Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ q–ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Рассматривается задача вычисления точек конечных регулярного и сингулярного спектров q-параметрической полиномилальной матрицы общего вида ($q \geqslant 2$). Для решения применяется метод наследственных пучков, ранее предложенный автором [1, 2] для двухпараметрических полиномиальных матриц. Приводится обобщение метода на случай q-параметрических, $q \geqslant 2$, полиномиальных матриц общего вида, алгоритмы вычисления точек регулярного и сингулярного спектров матрицы.

§1. Некоторые сведения о q-параметрических полиномиальных матрицах

1.1. Спектральные характеристики

Пусть $F(\overline{\mu}) := F(\mu_1, \dots, \mu_q)$ есть полиномиальная q-параметрическая $m \times n$ матрица ранга ρ: $F(\overline{\mu}) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\overline{\mu} := (\mu_1, \dots, \mu_q)$.

Рассматривается решение уравнения[1]

$$F(\overline{\mu})x = 0 \tag{1.1}$$

в точках конечного спектра $\sigma[F]$ матрицы $F(\overline{\mu})$.

Конечный спектр $\sigma[F]$ есть объединение регулярного $\sigma_r[F]$, сингулярного $\sigma_s[F]$ и регулярно-сингулярного $\sigma_{rs}[F]$ спектров матрицы $F(\overline{\mu})$:

$$\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma_s[F] \cup \sigma_{rs}[F],$$

где $\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \oplus \sigma_{r2}[F]$, $\sigma_s[F] = \sigma_{s1}[F] \oplus \sigma_{s2}[F]$.

Ключевые слова: многопараметрическая полиномиальная матрица, спектр регулярный, сингулярный; метод наследственных пучков.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00318-а).

[1]Здесь и ниже рассматриваются только правые решения (1.1). Для вычисления левых решений следует $F(\overline{\mu})$ заменить на $F^T(\overline{\mu})$.

Множество $\sigma_{r1}[F]$, так называемый собственный регулярный спектр матрицы $F(\overline{\mu})$, есть объединение замкнутых, неприводимых многообразий $(\nu_1, \dots, \nu_q)$ аффинного пространства $\mathbb{C}^q$, на которых уравнение (1.1) имеет[2] ненулевое решение (несколько решений), удовлетворяющее условию

$$x \in \{N_c[F(*)] \setminus N_c[F]_*\}, \quad (*) := (\nu_1, \dots, \nu_q).$$

Множество $\sigma_{r2}[F]$, так называемый смешанный регулярный спектр матрицы $F(\overline{\mu})$, состоит из объединения замкнутых, неприводимых многообразий $\overline{\nu}_{q-p} := (\nu_{p+1}, \dots, \nu_q)$, $p > 0$, аффинного пространства C^{q-p}, на которых (1.1) имеет полиномиальное решение (несколько полиномиальных решений) $x(\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\nu}_{q-p}) := x(\mu_1, \dots, \mu_p)$, удовлетворяющее условию

$$x(\mu_1, \dots, \overline{\nu}_{q-p}) \in \{N_c[F(*)] \setminus N_c[F]_*\}, \quad (*) = (\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\nu}_{q-p}).$$

В дальнейшем решение уравнения (1.1), состоящее из вектора ν_{q-p} и точки спектра, на которой рассматривается решение (1.1), будем называть спектральной парой матрицы $F(\overline{\mu})$. Пару $(\nu_1, \dots, \nu_q)$; x_*, удовлетворяющую (1.1), назовем собственной регулярной парой $F(\overline{\mu})$; здесь точка $(\nu_1, \dots, \nu_q)$ – собственное значение, а x_* – соответствующий ей собственный вектор.

Множество $\sigma_{s1}[F]$, так называемый собственный сингулярный спектр матрицы $F(\overline{\mu})$, есть объединение замкнутых, неприводимых многообразий $(\varkappa_1, \dots, \varkappa_q) \in \mathbb{C}^q$, на которых (1.1) имеет ненулевое решение (несколько ненулевых решений), удовлетворяющее условию

$$x \in N_c[F]_*, \quad (*) = (\varkappa_1, \dots, \varkappa_q).$$

Множество $\sigma_{s2}[F]$, так называемый смешанный сингулярный спектр матрицы $F(\overline{\mu})$, есть объединение замкнутых, неприводимых многообразий $\overline{\varkappa}_{q-p} := (\varkappa_{p+1}, \dots, \varkappa_q) \in \mathbb{C}^{q-p}$, $p > 0$, на которых уравнение (1.1) имеет полиномиальное решение (несколько полиномиальных решений) $x = x(\mu_1, \dots, \mu_p) := x(\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p})$, удовлетворяющее условию

$$x \in N_c[F]_*, \quad (*) = (\mu_1, \dots, \mu_p, \overline{\varkappa}_{q-p}).$$

[2]Здесь и ниже $N_c[F]$ обозначает нуль-пространство из правых полиномиальных решений матрицы F.

Множество $\sigma_{rs}[F]$, так называемый регулярно-сингулярный спектр $F(\overline{\mu})$, состоит из общих точек множеств $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$:

$$\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F],$$

на каждой из которых (1.1) имеет решение (несколько решений), удовлетворяющее условию

$$x \in \{N_c[F(*)] \cap N_c[F]_*\},$$

где $(*)$ есть точка множества $\sigma_{rs}[F]$.

1.2. Наследственные пучки для q-параметрической полиномиальной матрицы

Пусть $F(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\rho < n$. Представим $F(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ в виде матричного полинома с ведущим параметром μ_k из множества $\{\mu_1, \ldots \mu_q\}$:

$$F(\mu_k; \overline{\mu}_{q-k}) = \sum_{i=0}^{s_k} C_i^{(k)}(\overline{\mu}_{q-k})\mu_k^i = F_1(\overline{\mu}_{q-k})\Lambda_1(\mu_k). \tag{1.2}$$

Здесь $F_1(\overline{\mu}_{q-k}) = [C_{s_n}^{(k)}(\overline{\mu}_{q-k}), \ldots, C_0^{(k)}(\overline{\mu}_{q-k})]$ есть $(q-1)$-параметрическая полиномиальная $m \times (s_k+1)n$ матрица, составленная из коэфффициентов матричного полинома $F(\mu_k; \overline{\mu}_{q-k})$; $\Lambda_1(\mu_k) = [\mu_k^{s_k} I_n, \ldots, \mu_k^0 I_n]^B$; $\overline{\mu}_{q-k} = (\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)$ есть мультипараметр, состоящий из $q-1$ параметров, дополнительных к ведущему параметру μ_k. В качестве ведущего может быть выбран любой из параметров множества $\{\mu_1, \ldots, \mu_q\}$.

Введем обозначения. $W^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k})$ – матрица, столбцы которой образуют свободный базис (базис, не содержащий регулярного спектра) правого нуль-пространства $N_c[F_1]$ матрицы $F_1(\overline{\mu}_{q-k})$; $\overline{\nu}_{q-k} = (\nu_{k+1}, \ldots, \nu_q)$ – точка множества $\sigma_r[F]$; $\overline{\varkappa}_{q-k} = (\varkappa_{k+1}, \ldots, \nu_q)$ – точка множества $\sigma_s[F]$; $Q(\overline{\nu}_{q-k})$ – матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства постоянной матрицы $F_1(\overline{\nu}_{q-k})$, не содержащий $\operatorname{span} W^{(1)}(\overline{\nu}_{q-k})$.

Представим матрицы $W^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k})$ и $Q(\nu_{q-k})$ в блочном виде:

$$W^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k}) = [W_{s_k}^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k}), \ldots, W_0^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k})]^B,$$
$$Q(\overline{\nu}_{q-k}) = [Q_{s_k}(\overline{\nu}_{q-k}), \ldots, Q_0(\nu_{q-k})]^B,$$

где $W_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k})$ и $Q_i(\nu_{q-k})$, $i = s_k, \dots, 0$, суть блоки размеров $n \times \delta$ и $n \times d$, δ и d – число столбцов соответственно матриц $W^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k})$ и $Q(\nu_{q-k})$.

Наследственными пучками для матричного полинома $F(\mu_k; \overline{\mu}_{q-k})$ называются пучки следующих видов:

1) $D(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k}) = Q_+(\overline{\nu}_{q-k}) - \mu_k Q_-(\overline{\nu}_{q-k})$ есть пучок постоянных матриц $Q_+(\overline{\nu}_{q-k})$ и $Q_-(\overline{\nu}_{q-k})$, составленных из sn первых и sn последних строк матрицы $Q(\overline{\nu}_{q-k})$;

2) $\widetilde{D}(\mu_k; \overline{\mu}_{q-k}) = W_+(\overline{\mu}_{q-k}) - \mu_k W_-(\overline{\mu}_{q-k})$ есть пучок $(q-1)$-параметрических полиномиальных матриц $W_+(\overline{\mu}_{q-k})$ и $W_-(\overline{\mu}_{q-k})$, составленных соответственно из sn первых и sn последних строк матрицы $W^{(1)}(\overline{\mu}_{q-k})$.

§2. Метод наследственных пучков

2.1. Постановка задачи

Пусть $F := F(\mu_1, \dots, \mu_q) \in \mathcal{F}_\rho^{m \times n}$, $\rho < n$.

Задача состоит в вычислении точек конечного спектра (регулярного и сингулярного) матрицы F с использованием метода наследственных пучков.

Метод наследственных пучков является методом линеаризации матрицы F по одному (каждому) из параметров $\mu_1, \dots, \mu_q$ и применяется для вычисления точек спектра каждого из полиномов

$$F_{k,0} := F(\mu_k; \overline{\mu}_{q-k}) = \sum_{i=0}^{s_k} C_i^{(k,0)}(\overline{\mu}_{q-k}) \mu_k^i, \quad k = 1, \dots, q. \tag{2.1}$$

Здесь s_k – степень матричного полинома $F_{k,0}$, совпадающая с максимальной степенью параметра μ_k, входящего в элементы матрицы $F(\mu_1, \dots, \mu_q)$; $C_i^{(k,0)}(\overline{\mu}_{q-k})$, $i = 0, \dots, s_k$, есть $(q-1)$-параметрические полиномиальные матрицы, т.е. коэффициенты $F_{k,0}$. Метод наследственных пучков применяется для вычисления точек конечного спектра матричного полинома из (2.1). Объединение конечных спектров матричных полиномов $F_{k,0}$, $k = 1, \dots, q$, образует точки конечного спектра матрицы $F(\mu_1, \dots, \mu_q)$. Для определенности рассмотрим применение метода к матричному полиному

$$F_0 := F(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1}) = \sum_{i=0}^{s} C_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1}) \mu_1^i,$$

$$C_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1}) := C_i^{(0,1)}(\overline{\mu}_{q-1}), \quad s := s_1.$$

Применение метода к остальным матричным полиномам из (2.1) реализуется аналогично.

Метод наследственных пучков состоит из двух стадий. На первой стадии формируется последовательность $\{F_k\}$ из $(q-k)$-параметрических полиномиальных матриц, $k = 0, 1, \ldots, q-1$, которые связаны между собой некоторыми рекуррентными соотношениями. На второй стадии вычисляется конечный спектр рассматриваемого матричного полинома F_0; при этом используется последовательность $\{F_k\}$.

2.2. Построение $\{F_k\}$

Рассмотрим построение последовательности $\{F_k\}$ для матричного полинома F_0. Выполняются следующие операции.

(1) Полином $F_0 = F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1}) = \sum\limits_{i=0}^{s_1} C_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\mu_1^i$ записывается в виде

$$F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1}) = F_1(\overline{\mu}_{q-1})\Lambda_1(\mu_1),$$

где $F_1(\overline{\mu}_{q-1}) = [C_s^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1}), \ldots, C_0^{(1)}(\mu_{q-1})]$ есть $(q-1)$-параметрическая полиномиальная матрица размеров $m \times (s_1+1)n_1$, $n_1 = n$, $s_1 = s$; $\Lambda_1(\mu_1) = [\mu_1^{s_1} I_{n_1}, \ldots, \mu_1^0, I_{n_1}]^B$; I_{n_1} – единичная матрица.

(2) Матрица $F_1(\overline{\mu}_{q-1}) = F_1(\mu_2, \ldots, \mu_1)$ записывается в виде матричного полинома по степеням параметра μ_2:

$$F_1(\overline{\mu}_{q-1}) = \sum_{i=0}^{s_2} C_i^{(2)}(\mu_3, \ldots, \mu_q)\mu_2^i = F_2(\mu_3, \ldots, \mu_q)\Lambda_2(\mu_2),$$

где $F_2(\mu_3, \ldots, \mu_q) = [C_{s_2}^{(2)}(\mu_3, \ldots, \mu_q), \ldots, C_0^{(2)}(\mu_3, \ldots, \mu_q)]$, $\Lambda_2(\mu_2) = [\mu_2^{s_2} I_{n_2}, \ldots, \mu_2^0 I_{n_2}]^B$, $n_2 = (s_1+1)n_1$.

Процесс построения матриц $\{F_k\}$ продолжается аналогично. На шаге k будем иметь

$$F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_1) = \sum_{i=0}^{s_k} C_i^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)\mu_k^i = F_k(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)\Lambda_k(\mu_k),$$

$k = 1, \ldots, q$, где

$$F_k(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_1) = [C_{s_k}^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q), \ldots, C_0^{(k)}(\mu_{k+1}, \ldots, \mu_q)]$$

есть $(q-k)$-параметрическая полиномиальная $m \times (s_k+1)n_k$ матрица; $\Lambda_k(\mu_k) = [\mu_k^{s_k} I_{n_k}, \ldots, \mu_k^0 I_{n_k}]^B$.

2.3. Свойства матриц последовательности $\{F_k\}$

1°.

$$F_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_q) = F_k(\mu_{k+1},\dots,\mu_q)\Lambda_k(\mu_k), \quad k=1,\dots,q-1. \tag{2.2}$$

2°.

$$F_0(\mu_2,\dots,\mu_q) = F_k(\mu_{k+1},\dots,\mu_q)\Lambda^{(k)}(\mu_1,\dots,\mu_k), \tag{2.3}$$

где $\Lambda^{(k)}(\mu_1,\dots,\mu_k) = \Lambda_k(\mu_k)\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1})\cdots\Lambda_1(\mu_1)$.

Справедливость 1° и 2° следует из построения матриц последовательности $\{F_k\}$.

3°.

$$\begin{aligned} &\operatorname{span} Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k}) \subseteq \operatorname{span} \Lambda_k(\nu_k) Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k+1}), \\ &Q^{(k)}(\overline{\mu}_{q-k})x_k = \Lambda_k(\nu_n)Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k+1})x_{k-1}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Справедливость следует из (2.2) с учетом соотношения $\operatorname{span} Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k}) = \{N_c[F_k(\overline{\nu}_{q-k})] \setminus \operatorname{span} W^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})\}$.

4°.

$$Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})x_k = \Lambda^{(k)}(\nu_1,\dots,\nu_k)Q^{(0)}(\nu_1,\dots,\nu_q)x_0. \tag{2.5}$$

Действительно, из (2.2) имеем

$$0 = F_{k-1}(\nu_k;\overline{\nu}_{q-k})Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k+1}) = F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda_k(v_k)Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k+1}).$$

Отсюда, с учетом (2.4), следует цепочка равенств

$$\begin{aligned} Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})x_k &= \Lambda_k(\nu_k)Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k+1})x_{k-1} \\ &= \Lambda_k(\nu_k)\Lambda_{k-1}(\nu_{k-1})Q^{(q-2)}(\overline{\nu}_{q-k+2})x_{k-2} \\ &= \cdots = \Lambda_k(\nu_k)\Lambda_{k-1}(\nu_{k-1})\cdots\Lambda_1(\nu_1)Q^{(0)}x_0 \\ &\equiv \Lambda^{(k)}(\nu_1,\dots,\nu_k)Q^{(0)}x_0, \end{aligned}$$

где $\operatorname{span} Q^{(0)}(\nu_1,\dots,\nu_q) = N_c[F_0(\nu_1,\dots,\nu_q)]$.

5°.

$$\operatorname{span} W^{(k)}(\mu_{k+1},\dots,\mu_q) \supseteq \operatorname{span} \Lambda_k(\mu_k)W^{(k-1)}(\mu_k,\dots,\mu_q); \tag{2.6}$$

$$W^{(k)}(\mu_{k+1},\dots,\mu_q)Y_k = \Lambda_k(\mu_k)W^{(k-1)}(\mu_k,\dots,\mu_q)Y_{k-1}; \tag{2.7}$$

$$W^{(k)}(\mu_{k+1},\dots,\mu_q)\widetilde{Y} = \Lambda^{(k)}(\mu_k,\dots,\mu_q)W^{(0)}(\mu_1,\dots,\mu_q)\widetilde{Y}_0. \tag{2.8}$$

Свойство 5° устанавливается аналогично свойствам 3° и 4°.

6°. Пусть $\overline{\nu}_{q-k} = (\nu_{k+1},\dots,\nu_q)$ есть точка множества $\sigma_{r1}[F_k]$ и пусть выполняется соотношение $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$. Тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.1. *α) Для того, чтобы многообразие $(\nu_k, \overline{\nu}_{q-k}) = (\nu_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_q)$ принадлежало множеству $\sigma_{r1}[F_{k-1}]$, необходимо и достаточно, чтобы наследственный пучок $D_k(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k}) := Q_+^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k}) - \mu_k Q_-^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})$ имел собственные значения. Здесь ν_k – любое фиксированное собственное значение пучка $D(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$.*

β) Для того, чтобы многообразие ν_{q-k} принадлежало множеству $\sigma_{r2}[F_{k-1}]$, необходимо и достаточно, чтобы пучок $D_k(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$ не имел собственных значений.

Доказательство. Докажем необходимость пункта α). По условию, многообразие $\overline{\nu}_{q-k+1} = (\nu_k, \overline{\nu}_{q-k}) \equiv (\nu_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_q)$ есть точка регулярного спектра $\sigma_{r1}[F_{k-1}]$ матрицы $F_{k-1}(\mu_k, \dots, \mu_q)$, так что выполняются соотношения

$$F_{k-1}(\nu_k; \overline{\nu}_{q-k}) x_{k-1} = F_k(\overline{\nu}_{q-k}) \Lambda_k(\nu_k) x_{k-1} = 0;$$
$$x_{k-1} \in N_c[F_{k-1}(*)], \quad x_{k-1} \notin N_c[F_{k-1}]_*, \quad (*) = (\nu_k, \overline{\nu}_{q-k}).$$

Отсюда следует, что вектор $\Lambda_k(\nu_k) x_{k-1}$ принадлежит $\operatorname{span} Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})$, так что имеет место равенство

$$\Lambda_k(\nu_k) x_{k-1} = Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k}) y_k.$$

С учетом вида матрицы $\Lambda_k(\nu_k)$ имеем

$$[Q_+^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k}) - \nu_k Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})] y_k \equiv D_k(v_k; \overline{\nu}_{q-k}) y_k = 0, \quad y_k \neq 0.$$

Следовательно, пучок $D_k(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$ имеет ν_k своим собственным значением, ч. т. д.

Доказательство необходимости пункта β) проводится аналогично.

Докажем достаточность пункта α). Пусть ν_k есть любое фиксированное собственное значение наследственного пучка $D_k(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$, т.е. имеет место равнество $D_k(\nu_k; \overline{\nu}_{q-k}) y_k = 0$, $y_k \neq 0$. Запишем это равенство в развернутом виде, полагая $x_k := Q_{0k} y_k$:

$$\begin{aligned}
&Q_{0k} y_k = x_k;\\
&Q_{1k} y_k = \nu_k Q_{0k} y_k = \nu_k x_k;\\
&Q_{2k} y_k = \nu_k Q_{1k} y_k = \nu_k^2 Q_{0k} y_k = \nu_k^2 x_k\\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\\
&Q_{sk} y_k = \nu_k Q_{s-1,k} y_k = \dots = \nu_k^s x_k.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем $Q^{(k)}y_k = \Lambda_k(\nu_k)x_k$, так что вектор $\Lambda_k(\nu_k)x_k$ удовлетворяет равенству

$$0 = F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda_k(\nu_k)x_k = F_{k-1}(\nu_k;\overline{\nu}_{q-k})x_k,$$

при этом $x_k \notin N_c[F_{k-1}]_*$, так как $\Lambda_k(\nu_k)x_k \notin \operatorname{span} W^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})$. Следовательно, точка (ν_k, ν_{q-k}) принадлежит регулярному спектру матрицы $F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q)$. Учитывая, что все $q-k$ параметров рассматриваемой точки фиксированы, заключаем, что при выполнении условия $\sigma_r[F_{k-1}(*)] \cap \sigma_s[F_{k-1}] = \varnothing$ точка $(\nu_*, \overline{\nu}_{q-k}) = (\nu_k, \nu_{k+1}, \ldots, \nu_q)$ принадлежит множеству $\sigma_{r1}[F_{k-1}]$.

Справедливость утверждения α) установлена

Докажем достаточность пункта β). Пусть пучок $D_k(\mu_*;\overline{\nu}_{q-k})$ не имеет собственных значений и пусть при любом μ_k справедливо равенство

$$D_k(\mu_k;\overline{\nu}_{q-k})y_k(\mu_k) \equiv [Q_+^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k}) - \mu_k Q_-^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})]y_k(\mu_k) = 0.$$

Отсюда, как и при доказательстве пункта α), при $x_k(\mu_k) = Q_{0k}^{(k)}y_k(\mu_k)$ устанавливается справедливость равенства

$$\Lambda_k(\mu_k)x_k(\mu_k) = Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})y_k(\mu_k),$$

при этом вектор $\Lambda_k(\mu_k)x_k(\mu_k)$ не принадлежит $\operatorname{span} W^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})$, так как, по построению, $Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k}) \neq \mathbb{O}$. Следовательно, $x_k(\mu_k) \notin N_c[F_{k-1}]_*$, при этом имеет место равенство

$$0 = F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)x_k(\mu_k) = F_{k-1}(\mu_k;\overline{\nu}_{q-k})x_k(\mu_k).$$

Отсюда, с учетом условия $\sigma_{rs}[F_{k-1}] = \varnothing$, следует, что $x_k(\mu_k) \in N_c[F_{k-1}(*)]$, так что пара $\overline{\nu}_{q-k}$; $x_k(\mu_k)$ есть спектральная пара матрицы
$F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q)$, соответствующая точке $\overline{\nu}_{q-k}$ из множества $\sigma_{r2}[F_{k-1}]$, ч. т. д. Справедливость теоремы установлена.

7°. Пусть $\overline{\varkappa}_{q-k} = (\varkappa_{k+1}, \ldots, \varkappa_q)$ есть точка множества $\sigma_{s1}[F_k]$, не совпадающая с точками множества $\sigma_{r2}[F_{k-1}]$, и пусть выполняется соотношение $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$. Тогда имеют место следующие утверждения.

Теорема 2.2. α) *Для того, чтобы многообразие* $(\varkappa_k, \overline{\varkappa}_{q-k})$ *принадлежало множеству* $\sigma_{s1}[F_{k-1}]$, *необходимо и достаточно, чтобы наследственный пучок* $\widetilde{D}_k(\mu_k; \overline{\varkappa}_{q-k}) = W_+^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k}) - \mu_k W_-^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})$ *имел собственные значения. Здесь* $\varkappa_k$ *есть любое фиксированное собственное значение пучка* $\widetilde{D}_k(\mu_n; \overline{\varkappa}_{q-k})$.

β) *Для того, чтобы многообразие* $\overline{\varkappa}_{q-k}$ *принадлежало множеству* $\sigma_{s2}[F_{k-1}]$, *необходимо и достаточно, чтобы пучок* $\widetilde{D}_k(\mu_k; \overline{\varkappa}_{q-k})$ *не имел собственных значений.*

Доказательство. Докажем необходимость пункта α) теоремы. Пункт β) доказывается аналогично.

По условию, $(\varkappa_k, \overline{\varkappa}_{q-k}) \in \sigma_{s,1}[F_{k-1}]$, так что имеем

$$F_{k-1}(\varkappa_k; \overline{\varkappa}_{q-k})X_{k-1} = 0 = F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda_k(\varkappa_k)X_{k-1},$$

где

$$X_{k-1} \in N_c[F_{k-1}]_*.$$

Отсюда следует, что $\Lambda_k(\varkappa_k)X_{k-1} \in \operatorname{span} W^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})$, так что имеет место равенство

$$\Lambda_k(\varkappa_k)X_{k-1} = W^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})Y_k. \tag{2.9}$$

Из (2.9), с учетом вида матрицы $\Lambda_k(\varkappa_k)$, имеем

$$[W_+^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k}) - \varkappa_k W_-^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})]Y_k = 0, \quad Y_k \neq 0.$$

Таким образом, $\varkappa_k$ есть собственное значение наследственного пучка $\widetilde{D}_k(\mu_k; \overline{\varkappa}_{q-k})$, ч. т. д.

Докажем достаточность пункта α). Пусть $\varkappa_k$ есть фиксированное собственное значение наследственного пучка $\widetilde{D}_k(\mu_k; \overline{\varkappa}_{q-k})$, т. е. имеет место равенство

$$[W_+^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k}) - \varkappa_k W_-^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})]Y_k = 0, \quad Y_k \neq 0.$$

Запишем это равенство в развернутом виде, полагая $X_k = W_{0k}(\overline{\varkappa}_{q-k})Y_k$: $W_{0k}Y_k = X_k$; $W_{1k}Y_k = \varkappa_k W_0^{(k)} Y_k = \varkappa_k X_k$; $W_{2k}Y_k = \varkappa_k W_{1k}Y_{1k} = \varkappa_k^2 X_k$; $\ldots$; $W_{s_k,k}Y_n = \varkappa_k W_{s_k-1,k}Y_k = \cdots = \varkappa_k^{s_k} Y_k$.

Отсюда имеем

$$W^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})Y_k = \Lambda_k(\varkappa_k)X_k,$$

так что вектор $\Lambda_k(\varkappa_k)X_k$ удовлетворяет равенству

$$0 = F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda_k(\varkappa_k)X_k = F_{k-1}(\varkappa_k;\overline{\varkappa}_{q-k})X_k. \tag{2.10}$$

По условию, многообразие $\overline{\varkappa}_{q-k}$ не является точкой регулярного спектра множества $\sigma_{r2}[F_{k-1}]$ матрицы $F_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_q)$, так что в равенстве (2.10) вектор X_k не принадлежит $N_c[F_{k-1}(*)]$, где $(*) = (\mu_k,\overline{\varkappa}_{q-k})$. Тогда, с учетом соотношения $\sigma_{rs}[F_{k-1}] = \varnothing$, имеем $X_k \in N_c[F_{k-1}]_*$. Из сказанного следует, что пара $(\varkappa_k,\overline{\varkappa}_{q-k});X_k$ является спектральной парой для $F_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_q)$, соответствующей точке $(\varkappa_k,\overline{\varkappa}_{q-k}) \in \sigma_{s1}[F_{k-1}]$, ч. т. д.

Докажем справедливость утверждения пункта β). Пусть пучок $\widetilde{D}_k(\mu_k;\overline{\varkappa}_{q-k})$ не имеет собственых значений и пусть имеет место равенство

$$[W_+^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k}) - \mu_k W_-^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})]Y_k(\mu_k) = 0,$$

справедливое для любого μ_k. Как и при доказательстве пункта α), при выборе $X_k(\mu_k)$ в виде $X_k(\mu_k) = W_{0k}^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})Y_k(\mu_k)$ устанавливаем справедливость равенства $W^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})Y_k(\mu_k) = \Lambda_k(\mu_k)X_k(\mu_k)$, так что имеем

$$0 = F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)X_k(\mu_k) = F_{k-1}(\mu_k,\overline{\varkappa}_{q-k})X_k(\mu_k). \tag{2.11}$$

По условию, многообразие $\overline{\varkappa}_{q-k}$ не принадлежит $\sigma_{r2}[F_k(*)]$, так что, поскольку $\sigma_{rs}[F_{k-1}] = \varnothing$, вектор X_k из (2.11) удовлетворяет соотношениям

$$X_k(\mu_k) \notin N_c[F_{k-1}(*)], \quad X_k(\mu_k) \in N_c[F_{k-1}]_*, \quad (*) = (\mu_k,\overline{\varkappa}_{q-k}).$$

Из сказанного следует, что $\overline{\varkappa}_{q-k}$; $X_k(\mu_k)$ есть спектральная пара матрицы $F_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_q)$, соответствующая точке $\overline{\varkappa}_{q-k}$ из множества $\sigma_{s2}[F_{k-1}]$, ч. т. д.

Теорема 2.3. *Пусть $\overline{\nu}_{q-k}$ есть точка множества $\sigma_r[F_k]$. Тогда при $k = 0$ многообразие $\nu_q = (\nu_1,\dots,\nu_q)$ есть точка множества $\sigma_{r1}[F_0]$;*

при $k>0$ *многообразие* $\overline{\nu}_{q-k}=(\nu_{k+1},\dots,\nu_q)$ *есть точка множества* $\sigma_{r2}[F_0]$.

Доказательство. По условию, $F_k(\overline{\nu}_{q-k})x=0$, $\overline{\nu}_{q-k}\in\sigma_{r1}[F_k]$, $x\notin N_c[F_k]_*$, $x\in N_c[F_k(*)]$, т.е. $x=Q^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})x_k$. Отсюда, с учетом (2.4), имеем $x=\Lambda_k(\mu_k)Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k})x_{k-1}$, так что, с учетом (2.2), в точке $\overline{\nu}_{q-k}$ выполняется равенство

$$0=F_{k-1}(\mu_k;\overline{\nu}_{q-k})Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k})x_{k-1}=F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)Q^{(k-1)}(\overline{\nu}_{q-k})x_{k-1}.$$

Принимая во внимание (2.4) и (2.5), мы выводим

$$\begin{aligned}0&=F_{k-1}(\mu_k;\overline{\nu}_{q-k})Q^{(k-1)}x_{k-1}=F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)Q^{(k-1)}x_{k-1}\\&=F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1})Q^{(k-2)}x_{k-2}\\&=\dots=F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1})\cdots\Lambda_1(\mu_1)Q^{(0)}x_0\\&=\Lambda^{(k)}(\mu_1,\dots,\mu_k)Q^{(0)}x_0.\end{aligned}$$

Обозначим $\tilde{x}_0:=Q^{(0)}x_0$. Тогда, с учетом (2.4), имеем

$$0=F_k(\overline{\nu}_{q-k})\Lambda^{(k)}\tilde{x}_0=F_0(\mu_1,\dots,\mu_k,\overline{\nu}_{q-k})\tilde{x}_0.$$

Отсюда $\overline{\nu}_{q-k}\in\sigma_r[F_0]$: $\overline{\nu}_q\in\sigma_{r1}[F_0]$ при $k=0$; $\overline{\nu}_{q-k}\in\sigma_{r2}[F_0]$ при $k>0$, ч. т. д.

9°. **Теорема 2.4.** *Пусть* $\overline{\varkappa}_{q-k}\in\sigma_s[F_k]$. *Тогда* $\overline{\varkappa}_q=(\varkappa_1,\dots,\varkappa_q)\in\sigma_{s1}[F_0]$ *при* $k=0$, $\overline{\varkappa}_{q-k}=(\varkappa_{k+1},\dots,\varkappa_q)\in\sigma_{s2}[F_0]$ *при* $k>0$.

Доказательство. По условию, $F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})Y_k=0$, $Y_k\in\operatorname{span}W^{(k)}(\overline{\varkappa}_{q-k})\equiv N_c[F_k]_*$. С учетом (2.2), в точке $\overline{\varkappa}_{q-k}$ имеем

$$\begin{aligned}&F_{k-1}(\mu_k;\overline{\varkappa}_{q-k})W^{(k-1)}(\mu_k,\dots,\mu_q)=0\\&\quad=F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)W^{(k-1)}(\mu_k,\dots,\mu_q).\end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание (2.7) и (2.8), находим

$$\begin{aligned}0&=F_{k-1}(\mu_k;\overline{\varkappa}_{q-k})W^{(k-1)}(\mu_k,\dots,\mu_q)Y_{k-1}\\&=F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda_x(\mu_k)W^{(k-1)}(\mu_k,\dots,\mu_q)Y_{k-1}\\&=F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda_k(\mu_k)\Lambda_{k-1}(\mu_{n-1})W^{(k-2)}(\mu_{k+1},\dots,\mu_q)Y_{k-2}=\cdots\\&=F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda^{(k)}W^{(0)}(\mu_1,\dots,\mu_q)Y_0,\\\Lambda^{(k)}&=\Lambda_k(\mu_k)\Lambda_{k-1}(\mu_{k-1})\Lambda_1(\mu_1).\end{aligned}$$

Обозначим $\widetilde{Y}_0 := W^{(0)}(\mu_1, \ldots, \mu_q)Y_0$. Тогда имеем

$$0 = F_k(\overline{\varkappa}_{q-k})\Lambda^{(k)}(\mu_1, \ldots, \mu_k)\widetilde{Y}_0 = F_0(\mu_1, \ldots, \mu_q)\widetilde{Y}_0,$$

где $\overline{\varkappa}_q = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_q) \in \sigma_{s1}[F_0]$ при $k = 0$; $\overline{\varkappa}_{q-k} \in \sigma_{s2}[F_0]$ при $k > 0$, ч. т. д.

Следствие 2.5. *Если $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$, $\overline{\nu}_{q-k} \in \sigma_{r1}[F_k]$, то регулярный спектр наследственного пучка $D_k(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$ совпадает с регулярным спектром матрицы $F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q)$.*

Справедливость следует из теоремы 2.1.

Следствие 2.6. *Если $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$, $\overline{\varkappa}_{q-k} \in \sigma_{s1}[F_k]$, то регулярный спектр наследственного пучка $\widetilde{D}(\mu_k; \overline{\varkappa}_{q-k})$ совпадает с сингулярным спектром матрицы $F_{k-1}(\mu_k, \ldots, \mu_q)$.*

Справедливость следует из теоремы 2.2.

Следствие 2.7. *Если $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$, то $\sigma_{rs}[F_k] = \varnothing$ для любого $k = 0, 1, \ldots, q-1$.*

Справедливость следует из теорем 2.3 и 2.4.

2.4. Алгоритмы вычисления точек конечного спектра матричных полиномов

Вторая стадия метода наследственных пучков для вычисления точек конечного спектра матрицы $F(\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\rho < n$, состоит в вычислении точек спектра последовательности $\{F_k\}$, соответствующей рассматриваемому матричному полиному из (2.1). Вычисление точек регулярного и сингулярного спектров рассмотрим раздельно в предположении, что условие непересечения точек регулярного и сингулярного спектров выполнятся как для заданной матрицы $F(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ (а следовательно, для всех матричных полиномов из (2.1)), так и (с учетом следствия 2.7) для каждой матрицы F_k из последовательности $\{F_k\}$.

2.4.1. Алгоритм вычисления точек множеств $\sigma_{r1}[F_0]$ и $\sigma_{r2}[F_0]$

Пусть $\{F_k\}$ есть фиксированная последовательность матриц, составленная по коэффициентам матричного полинома $F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1})$, так что имеют место равенства

$$F_{k-1}(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1}) = F_k(\overline{\mu}_{q-1})\Lambda_1(\mu_1), \quad k = 1, \ldots, q.$$

Задача состоит в вычислении точек регулярного спектра матричного полинома $F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1})$. Теоретической базой для предлагаемого ниже алгоритма является следствие 2.5.

Рассмотрим построение замкнутых, неприводимых многообразий, образующих точки регулярного спектра матричного полинома $F_0(\mu_1; \overline{\mu}_{q-1})$. Вычисление параметров типичного из искомых многообразия $\overline{\nu}_{q-p} = (\nu_{p+1}, \dots, \nu_q)$ проводится в последовательности ν_q, $\nu_{q-1}, \dots, \nu_{p+1}$. Каждый шаг алгоритма вычисляет один из параметров многооразия $\overline{\nu}_{q-p}$.

Для определения ν_q выполняются следующие операции.

(1) Вычисляются собственные значения однопараметрической полиномиальной матрицы $F_{q-p}(\mu_q)$ из рассматриваемой последовательности $\{F_k\}$. С этой целью выполняются следующие операции.

(1.1) Матрица $F_{q-1}(\mu_q)$ представляется в виде

$$F_{q-1}(\mu_q) = \sum^{s_q} C_i^{(q)} \mu_q^i = F_1 \Lambda_1(\mu_q),$$

где $F_1 = [C_s^{(q)}, \dots, C_0^{(q)}]$ – постоянная $m \times (s_q+1) n_q$ матрица, $\Lambda_1(\mu_q) = [\mu_1^{s_q} I_{n_q}, \dots, \mu_1^0 I_{n_q}]^B$, n_q – число столбцов в коэффициентах $C_i^{(q)}$.

(1.2) Формируется наследственный пучок $D_q(\mu_q) = Q_+^{(q)} - \mu_q Q_-^{(q)}$ постоянных матриц $Q_+^{(q)}$ и $Q_-^{(q)}$, составленных из $s_q n_q$ первых и $s_q n_q$ последних строк матрицы $Q^{(q)}$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы F_1.

(1.3) Вычисляются собственные значения пучка $D_q(\mu_q)$. В качестве искомого параметра ν_q берется любое (каждое) фиксированное собственное значение пучка $D_q(\mu_q)$.

Пусть вычислены параметры ν_q, $\nu_{q-1}, \dots, \nu_{k-1}$. Для вычисления параметра ν_k следует выполнить следующие шаги.

(1) Вычислить однопараметрическую полиномиальную матрицу $F_{k-1}(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k}) \equiv F_{k-1}(\mu_k, \nu_{k+1}, \dots, \nu_q)$, где $F_{k-1}(\mu_k, \dots, \mu_n)$ есть матрица из рассматриваемой последовательности $\{F_k\}$.

(2) Найти собственные значения матрицы $F_{k-1}(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$.

С этой целью для $F_{k-1}(\mu_k; \overline{\nu}_{q-k})$ нужно выполнить операции вида (1.1)–(1.3).

В качестве искомого параметра ν_k берется любое фиксированное собственное значение наследственного пучка $D_k(\mu_k) = Q_+^{(k)} - \mu_k Q_-^{(k)}$ постоянных матриц $Q_+^{(k)} = Q_+^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})$ и $Q_-^{(k)} = Q_-^{(k)}(\overline{\nu}_{q-k})$.

Процесс вычисления параметров многообразия $\overline{\nu}_{q-p}$ заканчивается на некотором шаге p, когда пучок $D_{p-1}(\mu_p;\overline{\nu}_{q-p})$ (или, что то же самое, матрица $F_{p-1}(\mu_p;\overline{\nu}_{q-p})$) не будет иметь собственных значений.

Результатом выполнения p шагов алгоритма будет искомое многообразие $\overline{\nu}_{q-p}$, которое при $p = 0$ – точку множества $\sigma_{r1}[F_0]$, а при $p > 0$ образует точку множества $\sigma_{r2}[F_0]$.

Используя вычисленные собственные значения матриц $F_{k-1}(\mu_k;\overline{\nu}_{q-k})$ при $k = q$, $q-1, \dots, 1$, аналогично находим другие точки, образующие множества $\sigma_{r1}[F_0]$ и $\sigma_{r2}[F_0]$, соответствующие рассматриваемой последовательности $\{F_k\}$.

Замечание. В алгоритме вычисления собственных значений однопараметрической полиномиальной матрицы общего вида был использован метод наследственных пучков [1]. Очевидно, для решения задачи можно применить любой метод вычисления собственных значений однопараметрической полиномиальной матрицы общего вида.

2.4.2. Алгоритм вычисления точек множеств $\sigma_{s1}[F_0]$ и $\sigma_{s2}[F_0]$

Пусть $F_0(\mu_1;\overline{\mu}_{q-1}) = \sum\limits_{i=0}^{s} C_i^{(1)}(\overline{\mu}_{q-1})\mu_1^i$ – матричный полином, для которого следует вычислить сингулярный спектр с использованием метода наследственных пучков; пусть $\{F_k\}$ – последовательность $(q-k)$-параметрических матриц, сформированная по коэффициентам $F_0(\mu_1;\mu_{q-1})$ на первой стадии алгоритма наследственных пучков. Имеют место равенства

$$F_{k-1}(\mu_k,\dots,\mu_q) = F_k(\mu_{k+1},\dots,\mu_q)\Lambda_1(\mu_k), \quad k = 1,\dots,q.$$

Теоретической базой предлагаемого ниже алгоритма решения задачи является следствие 2.6.

Рассмотрим построение одного (типичного) замкнутого неприводимого многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p} = (\varkappa_{p+1},\dots,\varkappa_q)$, образующего точку сингулярного спектра матричного полинома $F_0(\mu_1;\mu_{q-1})$. Другие многообразия, решающие задачу, строятся аналогично.

Алгоритм вычисления $\overline{\varkappa}_{q-p}$ состоит из конечного числа шагов и вычисляет параметры, входящие в $\overline{\varkappa}_{q-p}$, в последовательности $\varkappa_q$, $\varkappa_{q-1},\dots,\varkappa_{p+1}$. На первом шаге алгоритма вычисляются параметры $\varkappa_q$ и $\varkappa_{q-1}$. Каждый последующий шаг, начиная со второго, вычисляет один из искомых параметров.

Первый шаг алгоритма вычисляет точки множества $\sigma_{s1}[F_{q-2}]$ двухпараметрической полиномиальной матрицы $F_{q-2}(\mu_{q-1};\mu_q)$ из рассматриваемой последовательности $\{F_k\}$. Задача решается любым из алгоритмов вычисления точек конечного сингулярного спектра двухпараметрической полиномиальной матрицы. Здесь рассматривается алгоритм, предложенный в [2].

Выполняются следующие операции.

(1) Матрица $F_{q-2}(\mu_{q-1};\mu_q)$ записывается в виде матричного полинома по одному из параметров, скажем, по параметру μ_{q-1}:

$$F_{q-2}(\mu_{q-1};\mu_q) = \sum_{i=0}^{s_{q-1}} C_i^{(q-1)}(\mu_q)\mu_{q-1}^i = F_1^{(q-1)}(\mu_q)\Lambda_1(\mu_{q-1}),$$

где

$$F_1^{(q-1)}(\mu_q) = [C_{s_{q-1}}^{(q-1)}(\mu_q), \ldots, C_0^{(q-1)}(\mu_q)],$$
$$\Lambda_1(\mu_{q-1}) = [\mu_{q-1}^{s_{q-1}} I_{n_{q-1}}, \ldots, \mu_{q-1}^0 I_{n_{q-1}}]^B,$$

n_{q-1} есть число столбцов в $C_i^{(q-1)}(\mu_q)$.

(2) Находится матрица $W^{(q-1)}(\mu_q)$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства $N_c[F_1^{(q-1)}]$, и формируется наследственный пучок

$$W_+^{(q-1)}(\mu_q) - \mu_{q-1} W_-^{(q-1)}(\mu_q) = \widetilde{D}(\mu_{q-1};\mu_q).$$

(3) Вычисляются все различные точки собственного регулярного спектра пучка $\widetilde{D}(\mu_{q-1};\mu_q)$. Для этой цели можно использовать любой алгоритм вычисления регулярного спектра двухпараметрической полиномиальной матрицы. Используем, например, алгоритм из [2]. Выполняются следующие операции.

(3.1) Формируется однопараметрическая полиномимаьлная матрица $[-W^{(q-1)}(\mu_q), W_+^{(q-1)}(\mu_q)]$ и находятся все ее различные собственные значения, не совпадающие с собственными значениями матрицы $F_1^{(q-1)}(\mu_q)$.

(3.2) Для любого фиксированного собственного значения (обозначим его $\varkappa_q$) вычисляется наследственный пучок $D(\mu_{q-1};\varkappa_q) = Q_+(\varkappa_q) - \mu_{q-1} Q_-(\varkappa_q)$.

(3.3) Вычисляются все различные собственные значения пучка $D(\mu_{q-1};\varkappa_q)$. Любое фиксированное собственное значение берется в качестве параметра $\varkappa_{q-1}$.

Так вычисленное многообразие $(\varkappa_{q-1}, \varkappa_q)$ является фиксированной точкой сингулярного спектра $\sigma_{s1}[F_{q-2}]$ матрицы $F_{q-2}(\mu_{q-1}; \mu_q)$.

Второй (типичный) шаг вычисления параметров многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p}$ состоит в выполнении следующих операций.

(1) Вычисляется однопараметрическая полиномиальная матрица $F_{q-3}(\mu_{q-2}, \varkappa_{q-1}, \varkappa_q)$, где $F_{q-3}(\mu_{q-2}, \mu_{q-1}, \mu_q)$ есть матрица из последовательности $\{F_k\}$.

(2) Вычисляются все различные собственные значения однопараметрической полиномиальной матрицы $F_{q-3}(\mu_{q-2}, \varkappa_{q-1}, \varkappa_q)$.

Тогда многообразие $(\varkappa_{q-2}, \varkappa_{q-1}, \varkappa_q)$, где $\varkappa_{q-3}$ – любое фиксированное собственное значение матрицы $F_{q-3}(\mu_{q-2}, \varkappa_{q-1}, \varkappa_q)$, образует точку множества $\sigma_{s1}[F_{q-3}]$.

Процесс построения параметров искомого многообразия $\overline{\varkappa}_{q-p}$ продолжается аналогично, пока на некотором шаге p не будет построена матрица $F_{q-p+1}(\mu_p, \varkappa_{p+1}, \dots, \varkappa_q)$, не имеющая собственных значений.

Результатом выполнения p шагов алгоритма является многообразие $\overline{\varkappa}_{q-p} = (\varkappa_{p+1}, \dots, \varkappa_q)$, которое при $p = 0$ образует точку множества $\sigma_{s1}[F_0]$, а при $p > 0$ – точку множества $\sigma_{s2}[F_0]$.

Аналогично вычисляются все другие замкнутые неприводимые многообразия аффинного пространства, порожденные последовательностью матриц $\{F_k\}$.

Вычисленные многообразия в совокупности образуют все точки множеств $\sigma_{s1}[F_0]$ и $\sigma_{s2}[F_0]$.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц*. 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 121–144.
2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц*. 8. — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 150–167.

Kublanovskaya V. N. To solving spectral problems for q-parameter polynomial matrices.

The method of hereditary pencils, originally suggested by the author for solving spectral problems for two-parameter matrices (pencils of matrices), is extended to the case of q-parameter, $q \geqslant 2$, polynomial matrices. Algorithms for computing points of the finite regular and singular spectra of a q-parameter polynomial matrix and their theoretical justification are presented.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 15 июня 2010 г.