Докажем, что $Q_{\sigma,h,2r}$ – оператор свертки, и найдем его функцию множителей.

В самом деле, каждый член ряда для $Q_{\sigma,h,2r}$ – оператор свертки с некоторым ядром G_k. Ряд сходится, а значит, и сходится в себе по норме операторов из $UCB(\mathbb{R})$ в $UCB(\mathbb{R})$. Поскольку норма оператора свертки равна L_1-норме его ядра, ряд из ядер сходится в себе в $L(\mathbb{R})$. В силу полноты пространства $L(\mathbb{R})$ ряд из ядер сходится в $L(\mathbb{R})$ к некоторому ядру $G_{\sigma,h,2r}$, а тогда оператор $Q_{\sigma,h,2r}$ и будет оператором свертки с ядром $G_{\sigma,h,2r}$.

Кроме того, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c(G_k)$ сходится равномерно к некоторой функции $g_{\sigma,h,2r} = c(G_{\sigma,h,2r})$. По определению оператора $Q_{\sigma,h,2r}$

$$g_{\sigma,h,2r} = \lambda - \sum_{k=1}^{\infty} \bigl(\lambda^k - \lambda^k \xi_{\sigma,2k}\bigr)(1-\lambda),$$

где $\lambda = \lambda_{h,2r}$ и $\xi_{\sigma,2k}$ – функции множителей операторов $U_{h,2r}$ и $X_{\sigma,2k}$.

Вычислим сумму ряда. Ясно, что $g_{\sigma,h,2r}(0) = 1$. Поскольку $Q_{\sigma,h,2r}$ действует в $\mathbf{E}_\sigma$, $g_{\sigma,h,2r}(y) = 0$ при всех y, таких что $|y| > \sigma$. Пусть $0 < |y| \leqslant \sigma$, $z(y) = \frac{y}{2\sigma}$; тогда $|z(y)| \leqslant \frac{1}{2}$. Подставляя выражение для $\xi_{\sigma,2k}$ и учитывая, что $\lambda(y) \in [0,1)$ по лемме 3, находим:

$$\begin{aligned}
g_{\sigma,h,2r} &= (1-\lambda) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k z^{2k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+z)^{2k}} \\
&= (1-\lambda) \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda t^2}{(l+z)^2} \right)^k \\
&= (1-\lambda) \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l \frac{\lambda z^2/(l+z)^2}{1 - \frac{\lambda z^2}{(l+z)^2}} \\
&= (1-\lambda)\lambda z^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(l+z)^2 - \lambda z^2} \\
&= (1-\lambda)\lambda z^2 \frac{2\pi \cos \pi z \, \sin\bigl(\pi z \sqrt{\lambda}\bigr)}{z\sqrt{\lambda}\bigl(\cos\bigl(2\pi z\sqrt{\lambda}\bigr) - \cos 2\pi z\bigr)} \\
&= \frac{\pi z(1-\sqrt{\lambda})}{\sin\bigl(\pi z(1-\sqrt{\lambda})\bigr)} \, \frac{\pi z(1+\sqrt{\lambda})}{\sin\bigl(\pi z(1+\sqrt{\lambda})\bigr)} \, \frac{\sin\bigl(\pi z\sqrt{\lambda}\bigr)}{\pi z\sqrt{\lambda}} \, \lambda \cos \pi z.
\end{aligned} \tag{9}$$

Итак, $Q_{\sigma,h,2r}(f) = f * G_{\sigma,h,2r}$, где

$$G_{\sigma,h,2r}(t) = \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} g_{\sigma,h,2r}(y) e^{ity}\, dy,$$

а $g_{\sigma,h,2r}$ выражается формулой (9).

Q4. Если функция f имеет период $\frac{2\pi}{\rho}$ $(\rho > 0)$, то $Q_{\sigma,h,2r}(f, x)$ – тригонометрическая сумма вида $\sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\rho x}$, где $N < \frac{\sigma}{\rho}$. В частности, если $\rho \geqslant \sigma$, то $Q_{\sigma,h,2r}(f)$ – постоянная:

$$Q_{\sigma,h,2r}(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{t}{\rho}\right) dt.$$

Если же функция f является почти-периодической, то $Q_{\sigma,h,2r}(f)$ – тоже почти-периодическая функция, показатели которой принадлежат функции f.

Это следует из представления оператора $Q_{\sigma,h,2r}$ в виде свертки и леммы 1.

Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $\alpha > \mu_{2r}$, $h = \frac{\alpha\pi}{\sigma}$, $f \in \mathfrak{M}$. *Тогда*

$$P(f - Q_{\sigma,h,2r}(f)) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} P(W_{h,2r}(f)), \tag{10}$$

$$P(f - Q_{\sigma,h,2r}(f)) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} \gamma_{2r}\, \omega_{2r}(f, h)_P. \tag{11}$$

Доказательство. По определению оператора $Q_{\sigma,h,2r}$

$$I - Q_{\sigma,h,2r} = R_{\sigma,h,2r} W_{h,2r}.$$

Неравенство (10) следует из леммы 5, а неравенство (11) – из (10) и очевидного неравенства

$$P(W_{h,2r}(f)) \leqslant \gamma_{2r}\, \omega_{2r}(f, h)_P. \tag{12}$$

Замечание 1. В частности, поскольку $\mu_{2r} < 1$, неравенство теоремы 1 выполняется при всех $\alpha \geqslant 1$, то есть $h \geqslant \frac{\pi}{\sigma}$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1

$$A_\sigma(f)_P \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} A_\sigma(W_{h,2r}(f))_P, \tag{13}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} A_{\sigma-0}(W_{h,2r}(f))_P, \tag{14}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} P(W_{h,2r}(f)), \tag{15}$$

$$A_\sigma(f)_P \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} P(W_{h,2r}(f)). \tag{16}$$

Доказательство. Неравенство (13) следует из (12), если в качестве полунормы взять $A_\sigma(\cdot)_P$ и учесть, что

$$A_\sigma(f - Q_{\sigma,h,2r}(f))_P = A_\sigma(f)_P.$$

Для доказательства (14) надо записать (13) для $A_{\sigma-\varepsilon}$ при малых $\varepsilon > 0$ и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0+$. Неравенство (15) очевидно следует из (14), а (16) – из (15).

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1

$$A_\sigma(f) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} \gamma_{2r}\,\omega_{2r}(f,h)_{A_\sigma(\cdot)_P}, \tag{17}$$

$$A_{\sigma-0}(f) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} \gamma_{2r}\,\omega_{2r}(f,h)_{A_{\sigma-0}(\cdot)_P}, \tag{18}$$

$$A_{\sigma-0}(f) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} \gamma_{2r}\,\omega_{2r}(f,h)_P. \tag{19}$$

$$A_\sigma(f) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} \gamma_{2r}\,\omega_{2r}(f,h)_P. \tag{20}$$

Неравенства следствия 2 вытекают из соответствующих неравенств следствия 1 и неравенства (12).

Следствие 3. *Если* $f \perp \mathbf{E}_\sigma$ *в условиях теоремы* 1, *то*

$$P(f) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} P(W_{h,2r}(f)), \tag{21}$$

$$P(f) \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1} \gamma_{2r}\,\omega_{2r}(f,h)_P.$$

Для доказательства следствия надо учесть, что если $f \perp \mathbf{E}_\sigma$, то $Q_{\sigma,h,2r}(f) = 0$.

Замечание 2. Неравенства теоремы 1 и ее следствий стандартным образом (например, с помощью приближения функции f ее интегралом Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с полунормами $\|\cdot\|_p$, $\omega_s(\cdot, h)_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$.

Следствие 3 для пространств L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ периодических функций было получено в [12].

Замечание 3. Из доказанного следует, что $R_{\sigma,h,2r} - I$ есть оператор свертки с ядром $D_{\sigma,h,2r}$, порожденным функцией множителей

$$d_{\sigma,h,2r}(y) = \frac{\lambda_{h,2r} - g_{\sigma,h,2r}}{1 - \lambda_{h,2r}},$$

то есть

$$D_{\sigma,h,2r}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d_{\sigma,h,2r}(y) e^{ity}\, dy.$$

Следовательно,

$$N_P(R_{\sigma,h,2r}) \leqslant 1 + \frac{1}{2\pi}\|D_{\sigma,h,2r}\|_1, \tag{22}$$

Поэтому в правых частях неравенств теоремы 1 и ее следствий множитель $\left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1}$ можно заменить на $1 + \frac{1}{2\pi}\|D_{\sigma,h,2r}\|_1$. Поскольку в $UCB(\mathbb{R})$ (а также в $L(\mathbb{R})$) в (22) имеет место равенство, из леммы 5 следует, что

$$1 + \frac{1}{2\pi}\|D_{\sigma,h,2r}\|_1 \leqslant \left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2\alpha}\right)^{-1}.$$

Следствие 4. *При всех* $m \in \mathbb{N}$

$$c_m\gamma_m \leqslant \varkappa_m(2)_\infty \leqslant \sqrt{2}\,\gamma_m, \quad c_m\gamma_m \leqslant \zeta_m(2)_\infty \leqslant \sqrt{2}\,\gamma_m,$$

где c_m *определено формулой* (7).

Для получения оценок сверху при четном $m = 2r$ надо положить $\alpha = 2$ в неравенствах (19) и (20). Оценка для нечетного $m = 2r - 1$ следует [12] из оценки для четного m, так как $\gamma_{2r} = 2\gamma_{2r-1}$, а $\omega_{2r}(f,h)_P \leqslant 2\omega_{2r-1}(f,h)_P$. Оценка снизу известна и объяснялась во введении.

Следствие 5. *Если* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, *то*

$$\varkappa_m(1)_P \leqslant A\sqrt{m}\,\gamma_m, \quad \zeta_m(1)_P \leqslant A\sqrt{m}\,\gamma_m,$$

где A – *абсолютная постоянная.*

Для доказательства следствия 5 надо подставить $\alpha = 1$ в неравенства (19) и (20) и использовать соотношение $\left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2}\right)^{-1} \asymp \sqrt{r}$, полученное в [12].

Тем самым доказано, что множитель $\ln(m+1)$ в оценке (5) можно опустить. Вопрос, можно ли опустить в этой оценке множитель $\sqrt{m}$, остается открытым.

§4. Оценки констант снизу

Величину

$$\omega_{2r}^*(f,h)_P = P\bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_t^{2r}(f)\Phi_h(t)\,dt\bigg).$$

можно рассматривать как модифицированный модуль непрерывности функции f. Ясно, что ω^* мажорируется обычным модулем непрерывности ω:

$$\omega_{2r}^*(f,h)_P \leqslant \omega_{2r}(f,h)_P.$$

Покажем, что неравенства, содержащие ω^*, точны в случае равномерной и интегральной нормы.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha = 1$, *то есть* $h = \frac{\pi}{\sigma}$.

(1) *В пространствах* $(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ *и* $(L(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ *константу в неравенствах* (8), (10), (13)–(16) *нельзя заменить меньшей, даже если ограничиться функциями, ортогональными* $\mathbf{E}_\sigma$.

(2) *В пространствах* $\frac{2\pi}{\sigma}$*-периодических функций с равномерной и интегральной нормами константу в неравенствах* (8), (10), (13)–(15) *нельзя заменить меньшей, даже если ограничиться функциями с нулевым средним.*

Доказательство. 1. Сначала докажем, что в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ для функции $\varphi_\sigma(t) = \operatorname{sign}\cos\sigma t$ неравенство (8) обращается в равенство.

Действительно,

$$D^2U_{h,2r}(\varphi_\sigma) = -\frac{\pi^2\mu_{2r}^2}{h^2}\varphi_\sigma$$

и, следовательно,

$$D^{2k}U_{h,2r}^{2k}(\varphi_\sigma) = (-1)^k \left(\frac{\pi\mu_{2r}}{h}\right)^{2k} \varphi_\sigma.$$

Кроме того, не только неравенства Ахиезера–Крейна–Фавара обращаются в равенства на функциях φ_σ, но и все слагаемые в сумме имеют один и тот же знак:

$$\begin{aligned}\big\|U_{h,2r}^k(\varphi_\sigma) - X_{\sigma,2k}\big(U_{h,2r}^k(\varphi_\sigma)\big)\big\|_\infty \\ = (-1)^k\big(U_{h,2r}^k(\varphi_\sigma,0) - X_{\sigma,2k}\big(U_{h,2r}^k(\varphi_\sigma),0\big)\big) = \mathcal{K}_{2k}\mu_{2r}^{2k}\end{aligned}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$, а $\varphi_\sigma(0) = 1$. Поэтому и неравенство треугольника для суммы, и неравенства для слагаемых обращаются в равенства.

2. Теперь ясно, что неравенство (10) обращается в равенство, если $W_{h,2r}(f) = \varphi_\sigma$. В качестве такой функции можно взять

$$\psi_\sigma = R_{\sigma,h,2r}(\varphi_\sigma)$$

(зависимость ψ_σ от h и r отражать в обозначениях не будем). Функция ψ_σ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\sigma}$, и ее ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos{(2k+1)\sigma t}$. Поэтому $Q_{\sigma,h,2r}(\psi_\sigma) = 0$ и, следовательно, $W_{h,2r}(\psi_\sigma) = \varphi_\sigma$. Кроме того [17, п. 96], $A_{\sigma-0}(\psi_\sigma)_\infty = \|\psi_\sigma\|_\infty$. Отсюда вытекает, что неравенство (15), а значит, и предшествующие неравенства (13) и (14) также обращаются в равенства на функции ψ_σ.

3. Докажем точность неравенства (16) в пространстве $L_\infty(\mathbb{R})$ на множестве функций, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$. Возьмем $\rho > \sigma$ и положим

$$\psi_{\sigma,\rho} = R_{\sigma,h,2r}(\varphi_\rho).$$

Тогда, как и ранее,

$$\begin{aligned} &Q_{\sigma,h,2r}(\psi_{\sigma,\rho}) = 0, && W_{h,2r}(\psi_{\sigma,\rho}) = \varphi_\rho, \\ &\|W_{h,2r}(\psi_{\sigma,\rho})\|_\infty = \|\varphi_\rho\|_\infty = \|\varphi_\sigma\|_\infty, && A_\sigma(\psi_{\sigma,\rho})_\infty = \|\psi_{\sigma,\rho}\|_\infty.\end{aligned}$$

По теореме Лебега о мажорированной сходимости $\psi_{\sigma,\rho} \underset{\rho\to\sigma+}{\longrightarrow} \psi_\sigma$ почти всюду, поэтому

$$\varliminf_{\rho\to\sigma+} \|\psi_{\sigma,\rho}\|_\infty \geqslant \|\psi_\sigma\|_\infty,$$

что и доказывает точность неравенства (16).

4. Неулучшаемость неравенств на множествах непрерывных функций стандартно выводится из неулучшаемости на множествах функций из $L_\infty(\mathbb{R})$ (например, с помощью приближения функций φ_ρ их интегралами Фейера).

5. Докажем точность неравенств в случае интегральной нормы. Оператор $W_{h,2r}$ обратим на множествах функций, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$ (обратный оператор есть $R_{\sigma,h,2r}$). Поэтому при всех $p \in [1,\infty]$ имеем:

$$\sup_{\substack{f \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|W_{h,2r}(f)\|_p \leqslant 1}} A_\sigma(f)_p = \sup_{\substack{f \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|W_{h,2r}(f)\|_p \leqslant 1}} A_\sigma(f - Q_{\sigma,h,2r}(f))_p$$

$$= \sup_{\substack{f \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|W_{h,2r}(f)\|_p \leqslant 1}} A_\sigma(R_{\sigma,h,2r}(W_{h,2r}(f)))_p = \sup_{\substack{f \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|f\|_p \leqslant 1}} A_\sigma(R_{\sigma,h,2r}(f))_p.$$

Подставим выражение $R_{\sigma,h,2r}(f) = f + f * D_{\sigma,h,2r}$ и воспользуемся соотношениями двойственности (см. [18, §1.4]):

$$\sup_{\substack{f \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} A_\sigma(R_{\sigma,h,2r}(f))_1 = \sup_{\substack{f \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \sup_{\substack{g \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|g\|_\infty \leqslant 1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f + f * D_{\sigma,h,2r})\, g$$

$$= \sup_{\substack{g \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|g\|_\infty \leqslant 1}} \sup_{\substack{f \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g + g * D_{\sigma,h,2r})\, f = \sup_{\substack{g \perp \mathbf{E}_\sigma \\ \|g\|_\infty \leqslant 1}} A_\sigma(R_{\sigma,h,2r}(g))_\infty.$$

Из доказанной точности неравенств в $L_\infty(\mathbb{R})$ следует, что последняя верхняя грань равна $\left(\cos \frac{\pi \mu_{2r}}{2}\right)^{-1}$. Значит, неравенство (16) (а, следовательно, и предшествующие неравенства (8), (10), (13)–(15)) точно в $L(\mathbb{R})$.

Аналогично доказывается точность неравенства (15) (а, следовательно, и предшествующих неравенств (8), (10), (13), (14)) на множестве периодических функций:

$$\sup_{\substack{f \perp 1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} A_{\sigma-0}(R_{\sigma,h,2r}(f))_1 = \sup_{\substack{f \perp 1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \sup_{\substack{g \perp 1 \\ \|g\|_\infty \leqslant 1}} \int\limits_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} (f + f * D_{\sigma,h,2r})\, g$$

$$= \sup_{\substack{g \perp 1 \\ \|g\|_\infty \leqslant 1}} \sup_{\substack{f \perp 1 \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \int\limits_{-\frac{\pi}{\sigma}}^{\frac{\pi}{\sigma}} (g + g * D_{\sigma,h,2r})\, f = \sup_{\substack{g \perp 1 \\ \|g\|_\infty \leqslant 1}} A_{\sigma-0}(R_{\sigma,h,2r}(g))_\infty.$$

Мы снова воспользовались тем, что для $\frac{2\pi}{\sigma}$-периодических функций $A_{\sigma-0}$ совпадает с наилучшим приближением константами. Теорема 2 доказана.

Замечание 4. В работе [12] показано, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ неравенство

$$\left\|U^k_{\frac{\pi}{n},2r}(f)\right\|_\infty \leqslant \mathcal{K}_{2k}\mu_{2r}^{2k}\,\|f\|_\infty$$

(установленное для периодических функций, ортогональных H_{n-1}) обращается в равенство на функции φ_n. Что касается неравенства (21), с помощью функции $\cos(n\cdot)$ получена более слабая, хотя и точная по порядку, оценка снизу:

$$\sup_{f\perp H_{n-1}} \frac{\|f\|_\infty}{\|W_{\frac{\pi}{n},2r}(f)\|_\infty} \geqslant \frac{1}{1-\mu_{2r}^2},$$

и отмечено, что

$$\left(\cos\frac{\pi\mu_{2r}}{2}\right)^{-1} \leqslant \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{1-\mu_{2r}^2}.$$

В работе [19] содержатся обобщения неравенств этой работы, касающихся наилучших приближений.

Литература

1. А. Ф. Тиман, *Теория приближения фукнций действительного переменного.* М., 1960
2. С. Б. Стечкин, *О порядке наилучших приближений непрерывных функций.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **15** (1951), 219–242.
3. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М.–Л., 1947.
4. В. В. Жук, *О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности.* — Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астр., No. 1 (1974), 21–26.
5. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
6. В. В. Шалаев, *К вопросу о приближении непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.* — В сб.: Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их прил. Вып. 8. Днепропетровск (1977), 39–43.
7. О. Л. Виноградов, *Точное неравенство для отклонения сумм Рогозинского и второго модуля непрерывности в пространстве непрерывных периодических функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **247** (1997), 26–45.
8. В. В. Жук, *Структурные свойства функций и точность аппроксимации.* Л., 1984.
9. Ю. А. Брудный, *Об одной теореме локальных наилучших приближений.* — В сб.: Функц. анализ и теория функций. Сб. 2. Казань (1964), 43–49.

10. В. В. Жук, *Полунормы и модули непрерывности высоких порядков.* — Труды С.-Петербургск.мат. об-ва **2** (1993), 116–177.
11. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование.* СПб., 1995.
12. S. Foucart, Y. Kryakin, A. Shadrin, *On the exact constant in the Jackson–Stechkin inequality for the uniform metric.* — Constr. Approx. **29** (2009), 157–179.
13. В. И. Иванов, *О приближении функций в пространствах L_p.* — Мат. заметки **56**, No. 2 (1994), 15–40.
14. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *О константах в обобщенной теореме Джексона для линейных методов приближения.* — Теория приближений. Межд. конф. СПб., 6–8 мая, 2010 г. Тез. докл., СПб., (2010), 10–12.
15. Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции.* М., 1953.
16. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени.* — Алгебра и анализ **17**, No. 5 (2005), 56–111.
17. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
18. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* М., 1987.
19. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 5–32.

Vinogradov O. L., Zhuk V. V. The rate of decrease of constants in Jackson type inequalities in dependence of the order of modulus of continuity.

Jackson type inequalities for moduli of continuity of arbitrary order are established with the use of linear approximation methods. The constants are smaller than known previously. The results are valid in different spaces of periodic and non periodic functions.

С.-Петербургский государственный университет Университетский пр. 28, Петродворец, 198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: olvin@math.spbu.ru, zhuk@math.spbu.ru

Поступило 6 сентября 2010 г.