Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 383, 2010 г.

О. Л. Виноградов, В. В. Жук

ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ С ИЗВЕСТНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ МОМЕНТОВ ЧЕРЕЗ ОТКЛОНЕНИЯ СРЕДНИХ ТИПА СТЕКЛОВА

§1. Введение

1.1. Обзор результатов работы. Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой $\|\cdot\|$, $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f множеством H_{n-1} тригонометрических многочленов порядка не выше $n-1$, C_r^l – биномиальные коэффициенты,

$$\delta_t^r(f,x) = \sum_{l=0}^{r}(-1)^l C_r^l f\left(x+\frac{rt}{2}-lt\right)$$

– центральная разность функции f порядка r с шагом h с центром в точке x,

$$S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt, \quad S_{h,r}(f) = S_{h,1}\bigl(S_{h,r-1}(f)\bigr)$$

– средние Стеклова функции f. Положим

$$S_{h,r,m} = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}C_{2m}^{m-j}S_{jh,r},$$
$$V_{h,r,m} = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{C_{2m}^{m-j}}{j^r}\delta_{jh}^r;$$

Ключевые слова: функция Стеклова, модуль непрерывности, наилучшее приближение, моменты функционалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Минобрнауки РФ No. 2010-1.1-111-128-033.

$\nu_{r,m} = \sup\limits_{h>0} \|V_{h,r,m}\|$. Очевидно, что $\nu_{r,m} \leqslant \frac{2^{r+1}}{C_{2m}^m} \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{C_{2m}^{m-j}}{j^r}$. Далее, пусть $\Phi\colon C \to \mathbb{R}_+$ – полуаддитивный функционал,

$$m_k(\Phi) = \sup_{f\in C^{(k)}} \frac{\Phi(f)}{\|f^{(k)}\|}$$

– моменты функционала Φ.

В работе устанавливаются утверждения следующего типа.

Теорема A. *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)}{h^{rk}} \nu_{r,m}^{k} < +\infty.$$

Тогда для всех $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)}{h^{rk}} \nu_{r,m}^{k}\right) \big\|(I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big\|. \tag{1.1}$$

В частности, для $\Phi = E_n$ получаем следующую теорему.

Теорема B. *Пусть* $r, m, n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $h > \frac{\nu_{r,m}^{1/r}}{n}$. *Тогда для всех* $f \in C$

$$E_n(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m}^{k}\right) \big\|(I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big\|.$$

Здесь и далее $\mathcal{K}_s$ – константы Фавара, определяемые равенством

$$\mathcal{K}_s = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(s+1)}}{(2k+1)^{s+1}}. \tag{1.2}$$

При $m = 1$ получаются оценки через отклонения функций Стеклова.

Следствие A. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)}{h^{rk}} \, 2^{rk} < +\infty.$$

Тогда для всех $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)}{h^{rk}} \, 2^{rk}\right) \big\|(I - S_{h,r})^{p+1}(f)\big\|. \tag{1.3}$$

Следствие B. *Пусть* $r,n\in\mathbb{N}$, $h>\frac{2}{n}$, $p\in\mathbb{Z}_+$. *Тогда для всех* $f\in C$

$$E_n(f)\leqslant\Bigl(\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+p}^{p}\frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}}\,2^{rk}\Bigr)\bigl\|(I-S_{h,r})^{p+1}(f)\bigr\|.$$

В работе [1] (см. также [2, с. 219–228]) В. В. Жук установил оценки полуаддитивного функционала с двумя известными моментами через отклонения функций Стеклова:

$$\begin{aligned}\Phi(f)&\leqslant\Bigl(2m_0(\Phi)+4\mathcal{G}_r\frac{m_2(\Phi)}{h^2}\Bigr)\bigl\|f-S_{h,r}(f)\bigr\|,\quad r\geqslant2,\\ \Phi(f)&\leqslant\Bigl(4m_0(\Phi)+4\mathcal{G}_1\frac{m_2(\Phi)}{h^2}\Bigr)\bigl\|f-S_{h,1}(f)\bigr\|\end{aligned}\tag{1.4}$$

и их частные случаи для наилучших приближений. Здесь постоянные $\mathcal{G}_r$ определяются равенствами

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_r&=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^2\sin^{2r}t}{t^r(t^r-\sin^r t)}\cos yt\,dt\right|dy,\quad r\geqslant2,\\ \mathcal{G}_1&=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^4 t}{t(t-\sin t)}\cos yt\,dt\right|dy.\end{aligned}$$

Правые части неравенств (1.3) при $p=0$ и (1.4) несравнимы. Здесь и далее мы будем говорить, что две величины, зависящие от параметров, несравнимы, если при некоторых значениях параметров больше одна, а при некоторых – другая.

С. Фукар, Ю. В. Крякин и А. Ю. Шадрин в работе [3] получили оценки наилучших приближений через отклонения операторов $S_{h,2,m}$ и установили с их помощью неравенство типа Джексона для модуля непрерывности порядка $2m$.

В настоящей работе также устанавливается следующий результат.

Теорема C. *В условиях теоремы A для всех* $f\in C$

$$\Phi(f)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+p}^{p}\frac{m_{2k}(\Phi)}{h^{2k}}\frac{\nu_{2,m}^{k}}{2^{2k}}\bigl\|\delta_h^{2k}(I-S_{h,2,m})^{p+1}(f)\bigr\|.\tag{1.5}$$

Неравенство (1.5) усиливает неравенство (1.1) при $r = 2$. Устанавливаются аналоги теоремы C при других r. Однако, в общем случае правые части неравенств типа (1.1) и (1.5) несравнимы.

Утверждения работы доказываются в различных пространствах функций, заданных на числовой оси; в том числе, в пространствах периодических функций. Следствиями полученных неравенств являются неравенства типа Джексона для приближений целыми функциями конечной степени с лучшими, чем было известно ранее, постоянными.

Некоторые результаты этой работы были объявлены в [4], где допущена опечатка. В определении величин $N_{t,k}$ следует читать: $N_{t,k} = \sup\limits_{f\in C_0} \frac{P(V_t^k(f))}{P(f)}$.

1.2. Обозначения. Далее, в дополнение к уже введенным обозначениям, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ — множества комплексных, вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; $[a:b] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$; $UCB(\mathbb{R})$ – пространство ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, а C – пространство 2π-периодических непрерывных функций, с равномерными нормами $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$; если $1 \leqslant p < \infty$, то $L_p(\mathbb{R})$ – пространство измеримых, суммируемых на оси с p-й степенью, а L_p – пространство измеримых, 2π-периодических, суммируемых на периоде с p-й степенью функций f, с нормами $\|f\|_p = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{1/p}$, где $E = \mathbb{R}$ или $[-\pi,\pi]$ соответственно; $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_∞ – пространства измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|;$$

$L(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$; если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ ($1 \leqslant p < \infty$) или пространства $UCB(\mathbb{R})$ ($p = \infty$), P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$. Если выполняются условия:

1) пространство инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $f(\cdot + h) \in \mathfrak{M}$ и $P(f(\cdot + h)) = P(f)$,

2) существует такая постоянная B, что $P(f) \leqslant B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$,

то будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ являются: $\bigl(UCB(\mathbb{R}), \quad \|\cdot\|_\infty\bigr)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, пространства периодических функций $\bigl(C, \|\cdot\|_p\bigr)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций [5], показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами (равномерной, Степанова, Вейля, Безиковича). Модуль непрерывности порядка r функции f относительно полунормы P определяется равенством

$$\omega_r(f,h)_P = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} P\bigl(\delta_t^r(f)\bigr).$$

Индекс p у наилучшего приближения, модуля непрерывности и т.п. означает, что $P(f) = \|f\|_p$.

Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в других случаях символы $\frac{0}{0}$ и $0\cdot\infty$ понимаются как 0. Считаем, что композиция $G\circ F$ определена на множестве тех x из области определения F, для которых $F(x)$ принадлежит области определения G. При операциях с суммами употребляется логическая нотация [6, глава 2, §1]: $[A] = 1$, если утверждение A истинно, $[A] = 0$, если A ложно; пустая сумма считается равной нулю.

При $r, j \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$ через $\varkappa_{r,j,s}$ обозначается число решений $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ уравнения $\sum\limits_{d=1}^{r}\bigl(\alpha_d - \frac{j-1}{2}\bigr) = s$, принадлежащих $[0:j-1]^r$, то есть

$$\varkappa_{r,j,s} = \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r}\left[\sum_{d=1}^{r}\Bigl(\alpha_d - \frac{j-1}{2}\Bigr) = s\right]. \tag{1.6}$$

Ясно, что если r четно, $s \notin \mathbb{Z}$ или r нечетно, $2s \notin \mathbb{Z}$, то $\varkappa_{r,j,s} = 0$. Покажем, что числа $\varkappa_{r,j,s}$ суть коэффициенты тригонометрической суммы (при четном r это ядро Джексона; в том числе, при $r = 2$ – ядро Фейера)

$$\left(\frac{\sin\frac{jt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^r = \sum_{s\in\mathbb{R}} \varkappa_{r,j,s} e^{ist}.$$

В самом деле,

$$\left(\frac{\sin\frac{jt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^r = \left(\sum_{\alpha\in[0:j-1]} e^{i(\alpha-\frac{j-1}{2})t}\right)^r =$$
$$= \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r}\prod_{d=1}^{r} e^{i(\alpha_d-\frac{j-1}{2})t} = \sum_{s\in\mathbb{R}} \varkappa_{r,j,s}e^{ist}.$$

Запишем явное выражение для $\varkappa_{r,j,s}$ при $r=1$ и $r=2$:

$$\varkappa_{1,j,s} = \left[s+\frac{j-1}{2}\in[0:j-1]\right] = \tag{1.7}$$
$$= \begin{cases} 1, & j\geqslant 1+2|s|,\ 2s\in\mathbb{Z},\ j \text{ и } 2s \text{ разной четности},\\ 0, & \text{иначе},\end{cases}$$
$$\varkappa_{2,j,s} = (j-|s|)\Big[s\in[1-j:j-1]\Big]. \tag{1.8}$$

Если $(\mathfrak{M},P)$ – пространство с полунормой, $\mathfrak{N}$ – подпространство $\mathfrak{M}$, $U\colon\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ – линейный оператор, то полунорма оператора U определяется формулой

$$N_P(U) = \sup_{f\in\mathfrak{N}}\frac{P(U(f))}{P(f)}.$$

Из неравенства

$$P(UV(f)) \leqslant N_P(U)P(V(f)) \leqslant N_P(U)N_P(V)P(f)$$

очевидно, что

$$N_P(UV) \leqslant N_P(U)N_P(V)$$

(при условии, что произведение операторов имеет смысл). Далее, $\mathcal{L}(\mathfrak{M})$ – пространство линейных ограниченных операторов в $\mathfrak{M}$, $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ – множество полуаддитивных функционалов $\Phi\colon\mathfrak{M}\to\mathbb{R}_+$, то есть таких, что $\Phi(f+g)\leqslant\Phi(f)+\Phi(g)$ для любых $f,g\in\mathfrak{M}$; если при этом $U\colon\mathfrak{N}\to\mathfrak{M}$ – линейный оператор, полагаем

$$N_P(\Phi,U) = \sup_{f\in\mathfrak{N}}\frac{\Phi(f)}{P(U(f))},$$

I – тождественный оператор.

§2. Общие оценки для операторов в пространствах с полунормой

Лемма 1. *Пусть U – линейный оператор в векторном пространстве, $n \in \mathbb{Z}_+$, $p \in [\,0 : n]$. Тогда*

$$I = \sum_{k=0}^{n-1-p} C_{k+p}^{p} U^k (I-U)^{p+1} + \sum_{l=0}^{p} C_n^l U^{n-l} (I-U)^l. \tag{2.1}$$

Доказательство проведем индукцией по p при фиксированном n. При $p = 0$ (база индукции) равенство (2.1) принимает вид

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} U^k (I-U) + U^n$$

и, очевидно, верно при любом $n \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $p \in [1 : n]$ и равенство (2.1) верно для номера $p-1$; докажем его для номера p. Поскольку $C_{k+p-1}^{p-1} = C_{k+p}^{p} - C_{k-1+p}^{p}$ (с соглашением $C_{p-1}^{p} = 0$), применяя преобразование Абеля, находим:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-p} C_{k+p-1}^{p-1} U^k &= \sum_{k=0}^{n-p} C_{k+p}^{p} U^k - \sum_{k=0}^{n-p} C_{k-1+p}^{p} U^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-p} C_{k+p}^{p} U^k - \sum_{k=0}^{n-1-p} C_{k+p}^{p} U^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1-p} C_{k+p}^{p} U^k (I-U) + C_n^p U^n,
\end{aligned}$$

Пользуясь индукционным предположением, получаем:

$$I = \sum_{k=0}^{n-p} C_{k-1+p}^{p-1} U^k (I-U)^p + \sum_{l=0}^{p-1} C_n^l U^{n-l} (I-U)^l$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1-p} C_{k+p}^{p} U^k (I-U)^{p+1} + C_n^p U^n (I-U)^p + \sum_{l=0}^{p-1} C_n^l U^{n-l} (I-U)^l$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1-p} C_{k+p}^{p} U^k (I-U)^{p+1} + \sum_{l=0}^{p} C_n^l U^{n-l} (I-U)^l,$$

и равенство (2.1) доказано.

Теорема 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P)$ *– пространство с полунормой,* $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $U\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $Q\colon U(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$ *– линейные операторы, причем*

$$QU(f) = UQ(f) \quad \text{для всех} \quad f \in U(\mathfrak{M}); \tag{2.2}$$

$R = QU$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $N_P(\Phi, Q^k) < +\infty$ *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p N_P(\Phi, Q^k) N_P(R^k) < +\infty. \tag{2.3}$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}$

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p N_P(\Phi, Q^k) P\big(R^k (I-U)^{p+1}(f)\big), \tag{2.4}$$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p N_P(\Phi, Q^k) N_P(R^k)\right) P\big((I-U)^{p+1}(f)\big). \tag{2.5}$$

Доказательство. Заметим, что оператор R определен на $\mathfrak{M}$ и линеен. Из условия (2.2) следует, что $R^k = Q^k U^k$.

При каждом натуральном $n > p$ по лемме 1 и свойствам функционала Φ имеем:

$$\begin{aligned}
\Phi(f) &\leqslant \Phi\left(\sum_{k=0}^{n-1-p} C_{k+p}^p\, U^k (I-U)^{p+1}(f)\right) \\
&\quad + \Phi\left(\sum_{l=0}^{p} C_n^l U^{n-l} (I-U)^l (f)\right) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1-p} C_{k+p}^p N_P(\Phi, Q^k) P\big(R^k (I-U)^{p+1}(f)\big) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{p} C_n^l N_P(\Phi, Q^{n-l}) P\big(R^{n-l} (I-U)^l (f)\big).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Устремим в правой части n к ∞. Первая сумма в (2.6) стремится к сумме ряда в правой части (2.4). Из сходимости ряда (2.3) следует, что

$$C_{n+p}^p N_P(\Phi, Q^n) N_P(R^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому при всех $l \in [\,0:p]$

$$C_n^l N_P(\Phi, U^{n-l}) P\bigl(R^{n-l}(I-U)^l(f)\bigr)$$
$$\leqslant C_n^l N_P(\Phi, U^{n-l}) N_P(R^{n-l}) P\bigl((I-U)^l(f)\bigr) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

так как $C_n^l \leqslant C_{n-l+p}^p$. Следовательно, вторая сумма в (2.6) стремится к нулю.

Неравенство (2.5) вытекает из (2.4) и определения полунормы оператора. Теорема доказана.

Замечание 1. Ясно, что $N_P(R^k) \leqslant N_P^k(R)$. Степени полунорм, как правило, легче поддаются исследованию, чем полунормы степеней. Поэтому далее конкретные приложения теоремы 1 будут формулироваться с использованием величин $N_P^k(R)$. Именно, вместо условия сходимости (2.3) будет записываться более сильное условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p N_P(\Phi, Q^k) N_P^k(R) < +\infty,$$

а вместо неравенства (2.5) – вытекающее из него неравенство

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p N_P(\Phi, Q^k) N_P^k(R)\right) P\bigl((I-U)^{p+1}(f)\bigr).$$

Тем не менее, мы приводим и явные выражения для итераций операторов и их полунорм.

До сих пор на пространство не накладывалось никаких требований; даже требования, чтобы элементами пространства были функции. В данной работе теорема 1 будет применяться в пространствах класса $\mathcal{B}$. Опишем схему ее дальнейшего применения.

В качестве операторов U выступают средние типа функций Стеклова. Чтобы применять теорему 1, нужно выбирать множители Q и R так, чтобы уметь оценивать величины $N_P(\Phi, Q^k)$. В пространствах класса $\mathcal{B}$ разумным выбором будет $Q = D^r$ – оператор r-кратного дифференцирования. Величины

$$m_s(\Phi)_P = N_P(\Phi, D^s) = \sup_{f\in\mathfrak{M}^{(s)}} \frac{\Phi(f)}{P(f^{(s)})}$$

называются моментами функционала Φ порядка $s \in \mathbb{Z}_+$ относительно полунормы P. Здесь $\mathfrak{M}^{(s)}$ – множество функций из $\mathfrak{M}$, являющихся s-кратными интегралами от функций из $\mathfrak{M}$. Моменты многих важных функционалов известны точно или оценены, что позволяет применять к таким функционалам теорему 1.

Теорема 1 будет применяться к разложению вида $D^r U = \frac{1}{h^r} W \delta_h^r$, где W – некоторый сумматорный оператор (постоянный множитель $\frac{1}{h^r}$ не играет роли в рассуждениях и введен для удобства дальнейшей записи формул в приложениях). Полагая $V = W\delta_h^r$, $R = \frac{1}{h^r} V$, из (2.5) получаем неравенство

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} N_P^k(V) \right) P\big((I-U)^{p+1}(f)\big). \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.4) (но не (2.5)) вытекает оценка

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} N_P^k(W) P\big(\delta_h^{kr}(I-U)^{p+1}(f)\big). \tag{2.8}$$

Как из неравенства (2.7), так и из неравенства (2.8) следует оценка

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} 2^{rk} N_P^k(W) \right) P\big((I-U)^{p+1}(f)\big). \tag{2.9}$$

Вообще говоря, правые части неравенств (2.7) и (2.8) несравнимы. Однако, если $N_P^k(W\delta_h^r) = 2^{rk} N_P^k(W)$, то неравенства (2.7) и (2.9) совпадают и, таким образом, неравенство (2.8) оказывается более тонким, чем (2.7). Отметим еще, что при получении оценки типа (2.8) можно рассчитывать выгадать, представив оператор U в виде $U = T\delta_h^r$ (T будет некоторым интегро-сумматорным оператором), если уметь более аккуратно оценивать величины $\sup\limits_{f \in \mathfrak{M}} \frac{\Phi(T^k(f))}{P(f)}$. Неравенство (2.7), в отличие от (2.8), имеет место и если сумматорный оператор V не допускает выделения разностного оператора в качестве множителя.

Замечание 2. Поскольку $C_{k+p}^p \sim \frac{k^p}{p!}$ при фиксированном p и $k \to \infty$, в условии сходимости ряда (11) множители C_{k+p}^p можно заменить на k^p. Однако, мы не будем этого делать и сохраним единообразную запись условия сходимости ряда и оценки.

§3. Оценки в пространствах функций, заданных на оси

В этом параграфе рассматриваются операторы в пространствах класса $\mathcal{B}$.

3.1. Сумматорные операторы и их итерации. В этом пункте содержатся некоторые общие сведения о степенях (итерациях) сумматорных операторов и их полунормах. Пусть $\{B_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ – семейство вещественных или комплексных чисел; $B_s = 0$ для всех s, за исключением некоторого не более чем счетного множества J, причем

$$\sum_{s\in J} |B_s| < +\infty.$$

Подобные суммы можно брать как по множеству $\mathbb{R}$, так и по множеству J; запись суммы по $\mathbb{R}$ удобна, когда множество J явно не задано или рассматриваются различные семейства. При любой нумерации счетного множества J: $J = \{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ для всех $f \in X$ $(X = L_p(\mathbb{R})$ или $X = UCB(\mathbb{R}))$ и $h \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_{s_i} f(x + s_i h)$ абсолютно сходится по норме пространства X, и потому его сумма не зависит от нумерации. Для конечного множества J последнее утверждение тривиально. Поэтому имеет смысл определить сумму семейства: $\sum\limits_{s\in\mathbb{R}} B_s f(x+sh)$ и говорить о ней как о сумме ряда.

Пусть семейство операторов $V = \{V_h\}_{h>0}$ задается равенством

$$V_h(f,x) = \sum_{s\in J} B_s f(x + sh).$$

Из свойств пространств класса $\mathcal{B}$ вытекает, что если $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, то $V_h \in \mathcal{L}(\mathfrak{M})$ и

$$N_P(V_h) \leqslant \nu(V), \tag{3.1}$$

где

$$\nu(V) = \sum_{s\in J} |B_s|. \tag{3.2}$$

В обозначении отражено, что величина $\nu(V)$ не зависит от пространства $(\mathfrak{M}, P)$ и от h, а определяется семейством операторов V.

Если задано k операторов

$$V_h^{(q)}(f,x) = \sum_{s\in\mathbb{R}} B_s^{(q)} f(x + sh), \quad \sum_{s\in\mathbb{R}} |B_s^{(q)}| < +\infty \quad (q \in [1:k]),$$

то их произведение записывается в виде

$$\left(\prod_{q=1}^{k} V_h^{(q)}\right)(f,x) = \sum_{s\in\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{R}^k} \left(\prod_{q=1}^{k} B_{j_q}^{(q)}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] f(x+sh). \tag{3.3}$$

Формула (3.2) принимает вид

$$\nu\left(\prod_{q=1}^{k} V^{(q)}\right) = \sum_{s\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j\in\mathbb{R}^k} \left(\prod_{q=1}^{k} B_{j_q}^{(q)}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] \right|. \tag{3.4}$$

В частности, для итераций оператора V_h верны формулы

$$V_h^k(f,x) = \sum_{s\in\mathbb{R}} \sum_{j\in J^k} \left(\prod_{q=1}^{k} B_{j_q}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] f(x+sh), \tag{3.5}$$

$$\nu(V^k) = \sum_{s\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j\in J^k} \left(\prod_{q=1}^{k} B_{j_q}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] \right|. \tag{3.6}$$

Замечание 3. В пространствах $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_1(\mathbb{R})$ неравенство (3.1) обращается в равенство, то есть

$$\nu(V) = \|V_h\|_{L_\infty(\mathbb{R})\to L_\infty(\mathbb{R})} = \|V_h\|_{L_1(\mathbb{R})\to L_1(\mathbb{R})}. \tag{3.7}$$

Поэтому $\nu(V^k) \leqslant \nu^k(V)$, в чем можно убедиться и прямым вычислением.

Замечание 4. Если f имеет период T, то в формулах (3.5) и (3.6) можно брать внешние суммы по $s \in [0,T)$ и равенства в логических скобках понимать по модулю T/h. При такой записи равенство, аналогичное (3.7), будет верно в пространствах T-периодических функций L_1 и L_∞.

Будем называть последовательность $\{A_j\}$ знакочередующейся, если $A_j = \varepsilon(-1)^j|A_j|$, где $|\varepsilon| = 1$.

Замечание 5. Рассмотрим операторы со знакочередующейся последовательностью коэффициентов:

$$\begin{gathered} V_h(f,x) = \varepsilon \sum_{s\in\mathbb{Z}} (-1)^s b_s f(x+sh), \\ |\varepsilon| = 1, \quad b_s \geqslant 0 \quad \text{при всех } s\in\mathbb{Z} \end{gathered} \tag{3.8}$$

(подчеркнем, что значения функции берутся в равноотстоящих узлах). Ясно, что

$$\nu(V) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_s. \tag{3.9}$$

Произведение операторов $V_h^{(q)}$ вида (3.8) и, в частности, итерации V_h^k имеют тот же вид. Это становится очевидным, если подставить коэффициенты $B_j^{(q)} = \varepsilon_q(-1)^j b_j^{(q)}$ в формулу (3.3). В этом случае из равенств (3.4) и (3.9) следует, что

$$\nu\biggl(\prod_{q=1}^k V^{(q)}\biggr) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}^k} \biggl(\prod_{q=1}^k b_{j_q}^{(q)}\biggr)\biggl[\sum_{q=1}^k j_q = s\biggr]$$
$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}^k}\biggl(\prod_{q=1}^k b_{j_q}^{(q)}\biggr) = \prod_{q=1}^k\biggl(\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j^{(q)}\biggr) = \prod_{q=1}^k \nu\bigl(V^{(q)}\bigr).$$

В частности, в качестве одного или нескольких сомножителей могут выступать операторы конечной разности с тем же шагом (оператор центральной разности нечетного порядка отличается от вида (3.8) еще сдвигом, что несущественно ввиду инвариантности полунормы относительно сдвига). Таким образом, для операторов V_h вида (3.8) верны равенства

$$\nu(\delta^r V) = 2^r \nu(V), \quad \nu(V^k) = \nu^k(V), \quad r, k \in \mathbb{N}.$$

3.2. Операторы общего вида, построенные на основе функций Стеклова и разностей. Пусть $h > 0$, $A_{ij} \in \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, $\lambda_j > 0$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$),

$$\sum_{i\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{N}} |A_{ij}| < +\infty, \qquad \sum_{i\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{N}} \frac{|A_{ij}|}{\lambda_j^r} < +\infty, \tag{3.10}$$

оператор U_h задается равенством

$$U_h(f, x) = \sum_{i\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{N}} A_{ij} S_{\lambda_j h, r}(f, x + \beta_i h). \tag{3.11}$$

Известно [7], что если $f \in \mathfrak{M}$, то и $S_{t,r}(f) \in \mathfrak{M}$ для любых $t > 0$ и $r \in \mathbb{N}$. Из сходимости первого числового ряда в (3.10) вытекает, что $U_h \in \mathcal{L}(\mathfrak{M})$. По определению функции Стеклова

$$U_h(f, x) = \sum_{i\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{N}} \frac{A_{ij}}{(\lambda_j h)^r}\, \delta_{\lambda_j h}^r\bigl(f^{(-r)}, x + \beta_i h\bigr).$$

Последнее равенство верно при любом выборе первообразной f. Положим

$$V_h(f,x) = \sum_{i\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{N}} \frac{A_{ij}}{\lambda_j^r}\, \delta^r_{\lambda_j h}(f, x+\beta_i h). \tag{3.12}$$

Из сходимости рядов в (3.10) вытекает, что $V_h \in \mathcal{L}(\mathfrak{M})$ и

$$\big(U_h(f)\big)^{(r)} = U_h\big(f^{(r)}\big) = \frac{1}{h^r} V_h(f).$$

Чтобы применить к операторам U_h и V_h теорему 1, оценим величины $N_P(V_h^k)$. Для этого запишем оператор V_h в виде суммы значений функции и приведем подобные члены:

$$V_h(f,x) = \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{N},\\ l\in[0:r]}} (-1)^l C_r^l \frac{A_{ij}}{\lambda_j^r} f\left(x+\beta_i h+\Big(\frac{r}{2}-l\Big)\lambda_j h\right) = \sum_{s\in\mathbb{R}} B_{r,s} f(x+sh),$$

где

$$B_{r,s} = \sum_{\substack{i\in\mathbb{Z},\, j\in\mathbb{N},\\ l\in[0:r]}} (-1)^l C_r^l \frac{A_{ij}}{\lambda_j^r} \left[\left(\beta_i + \Big(\frac{r}{2}-l\Big)\lambda_j\right) = s\right]. \tag{3.13}$$

Итерации оператора V_h строятся по формуле (3.5), а полунормы оператора V_h и его итераций оцениваются величинами (3.2) и (3.6).

Применяя теорему 1 к операторам U_h и V_h по схеме §2, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, *выполнены условия* (3.10), *операторы* U_h *и* V_h *определяются равенствами* (3.11) *и* (3.12), *коэффициенты* $B_{r,s}$ – *формулой* (3.13), $\nu(V) = \sum\limits_{s\in\mathbb{R}} |B_{r,s}|$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $p \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} \nu^k(V) < +\infty.$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} \nu^k(V)\right) P\big((I-U_h)^{p+1}(f)\big).$$

3.3. Операторы, построенные на основе функций Стеклова и разностей по равноотстоящим узлам. Рассмотрим случай, когда узлы равноотстоящие: $\lambda_j = j$. В этой ситуации применимы два способа оценки функционала, приводящие к неравенствам (2.7) и (2.8). Для упрощения изложения ограничимся случаем, когда центр не сдвигается, то есть $A_{ij} = 0$ при всех $i \neq 0$, $\beta_0 = 0$. В этом пункте нам будет удобно снабдить величины еще индексом r, так что, например, символ V_2 будет означать семейство операторов $\{V_{h,2}\}$.

Итак, пусть

$$U_{h,r}(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} A_j S_{jh,r}(f,x), \quad \sum_{j\in\mathbb{N}} |A_j| < +\infty. \tag{3.14}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
U_{h,r}(f,x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{A_j}{(jh)^r} \delta^r_{jh}\bigl(f^{(-r)},x\bigr),\\
V_{h,r}(f,x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{A_j}{j^r}\, \delta^r_{jh}(f,x) \qquad\qquad (3.15)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{N},\, l\in[0:r]} (-1)^l C^l_r \frac{A_j}{j^r} f\left(x + \Bigl(\frac{r}{2} - l\Bigr) jh\right)\\
&= \sum_{s\in\mathbb{R}} B_{r,s} f(x+sh),
\end{aligned}$$

где

$$B_{r,s} = \sum_{j\in\mathbb{N},\, l\in[0:r]} (-1)^l C^l_r \frac{A_j}{j^r} \left[\Bigl(\frac{r}{2} - l\Bigr) j = s\right]. \tag{3.16}$$

С другой стороны, поскольку

$$\delta^r_{jh}(f,x) = \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r} \delta^r_h\biggl(f, x + h\sum_{d=1}^r \Bigl(\alpha_d - \frac{j-1}{2}\Bigr)\biggr),$$

операторы $U_{h,r}$ и $V_{h,r}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned}
U_{h,r}(f,x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{A_j}{(jh)^r} \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r} \delta^r_h\biggl(f^{(-r)}, x + h\sum_{d=1}^r \Bigl(\alpha_d - \frac{j-1}{2}\Bigr)\biggr),\\
V_{h,r}(f,x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{A_j}{j^r} \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r} \delta^r_h\biggl(f, x + h\sum_{d=1}^r \Bigl(\alpha_d - \frac{j-1}{2}\Bigr)\biggr)\\
&= \delta^r_h W_{h,r}(f,x),
\end{aligned}$$

где

$$
\begin{aligned}
W_{h,r}(f,x) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{A_j}{j^r} \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r} f\Big(x + h\sum_{d=1}^{r}\Big(\alpha_d - \frac{j-1}{2}\Big)\Big) \\
&= \sum_{s\in\mathbb{R}} D_{r,s} f(x+sh),
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

$$
D_{r,s} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{A_j}{j^r} \varkappa_{r,j,s}, \tag{3.18}
$$

а числа $\varkappa_{r,j,s}$ определяются формулами (1.6).

При этом итерации операторов $V_{h,r}$ и $W_{h,r}$ строятся по правилу (3.5), а полунормы операторов $V_{h,r}$ и $W_{h,r}$ и их итераций оцениваются величинами вида (3.2) и (3.6).

Теорема 3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, *операторы* $U_{h,r}$, $V_{h,r}$ *и* $W_{h,r}$ *определяются равенствами* (3.14), (3.15) *и* (3.17), *коэффициенты* $B_{r,s}$ *и* $D_{r,s}$ – *формулами* (3.16) *и* (3.18), $\nu(V_r) = \sum\limits_{s\in\mathbb{R}} |B_{r,s}|$, $\nu(W_r) = \sum\limits_{s\in\mathbb{R}} |D_{r,s}|$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

1. *Если*

$$
\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} \nu^k(V_r) < +\infty,
$$

то для всех $f \in \mathfrak{M}$

$$
\Phi(f) \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} \nu^k(V_r)\Big) P\big((I - U_{h,r})^{p+1}(f)\big). \tag{3.19}
$$

2. *Если*

$$
\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} 2^{rk} \nu^k(W_r) < +\infty,
$$

то для всех $f \in \mathfrak{M}$

$$
\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} \nu^k(W_r) P\big(\delta_h^{rk}(I - U_{h,r})^{p+1}(f)\big). \tag{3.20}
$$

Обсудим оценки (3.19) и (3.20).

Замечание 6. Если r четно, то выражения $\left(\frac{r}{2}-l\right)j$ в формуле (3.16) и $\sum\limits_{d=1}^{r}\left(\alpha_d-\frac{j-1}{2}\right)$ в формуле (3.17) принимают целые значения, а если r нечетно – целые и полуцелые значения. По этой причине исследование оценок в случае нечетного r труднее. В частности, при нечетном r не удается воспользоваться соображениями о чередовании знаков, как в замечании 5.

Замечание 7. Если r четно, последовательность $\{D_{r,s}\}_{s\in\mathbb{Z}}$ знакочередующаяся, то по замечанию 5 последовательность $\{B_{r,s}\}_{s\in\mathbb{Z}}$ тоже знакочередующаяся и $2^{rk}\nu^k(W_r)=\nu^k(V_r)$. В этом случае неравенство (3.19) усиливает (3.20).

Пусть r четно. Выразим нормы $\nu(V_r)$ и $\nu(W_r)$ в случае знакочередования в терминах исходных коэффициентов A_j.

Если последовательность $\{B_{r,s}\}_{s\in\mathbb{Z}}$ знакочередующаяся, то

$$\nu(V_r)=\left|\sum_{s\in\mathbb{Z}}(-1)^sB_{r,s}\right|=\left|\sum_{s\in\mathbb{Z}}B_{r,s}f(sh)\right|,$$

где $f(sh)=(-1)^s$. Но тогда

$$\delta^r_{jh}(f,sh)=(-1)^{r/2}2^r\big[j\text{ нечетно}\big].$$

Возвращаясь от формулы (3.16) к формуле (3.15), находим:

$$\nu(V_r)=2^r\left|\sum_{l=0}^{\infty}\frac{A_{2l+1}}{(2l+1)^2}\right|. \tag{3.21}$$

Тем более, формула (3.21) верна, если знакочередуется последовательность $\{D_{r,s}\}_{s\in\mathbb{Z}}$.

Как будет видно далее, из знакочередования последовательности $\{A_j\}$ не следует знакочередование последовательности $\{B_{r,s}\}$, даже при $r=2$.

Рассмотрим подробнее случаи $r=1$ и $r=2$.

При $r=1$ из формулы (3.15) получаем, что

$$V_{h,1}(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{A_{|j|}}{j}f\Big(x+\frac{jh}{2}\Big),\quad \nu(V_1)=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|A_j|}{j}. \tag{3.22}$$

Подставляя в формулу (3.18) выражения для $\varkappa_{1,j,s}$ из равенства (1.7) и упрощая, получаем:

$$\nu(W_1) = \left|\sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_{2l+1}}{2l+1}\right| + 2\sum_{s=1}^{\infty}\left|\sum_{l=s}^{\infty} \frac{A_{2l+1}}{2l+1}\right| + 2\sum_{s=1}^{\infty}\left|\sum_{l=s}^{\infty} \frac{A_{2l}}{2l}\right|. \tag{3.23}$$

Если последовательность $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ сохраняет или чередует знак, то в каждой сумме в (3.23) слагаемые одного знака. Меняя порядок суммирования, находим:

$$\nu(W_1) = \sum_{j=1}^{\infty} |A_j|. \tag{3.24}$$

Как видно, в этом случае абсолютная погрешность, возникающая от замены $\nu(V_1)$ на $2\nu(W_1)$, равна $2\sum\limits_{j=2}^{\infty} |A_j|\bigl(1-\frac{1}{j}\bigr)$.

При $r=2$ формула (3.15) принимает вид

$$V_{h,2}(f,x) = -2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{j^2} f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{j^2}(f(x+jh)+f(x-jh)).$$

Поэтому

$$\nu(V_2) = 2\left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{j^2}\right| + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|A_j|}{j^2}.$$

Если последовательность $\{A_j\}$ знакочередующаяся, причем

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{|A_j|}{j^2} \geqslant 0, \tag{3.25}$$

то

$$\nu(V_2) = 4\sum_{l=0}^{\infty} \frac{|A_{2l+1}|}{(2l+1)^2}.$$

Для выполнения условия (3.25) достаточно убывания последовательности $\bigl\{|A_j|\bigr\}$.

Если же подставить в формулу (3.18) выражения для $\varkappa_{2,j,s}$ из равенства (1.8), то получим:

$$D_{2,s} = \sum_{j=|s|+1}^{\infty} \frac{A_j}{j^2}(j-|s|), \tag{3.26}$$

$$\nu(W_2) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left|\sum_{j=|s|+1}^{\infty} \frac{A_j}{j^2}(j-|s|)\right|.$$

Выведем достаточное условие знакочередования последовательности $\{D_{2,s}\}$.

Лемма 2. *Если последовательность $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ знакочередующаяся, $\frac{A_j}{j}\to 0$, а последовательность $\left\{\frac{|A_j|}{j^2}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ выпуклая, то последовательность $\{D_{2,s}\}_{s\in\mathbb{Z}}$, заданная формулой* (3.26), *знакочередующаяся.*

Доказательство. Как легко доказывается двукратным преобразованием Абеля, если последовательность $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ выпукла, $ja_j\to 0$, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}ja_j\geqslant 0$. Пусть $A_j=\varepsilon(-1)^{j-1}b_j$, где $|\varepsilon|=1$, $b_j=|A_j|$. В силу четности $D_{2,s}$ достаточно рассмотреть $s\in\mathbb{Z}_+$. Имеем:

$$\frac{(-1)^s}{\varepsilon}D_{2,s}=\sum_{j=s+1}^{\infty}(-1)^{j-s-1}\frac{b_j}{j^2}(j-s)=\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}j\frac{b_{j+s}}{(j+s)^2}\geqslant 0,$$

потому что последовательность $a_j=\dfrac{b_{j+s}}{(j+s)^2}$ также выпукла.

Таким образом, в условиях леммы 2 при $r=2$ применимы формула (3.21) и замечание 7.

§4. Оценки функционалов через обынтегрированные разности

4.1. Оценки функционалов общего вида. Применим теорему 3 к операторам

$$S_{h,r,m}=\frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}C_{2m}^{m-j}S_{jh,r},$$

взятым в роли $U_{h,r}$. Такой выбор коэффициентов позволяет записать операторы $I-S_{h,r,m}$ в виде обынтегрированной разности порядка $2m$ (см. далее лемму 4), что удобно при оценке данного отклонения через модуль непрерывности. Отметим еще, что $S_{h,r,1}=S_{h,r}$.

Соответствующие операторам $S_{h,r,m}$ операторы $V_{h,r}=V_{h,r,m}$ задаются формулой

$$V_{h,r,m}=\frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{C_{2m}^{m-j}}{j^r}\delta_{jh}^r.$$

Следующая из (3.15) и (3.16) оценка полунорм операторов $V_{h,r,m}$ принимает вид
$$N_P(V_{h,r,m}) \leqslant \nu_{r,m},$$
где
$$\begin{aligned}\nu_{r,m} &= \nu(V_{r,m})\\ &= \sum_{s\in\mathbb{R}} \Biggl| \sum_{j\in[1:m],\, l\in[0:r]} (-1)^{l+j-1} C_r^l \,\frac{C_{2m}^{m-j}}{C_{2m}^m}\,\frac{2}{j^r}\Bigl[\Bigl(\frac{r}{2}-l\Bigr)j = s\Bigr]\Biggr|. \end{aligned}\tag{4.1}$$

После выделения оператора разности в качестве множителя оператор $V_{h,r,m}$ записывается в виде
$$\begin{aligned} V_{h,r,m} &= \delta_h^r W_{h,r,m},\\ W_{h,r,m}(f,x) &= \sum_{s\in\mathbb{R}} D_{r,m,s} f(x+sh),\\ D_{r,m,s} &= \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^m (-1)^{j-1}\frac{C_{2m}^{m-j}}{j^r}\varkappa_{r,j,s}, \end{aligned}$$
$\varkappa_{r,j,s}$ задаются формулой (1.6). Оценка полунорм операторов $W_{h,r,m}$ принимает вид
$$N_P(W_{h,r,m}) \leqslant \mu_{r,m},$$
где
$$\begin{aligned}\mu_{r,m} &= \nu(W_{r,m})\\ &= \sum_{s\in\mathbb{R}} \Biggl| \sum_{j\in[1:m],\, l\in[0:r]} (-1)^{l+j-1} C_r^l \,\frac{C_{2m}^{m-j}}{C_{2m}^m}\,\frac{2}{j^r}\varkappa_{r,j,s}\Biggr|. \end{aligned}\tag{4.2}$$

Теорема 4. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $r,m\in\mathbb{N}$, $h>0$, $\Phi\in\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $p\in\mathbb{Z}_+$.

1. *Если*
$$\sum_{k=0}^\infty C_{k+p}^p \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}}\nu_{r,m}^k < +\infty,$$
то для всех $f\in\mathfrak{M}$
$$\Phi(f) \leqslant \Biggl(\sum_{k=0}^\infty C_{k+p}^p \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}}\nu_{r,m}^k\Biggr) P\bigl((I-S_{h,r,m})^{p+1}(f)\bigr).$$

2. *Если*
$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} 2^{rk} \mu_{r,m}^{k} < +\infty,$$
то для всех $f \in \mathfrak{M}$
$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}} \mu_{r,m}^{k} P\big(\delta_h^{rk}(I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big).$$

Теорема 4 – частный случай теоремы 3.

Разберем подробнее несколько частных случаев теоремы 4.

1.1. При $r = 1$ из формул (3.22) и (3.24) имеем:
$$\nu_{1,m} = \sum_{j=1}^{m} \frac{C_{2m}^{m-j}}{C_{2m}^{m}} \frac{4}{j}, \quad \mu_{1,m} = 2\sum_{j=1}^{m} \frac{C_{2m}^{m-j}}{C_{2m}^{m}} = \frac{2^{2m}}{C_{2m}^{m}} - 1. \tag{4.3}$$

По формуле Стирлинга $\mu_{1,m} \sim \sqrt{\pi m}$ при $m \to \infty$. Можно доказать, что $\nu_{1,m} \sim 2\ln(m+1)$.

Следствие 1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

1. *Если*
$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_k(\Phi)_P}{h^k} \nu_{1,m}^{k} < +\infty,$$
то для всех $f \in \mathfrak{M}$
$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_k(\Phi)_P}{h^k} \nu_{1,m}^{k}\right) P\big((I - S_{h,1,m})^{p+1}(f)\big).$$

2. *Если*
$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_k(\Phi)_P}{h^k} 2^k \mu_{1,m}^{k} < +\infty,$$
то для всех $f \in \mathfrak{M}$
$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{m_k(\Phi)_P}{h^k} \mu_{1,m}^{k} P\big(\delta_h^{k}(I - S_{h,1,m})^{p+1}(f)\big).$$

1.2. Рассмотрим случай $r = 2$.

Лемма 3. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $b_j = \frac{C_{2m}^{m-j}}{j^2}$ *при* $j \in [1:m]$, $b_j = 0$ *при* $j > m$. *Тогда последовательность* $\{b_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *выпукла.*

Доказательство. Обозначим $\delta^2 b_j = b_{j-1} - 2b_j + b_{j+1}$. При $m = 1$ утверждение тривиально. Если $m \geqslant 2$, то

$$\delta^2 b_m = b_{m-1} - 2b_m = \frac{2m}{(m-1)^2} - 2\cdot\frac{1}{m^2} > 0.$$

Поэтому при $m = 2$ утверждение доказано, а при $m \geqslant 3$ остается проверить неравенство $\delta^2 b_j \geqslant 0$ для $j \in [2 : m-1]$. С помощью элементарных преобразований имеем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{2m}^{m-j}}\,\delta^2 b_j &= \frac{m+j}{m+1-j}\cdot\frac{1}{(j-1)^2} - \frac{2}{j^2} + \frac{m-j}{m+1+j}\cdot\frac{1}{(j+1)^2}\\ &= \Big(1+\frac{2j-1}{m+1+j}\Big)\frac{1}{(j-1)^2} - \frac{2}{j^2} + \Big(1-\frac{2j+1}{m+1-j}\Big)\frac{1}{(j+1)^2}\\ &= \delta^2\frac{1}{j^2} + \frac{(6j^2-2)(m+1)+4j^4}{((m+1)^2-j^2)(j^2-1)^2} > 0.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

По формуле (3.22)

$$\nu_{2,m} = \sum_{j=0}^{\lfloor (m-1)/2\rfloor} \frac{C_{2m}^{m-2j-1}}{C_{2m}^{m}}\frac{8}{(2j+1)^2}, \tag{4.4}$$

где $\lfloor\cdot\rfloor$ – целая часть. По замечанию 7 и леммам 2 и 3

$$\mu_{2,m} = \frac{\nu_{2,m}}{4}. \tag{4.5}$$

Операторы $S_{h,2,m}$ использовались в работе [3] для доказательства неравенств типа Джексона. Там же была получена оценка (4.4) норм операторов $V_{h,2,m}$. Очевидно, что $\nu_{2,m} \to \pi^2$ при $m \to \infty$. В работе [3] установлено неравенство

$$\frac{8}{\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2m}}{2m+1} \leqslant 1 - \frac{\nu_{2,m}}{\pi^2} \leqslant \frac{8}{\pi^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2m+1}}{2m}.$$

Следствие 2. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $m\in\mathbb{N}$, $h>0$, $\Phi\in\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $p\in\mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p}\frac{m_{2k}(\Phi)_P}{h^{2k}}\nu_{2,m}^{k}<+\infty.$$

Тогда для всех $f\in\mathfrak{M}$

$$\Phi(f)\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p}\frac{m_{2k}(\Phi)_P}{h^{2k}}\mu_{2,m}^{k}P\big(\delta_h^{2k}(I-S_{h,2,m})^{p+1}(f)\big), \tag{4.6}$$

$$\Phi(f)\leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p}\frac{m_{2k}(\Phi)_P}{h^{2k}}\nu_{2,m}^{k}\right)P\big((I-S_{h,2,m})^{p+1}(f)\big). \tag{4.7}$$

Неравенство (4.6) усиливает (4.7).

1.3. Рассмотрим случай $m=1$. Очевидно, что $V_{h,r,1}=\delta_h^r$, $\nu_{r,1}=2^r$, $W=I$.

Следствие 3. *Пусть* $(\mathfrak{M},P)\in\mathcal{B}$, $r\in\mathbb{N}$, $h>0$, $\Phi\in\mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $p\in\mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p}\frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}}\,2^{rk}<+\infty.$$

Тогда для всех $f\in\mathfrak{M}$

$$\Phi(f)\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p}\frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}}\,P\big(\delta_h^{rk}(I-S_{h,r})^{p+1}(f)\big), \tag{4.8}$$

$$\Phi(f)\leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p}\frac{m_{rk}(\Phi)_P}{h^{rk}}\,2^{rk}\right)P\big((I-S_{h,r})^{p+1}(f)\big). \tag{4.9}$$

Неравенство (4.8) усиливает (4.9).

4.2. Оценки наилучших приближений. При $\sigma>0$ обозначим через $A_{\sigma-0}(f)_P$ ($A_\sigma(f)_P$) наилучшее приближение функции $f\in\mathfrak{M}$ множеством $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ ($\mathbf{E}_\sigma$) целых функций степени меньше (соответственно, не больше) σ в пространстве $(\mathfrak{M},P)$. Применим доказанные утверждения к функционалам $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$ и $A_\sigma(\cdot)_P$. Напомним, что константы Фавара $\mathcal{K}_s$ определяются равенством (1.2), константы $\nu_{r,m}$ и $\mu_{r,m}$ при произвольном r задаются формулами (4.1) и (4.2), а при $r=1$ и $r=2$ эти формулы принимают более простой вид (4.3)–(4.5).

Теорема 5. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

1. *Если* $h > \frac{\nu_{r,m}^{1/r}}{\sigma}$, *то для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m}^{k}\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big)_P, \quad (4.10)$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m}^{k}\right) P\big((I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big). \quad (4.11)$$

2. *Если* $h > \frac{2\mu_{r,m}^{1/r}}{\sigma}$, *то для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \mu_{r,m}^{k} A_{\sigma-0}\big(\delta_h^{rk}(I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big)_P, \quad (4.12)$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \mu_{r,m}^{k} P\big(\delta_h^{rk}(I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big). \quad (4.13)$$

В неравенствах (4.10)–(4.13) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.11) *и* (4.13) *можно заменить на* $P(f)$.

Доказательство. В силу замечания 1 и соотношения $\mathcal{K}_s \to \frac{4}{\pi}$ сходимость рядов в теореме 4 равносильна соответственно неравенствам $h > \frac{\nu_{r,m}^{1/r}}{\sigma}$ и $h > \frac{2\mu_{r,m}^{1/r}}{\sigma}$. Неравенства (4.11) и (4.13) получаются, если применить теорему 4 к функционалу $\Phi(f) = A_{\sigma-0}(f)_P$ и учесть, что [7] $m_s(\Phi)_P \leqslant \mathcal{K}_s \sigma^{-s}$. Неравенства (4.10) и (4.12) (формально более сильные, чем (4.11) и (4.13)) получаются, если применить последние к пространству $\big(\mathfrak{M}, A_{\sigma-0}(\cdot)_P\big)$, тоже принадлежащему классу $\mathcal{B}$, и воспользоваться равенством

$$A_{\sigma-0}(f)_{A_{\sigma-0}(\cdot)_P} = A_{\sigma-0}(f)_P.$$

Доказательство для A_σ аналогично.

Неравенства для функций, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$, получаются, если применить теорему 4 к пространству $\big(\mathfrak{M}_\sigma^{\perp}, P\big)$ функций из $\mathfrak{M}$, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$ (тоже принадлежащему классу $\mathcal{B}$), и функционалу $\Phi = P$. При этом учитывается, что верны те же оценки для моментов.

При $r = 2$ неравенства (4.12) и (4.13) усиливают (4.10) и (4.11).

Запишем отдельно неравенства при $m = 1$, то есть оценки наилучших приближений через степени отклонений функций Стеклова.

Следствие 4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $h > \frac{2}{\sigma}$, $p \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \, A_{\sigma-0}\big(\delta_h^{rk}(I - S_{h,r})^{p+1}(f)\big)_P, \tag{4.14}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \, P\big(\delta_h^{rk}(I - S_{h,r})^{p+1}(f)\big), \tag{4.15}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \, 2^{rk}\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r})^{p+1}(f)\big), \tag{4.16}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \, 2^{rk}\right) P\big((I - S_{h,r})^{p+1}(f)\big). \tag{4.17}$$

В неравенствах (4.14)–(4.17) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.15) *и* (4.17) *можно заменить на* $P(f)$.

Неравенства (4.14) и (4.16) усиливают (4.15) и (4.17), а неравенства (4.14) и (4.15) усиливают (4.16) и (4.17) соответственно.

Частными случаями и следствиями неравенств для пространств класса $\mathcal{B}$ являются неравенства для пространств периодических функций. Примеры таких неравенств содержатся во введении. Сформулируем вариант теоремы 5 для наилучших приближений периодических функций.

Следствие 5. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$ – *пространство* 2π-*периодических функций*, $r, m, n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$.

1. *Если* $h > \frac{\nu_{r,m}^{1/r}}{n}$, *то для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$E_n(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m}^{k}\right) E_n\big((I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big)_P, \tag{4.18}$$

$$E_n(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^{p} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m}^{k}\right) P\big((I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big). \tag{4.19}$$

2. *Если* $h > \frac{2\mu_{r,m}^{1/r}}{n}$, *то для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$E_n(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \mu_{r,m}^k E_n\big(\delta_h^{rk}(I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big)_P, \tag{4.20}$$

$$E_n(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \mu_{r,m}^k P\big(\delta_h^{rk}(I - S_{h,r,m})^{p+1}(f)\big). \tag{4.21}$$

Для функций f, *ортогональных* H_{n-1}, *левые части неравенств* (4.19) *и* (4.21) *можно заменить на* $P(f)$.

Замечание 8. Неравенства теоремы 5 и следствия 5 стандартным образом (например, с помощью приближения функции f ее интегралом Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с полунормами $\|\cdot\|_p$, $\omega_s(\cdot, h)_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$, $E_n(\cdot)_p$.

Замечание 9. При некоторых значениях параметров суммы рядов в правых частях неравенств могут быть вычислены явно. В частности,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_{2k} \tau^{2k} = \left(\cos \frac{\pi\tau}{2}\right)^{-1}, \quad |\tau| < 1, \tag{4.22}$$

а если $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k = A(z)$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p a_k z^k = \frac{1}{p!} \big(z^p A(z)\big)^{(p)}.$$

4.3. Оценки через модули непрерывности. Далее $\Psi_{h,r}$ – ядро Стеклова порядка r с шагом h. Следующая лемма хорошо известна (см., например, [8, с. 51–52]); тем не менее, мы приведем ее доказательство для полноты изложения.

Лемма 4. *Пусть* $r, m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, *функция* f *локально суммируема на* $\mathbb{R}$. *Тогда*

$$f - S_{h,r,m}(f) = (-1)^m \frac{2}{C_{2m}^m} \int\limits_{\mathbb{R}_+} \delta_t^{2m}(f) \Psi_{h,r}(t)\, dt. \tag{4.23}$$

Если, кроме того, $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathfrak{M}$, *то*

$$P\bigl(f - S_{h,r,m}(f)\bigr) \leqslant \frac{1}{C_{2m}^m}\omega_{2m}\Bigl(f, \frac{rh}{2}\Bigr). \tag{4.24}$$

Доказательство. Равенство (4.23) проверяется прямым вычислением:

$$S_{h,r,m}(f,x) = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}C_{2m}^{m-j}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\Psi_{jh,r}(t)\,dt$$

$$= \frac{2(-1)^{m-1}}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}C_{2m}^{m-j}\int\limits_{\mathbb{R}_+}(f(x+jt)+f(x-jt))\Psi_{h,r}(t)\,dt$$

$$= \frac{2(-1)^{m-1}}{C_{2m}^m}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\delta_t^{2m}(f,x)\Psi_{h,r}(t)\,dt + f(x).$$

Для доказательства неравенства (4.24) надо учесть, что

$$\Psi_{h,r} \geqslant 0, \quad \int\limits_{\mathbb{R}}\Psi_{h,r} = 1, \quad \operatorname{supp}\Psi_{h,r} = \Bigl[-\frac{rh}{2}, \frac{rh}{2}\Bigr],$$

и воспользоваться возможностью при оценке вносить полунорму под знак интеграла.

Величину $P\bigl(f - S_{h,r,m}(f)\bigr)$ можно рассматривать как модифицированный модуль непрерывности функции f.

Сопоставив неравенство (4.23) с теоремой 4 и ее следствиями при $p = 0$, можно получить оценки функционалов через модули непрерывности. Ограничимся записью одного неравенства для наилучших приближений.

Следствие 6. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$, $\alpha > \frac{\sqrt{\nu_{2,m}}}{\pi}$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\cos\frac{\sqrt{\nu_{2,m}}}{2\alpha}\right)^{-1}\frac{1}{C_{2m}^m}\,\omega_{2m}\Bigl(f, \frac{\alpha\pi}{\sigma}\Bigr)_P.$$

Для доказательства следствия 6 надо применить теорему 5 при $r = 2$, $p = 0$, $h = \frac{\alpha\pi}{\sigma}$ и воспользоваться соотношениями (4.22) и (4.24).

В работе [3] следствие 6 с большей константой установлено в пространствах L_p периодических функций. В работе [9] следствие 6 и предшествующая ему теорема 5 при $p=0$, $r=2$ установлены с помощью линейных методов приближения. В этой же работе содержится история вопроса о неравенствах типа Джексона и обсуждение точности неравенств. Подобным же образом оценки наилучших приближений настоящей работы могут быть получены с помощью линейных методов.

Литература

1. В. В. Жук, *О функциях В. А. Стеклова.* — В сб.: Дифференциальные уравнения с частными производными (общая теория и приложения). Межвуз. сб. научн. трудов СПб., 1992, 74–85.
2. В. В. Жук, В. Ф. Кузютин, *Аппроксимация функций и численное интегрирование.* СПб., Изд. С.-Петербургского ун-та, 1995.
3. S. Foucart, Y. Kryakin, A. Shadrin, *On the exact constant in the Jackson–Stechkin inequality for the uniform metric.* — Constr. Approx. **29** (2009), 157–179.
4. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *О константах в обобщенной теореме Джексона для линейных методов приближения.* — Теория приближений. Межд. конф. СПб., 6–8 мая, 2010 г. Тез. докл. СПб., 2010, 9–10.
5. Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции.* М., 1953.
6. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник *Конкретная математика.* М., 1998.
7. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени.* — Алгебра и анализ **17**, No. 4 (2005), 56–111.
8. В. В. Жук, *Структурные свойства функций и точность аппроксимации.* Л., 1984.
9. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Скорость убывания констант в неравенствах типа Джексона в зависимости от порядка модуля непрерывности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 33–52.

Vinogradov O. L., Zhuk V. V. Estimates for functionals with a known moment sequence in terms of deviations of Steklov type means.

Some estimates mentioned in the title are established. As implications, Jackson type inequalities with constants smaller than known previously are obtained. The results are valid in different spaces of periodic and non periodic functions.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: olvin@math.spbu.ru,
zhuk@math.spbu.ru

Поступило 6 сентября 2010 г.