Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

В. Н. Кублановская

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ. 8

В статье продолжаются исследования метода наследственных пучков [2] для решения спектральных задач для двухпараметрических полиномиальных матриц общего вида. Приводится теоретическое обоснование метода и алгоритмы его реализации для вычисления точек регулярного и сингулярного спектров матрицы и им соответствующих спектральных векторов.

§1. Некоторые сведения о двухпараметрических полиномиальных матрицах

Пусть $F(\mu_1, \mu_2)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица ранга ρ: $F(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Метод наследственных пучков для вычисления точек конечного спектра матрицы $F(\mu_1, \mu_2)$ является методом линеаризации по одному (каждому) из параметров μ_1 и μ_2. Решение спектральных задач для $F(\mu_1, \mu_2)$ сводится к вычислению конечных спектров двух матриц (матричных полиномов) вида $F(\lambda; \mu) = \sum\limits_{k=0}^{s_1} C_k(\mu)\lambda^k$ и $\widetilde{F}(\mu; \lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s_2} \tilde{C}_k(\lambda)\mu^k$. Вычисление конечных спектров матриц $F(\lambda; \mu)$ и $\widetilde{F}(\mu; \lambda)$ проводится по одной и той же схеме. В дальнейшем для определенности мы будем рассматривать матрицу $F(\lambda; \mu)$ и вычислять только правые спектральные характеристики. Для вычисления левых спектральных характеристик достаточно перейти к матрице $F^T(\lambda; \mu)$.

1.1. Точки конечного спектра и спектральные пары матрицы $F(\lambda; \mu)$

Конечным спектром $\sigma[F]$ матрицы $F(\lambda; \mu)$ называется множество замкнутых неприводимых многообразий аффинного пространства

Ключевые слова: двухпараметрическая матрица, пучок постоянных матриц, пучок полиномиальных матриц, наследственные пучки, спектр регулярный, сингулярный.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

$\mathbb{C}^2$, в точках которых уравнение $F(\lambda;\mu)x = 0$ имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее приведенным ниже условиям. Конечный спектр $\sigma[F]$ представим в следующем виде:

$$\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma_s[F] \cup \sigma_{rs}[F], \tag{1.1}$$

где $\sigma_r[F] = \sigma_{r1}[F] \oplus \sigma_{r2}[F]$, $\sigma_s[F] = \sigma_{s1}[F] \oplus \sigma_{s2}[F]$ и $\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$ – конечные регулярный, сингулярный и регулярно-сингулярный спектры матрицы $F(\lambda;\mu)$ соответственно.

Собственно регулярный спектр $\sigma_{r1}[F]$ есть множество многообразий вида $(*) := (\nu_1, \nu_2)$, удовлетворяющих условиям

$$F(\nu_1;\nu_2)x_* = 0, \quad x_* \in \{N_c[F(*)] \backslash N_c[F]_*\}. \tag{1.2}$$

Здесь $x_* \neq 0$ – постоянный вектор.

Смешанный регулярный спектр $\sigma_{r2}[F]$ есть множество вида $(*) := (\lambda, \nu_2)$, удовлетворяющее условиям

$$F(\lambda;\nu_2)x(\lambda) = 0, \quad x(\lambda) \in \{N_c[F(*)] \backslash N_c[F]_*\}, \tag{1.3}$$

причем однопараметрическая полиномиальная матрица $F(\lambda;\nu_2)$ не имеет собственных значений.

Собственно сингулярный спектр $\sigma_{s1}[F]$ есть множество многообразий вида $(*) := (\varkappa_1, \varkappa_2)$, удовлетворящих условиям

$$F(\varkappa_1;\varkappa_2)y_* = 0, \quad y_* \neq 0, \quad y_* \in N_c[F]_*. \tag{1.4}$$

Смешанный сингулярный спектр $\sigma_{s2}[F]$ есть множество вида $(*) = (\lambda, \varkappa_2)$, удовлетворяющее условиям

$$F(\lambda_1;\varkappa_2)y(\lambda) = 0, \quad y(\lambda) \in N_c[F]_*, \tag{1.5}$$

причем однопараметрическая полиномиальная матрица $F(\lambda;\varkappa_2)$ не имеет собственных значений.

Регулярно-сингулярный спектр $\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F]$ есть множество многообразий $(*)$, удовлетворяющих условиям

$$F(*)z = 0, \quad z \in \{N_c[F(*)] \cap N_c[F]_*\}. \tag{1.6}$$

В дальнейшем пару, состоящую из точки спектра и спектрального вектора, удовлетворяющего уравнению $F(*)x = 0$, будем называть спектральной парой матрицы $F(\lambda;\mu)$. Пара $(\nu_1,\nu_2);x_*$, удовлетворяющая условиям (1.2), называется собственной парой матрицы $F(\lambda;\mu)$: точка $(\nu_1,\nu_2)\in\sigma_{r1}[F]$ называется собственным значением $F(\lambda;\mu)$, а соответствующий ей вектор x_* называется собственным вектором.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что выполнено условие

$$\sigma_{rs}[F]=[\sigma_r[F]\cap\sigma_s[F]=\varnothing. \tag{1.7}$$

Заметим, что выполнение условия (1.7) равносильно выполнению в точках $(*)$ спектра $\sigma[F]$ условия

$$\{N_c[F(*)]\cap N_c[F]_*\}=\varnothing. \tag{1.8}$$

Заметим также, что при выполнении условия (1.8) условие $x_*\in\{N_c[F(*)]\backslash N_c[F]_*\}$ равносильно выполнению условия $x_*\in N_c[F(*)]$, $x_*\notin N_c[F]_*$.

Проверка выполнения условия (1.8) в рассматриваемой точке $(*)$ спектра $\sigma[F]$ не предполагает проверки ее принадлежности множествам $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$. Для проверки (1.8) выполняются следующие операции.

(1) Находятся не содержащие регулярных спектров базисные матрицы U и V подпространств $N_c[F(*)]$ и $N_c[F]_*$, для чего используются алгоритмы ΔW-факторизации.

(2) Формируется матрица $M=\begin{bmatrix}U\\V\end{bmatrix}$ (в том случае, когда матрицы U и V имеют различное число столбцов, соответствующая матрица пополняется нулевыми столбцами).

(3) Вычисляется базис нуль-пространства $N_c[M]$. Если $N_c[M]$ состоит только из нулевого столбца, то рассматриваемая точка $(*)$ не принадлежит $\sigma_{rs}[F]$. В противном случае точка $(*)$ принадлежит множеству $\sigma_{rs}[F]$, т.е. условие (1.7) не выполняется.

Для реализации операций (1)–(3) можно, например, использовать алгоритмы ΔW-факторизации для одно- и двухпараметрических матриц [3, 1].

1.2. Наследственные пучки

Пусть $F(\lambda;\mu)=\sum\limits_{k=0}^{s}C_k(\mu)\lambda^k\in\mathcal{F}_\rho^{m\times n}$. Представим $F(\lambda;\mu)$ в виде

$$F(\lambda;\mu)=F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda),$$

где $F_1(\mu) = [C_s(\mu), \dots, C_0(\mu)]$ – однопараметрическая полиномиальная $m \times (s+1)n$ матрица; $\Lambda_1(\lambda) = [\lambda^s I_n, \dots, I_n]^B$, I_n – единичная $n \times n$ матрица.[1]

Наследственными пучками для матрицы $F(\lambda;\mu)$ называются пучки следующих видов.

1) Пучок полиномиальных матриц $\widetilde{D}(\lambda;\mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$, где матрицы $W_+(\mu)$ и $W_-(\mu)$ составлены соответственно из ns первых и ns последних строк $(s+1)n \times d_1$ матрицы $W^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис (базис, не имеющий конечного регулярного спектра) правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu)$; d_1 – число столбцов матрицы $W^{(1)}(\mu)$. Представим матрицу $W^{(1)}(\mu)$ в блочном виде $W^{(1)}(\mu) := [W_{0s}(\mu), \dots, W_{00}(\mu)]^B$ с блоками $W_{0k}(\mu)$, $k = s, \dots, 0$, размеров $n \times d_1$.

2) Пучок $D(\lambda;\nu_2) = Q_+(\nu_2) - \lambda Q_-(\nu_2)$, где $Q_+(\nu_2)$ и $Q_-(\nu_2)$ – матрицы, составленные соответственно из ns первых и ns последних строк $(s+1)n \times d$ матрицы $Q(\nu_2)$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\nu_2)$. Здесь ν_2 есть фиксированное собственное значение матрицы $F_1(\mu)$; d – число столбцов матрицы $Q(\nu_2)$. При этом $\operatorname{span} Q(\nu_2)$ не содержит $\operatorname{span} W^{(1)(\nu_2)}$. Представим матрицу $Q(\nu_2)$ в блочном виде $[Q_{0s}(\nu_2), \dots, Q_{00}(\nu_2)]^B$ с блоками $Q_{0k}(\nu_2)$, $k = s, \dots, 0$, размеров $n \times d$.

1.3. Метод наследственных пучков

Метод наследственных пучков применяется для вычисления точек регулярного и сингулярного спектров и им соответствующих спектральных векторов для двухпараметрических полиномиальных матриц общего вида с заданным (выбранным) спектральным параметром, т.е. для матричного полинома $F(\lambda;\mu) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k$.

Решение упомянутых выше спектральных задач этот метод сводит к решению спектральных задач для наследственных пучков. При этом вычисление точек регулярного спектра матрицы $F(\lambda;\mu)$ сводится к решению классических задач: вычислению различных собственных значений однопараметрической полиномиальной матрицы и пучков постоянных матриц. Вычисление точек сингулярного спектра $F(\lambda;\mu)$ сводится к вычислению точек регулярного спектра пучка полиномиальных матриц. Последний может рассматриваться как двухпара-

[1]Здесь и ниже символ $[,]^B$ обозначает блочное транспонирование: $[C,\, D]^B = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}$.

метрическая полиномиальная матрица, линейно зависящая от спектрального параметра.

§2. Метод наследственных пучков для вычисления точек регулярного спектра

2.1. Теоретические предпосылки

Задача состоит в вычислении точек множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$ и им соответствующих спектральных векторов с помощью метода наследственных пучков. Представим $F(\lambda;\mu) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$ в виде

$$F(\lambda;\mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda). \tag{2.1}$$

Здесь $F_1(\mu) = [C_s(\mu), \dots , C_0(\mu)]$ есть однопараметрическая полиномиальная $m\times(s+1)n$ матрица; матрица $\Lambda_1(\lambda) := [\lambda^s I_n, \dots , I_n]^B$ имеет размеры $(s+1)n \times n$; I_n – единичная $n \times n$ матрица. Обозначим через ν_2 любое фиксированное собственное значение матрицы $F_1(\mu)$. Применение метода наследственных пучков к решению поставленной задачи проведем в предположении, что выполнены условия

$$\sigma_{rs}[F] = \sigma_r[F] \cap \sigma_s[F] = \varnothing \tag{2.2}$$

или (что то же самое) $\{N_c[F(*) \cap N_c[F]_*\} = \varnothing$.

Установим связь между решениями следующих уравнений:

$$F_1(\nu_2)y = 0 \quad (\alpha); \qquad F(\lambda;\nu_2)x = 0 \quad (\beta); \qquad D(\lambda;\nu_2)y = 0 \ (\gamma).$$

Лемма 2.1. *Между решениями $y_1(\lambda) = \Lambda_1(\lambda)x_1$ и $x = x_1$ соответственно уравнений (α) и (β) существует взаимно однозначное соответствие. В частности, вектору $x_1 = W_0(\lambda,\nu_2)\eta \in N_c[F]_*$ взаимно однозначно соответствует вектор $y_1 = \Lambda_1(\lambda)W_0(\lambda,\nu_2)\eta \in N_c[F_1]_*$. Здесь* $\operatorname{span} W_0(\lambda,\mu) = N_c[F]$.

С учетом (2.1), справедливость леммы следует из равенства

$$F(\lambda;\nu_2)x_1 = F_1(\nu_2)\Lambda_1(\lambda)x_1.$$

Лемма 2.2. *Если* $y_1 = \Lambda_1(\lambda)x_1$ *есть решение уравнения* (α), *то* $y_1 = \Lambda_1(\lambda)x_1 \in \operatorname{span} Q(\nu_2)$, $y_1 \notin \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2)$.

Действительно, столбцы матрицы $Q(\nu_2)$, по определению, образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\nu_2)$, не содержащего $\operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2)$, так что $\operatorname{span} Q(\nu_2)$ есть подпространство из спектральных векторов, соответствующих собственному значению ν_2 матрицы $F_1(\mu)$. Что и требовалось доказать.

Лемма 2.3. *Каждому решению* $y_1 = \Lambda_1(\lambda)x_1$ *уравнения* (α) *соответствует*

а) *спектральная пара* $\nu_2; x_1$ *матрицы* $F(\lambda;\mu)$, *где* $\nu_2 \in \sigma_{r2}[F]$, *если матрица* $F(\lambda,\nu_2)$ *не имеет собственных значений;*

б) *спектральная пара* $(\nu_1,\nu_2); x_*$ *матрицы* $F(\lambda;\mu)$, *где* $(\nu_1,\nu_2) \in \sigma_{r1}[F]$, *если* ν_1 *есть любое фиксированное собственное значение матрицы* $F(\lambda;\nu_2)$.

Докажем справедливость пункта а). С учетом леммы 2.2, мы имеем: $F_1(\nu_2)y_1 = F_1(\nu_2)\Lambda_1(\lambda)x_1 = 0$, $\Lambda_1(\lambda)x_1 \in \operatorname{span} Q(\nu_2)$, $\Lambda_1(\lambda)x_1 \notin \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2)$. Тогда, по лемме 2.1, находим: $F(\lambda;\nu_2)x_1 = 0$, $x_1 \notin N_c[F]_*$. Отсюда, с учетом (2.2), для $(*) = (\lambda,\nu_2)$ следует: $F(\lambda;\nu_2)x_1 = 0$, $x_1 \in N_c[F(*)]$, $x_1 \notin N_c[F]_*$, где ν_2 есть замкнутое многообразие в аффинном пространстве $\mathbb{C}^2$, так что $\nu_2; x_1$ есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$, соответствующая точке ν_2 из множества $\sigma_{r2}[F]$. Справедливость пункта а) установлена.

Докажем справедливость пункта б). Пусть ν_1 есть любое фиксированное собственное значение матрицы $F(\lambda;\nu_2)$, так что вектор $y_* := \Lambda_1(\nu_1)x_*$ удовлетворяет уравнению (α):

$$F_1(\nu_2)\Lambda_1(\nu_1)x_* = 0,\ \Lambda_1(\nu_1)x_* \in \operatorname{span} Q(\nu_2),\ \Lambda_1(\nu_1)x_* \notin \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2).$$

Тогда, по лемме 2.1 (аналогично доказательству п. а)) с учетом условия (2.2), находим:

$$F(\nu_1;\nu_2)x_* = 0,\ x_* \notin N_c[F]_*,\ x_* \in N_c[F(*)],\ (*) = (\nu_1,\nu_2).$$

Следовательно, пара (ν_1,ν_2); x_* есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$, соответствующая точке (ν_1,ν_2) множества $\sigma_{r1}[F]$. Справедливость леммы 2.3 установлена.

Лемма 2.4. *Каждому решению $y_1 = \Lambda_1(\lambda)x_1$ уравнения (α) взаимно однозначно соответствует решение уравнения (γ). При этом справедливы следующие утверждения.*

а) *Если пучок $D(\lambda;\nu_2)$ не имеет собственных значений, то справедливо тождество относительно λ*

$$\begin{aligned} &D(\lambda;\nu_2)y_1(\lambda) \equiv [Q_+(\nu_2) - \lambda Q_-(\nu_2)]y_1(\lambda) = 0;\\ &y_1(\lambda) \in N_c[D(\lambda;\nu_2)]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

б) *Если ν_1 есть любое фиксированное собственное значение пучка $D(\lambda;\nu_2)$, то справедливо равенство*

$$[Q_+(\nu_2) - \nu_1 Q_-(\nu_2)]y_* = 0, \quad y_* \neq 0. \tag{2.4}$$

Доказательство пункта а). По условию,

$$y_1(\lambda) = \Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda) \in \operatorname{span} Q(\nu_2), \quad y_1(\lambda) \notin \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2).$$

Отсюда, принимая во внимание вид матрицы $\Lambda_1(\lambda)$, находим, что $[Q_+(\nu_2) - \lambda Q_-(\nu_2)]y_1(\lambda) = 0$, т.е. вектор $y_1(\lambda)$ является решением уравнения (γ).

Обратно, пусть $y_1(\lambda)$ есть решение уравнения (γ), при этом пучок $D(\lambda;\nu_2)$ не имеет собственных значений, так что ν_2 есть замкнутое многообразие в $\mathbb{C}^2$. Надо доказать, что вектор $y_1(\lambda) = \Lambda_1(\lambda)x_1$, принадлежащий $\operatorname{span} Q(\nu_2)$, есть решение уравнения (α). Действительно, по условию, справедливо тождество (2.3). С учетом (2.3), при $x_1(\lambda) := Q_{00}(\nu_2)y_1(\lambda)$ находим цепочку равенств: $x_1(\lambda) = Q_{00}(\nu_2)y_1(\lambda)$, $\lambda x_1(\lambda) = \lambda Q_{00}(\nu_2)y_1(\lambda) = Q_{01}(\nu_2)y_1(\lambda), \dots, \lambda^s x_1(\lambda) = Q_{0s}(\nu_2)y_1(\lambda)$, так что справедливо равенство

$$\Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda) = Q(\nu_2)y_1(\lambda).$$

Отсюда вектор $\Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda)$ есть решение уравнения (α):

$$F_1(\nu_2)\Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda) = 0, \quad \Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda) \in \operatorname{span} Q(\nu_2),$$

$\Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda) \notin \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2) = N_c[F_1]_*$. Справедливость пункта а) установлена.

Докажем справедливость пункта б). Пусть ν_1 есть собственное значение пучка $D(\lambda;\nu_2)$, так что имеет место равенство (2.4). Из (2.4) при $x_* = Q_{00}(\nu_2)y_*$ следует равенство

$$\Lambda_1(\nu_1)x_* = Q(\nu_2)y_*.$$

Отсюда $y_* = \Lambda_1(\lambda)x_*$ есть решение уравнения (α). При этом, по лемме 2.2, имеем

$$\operatorname{span} Q(\nu_2) \cap \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2) = 0.$$

Следовательно, пара $\nu_2; y_*$ есть собственная пара матрицы $F_1(\mu)$.

Обратно, пусть y_* есть решение уравнения (α). Надо доказать справедливость равенства (2.4). По условию, $F_1(\nu_2)y_* = 0$, $y_* \in N_c[F_1(*)] = \operatorname{span} Q(\nu_2)$, $y_* \notin \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2) = N_c[F_1]_*$, т.е. справедливо равенство $\Lambda_1(\nu_1)x_* = Q(\nu_2)y_*$. Отсюда, с учетом вида матрицы $\Lambda_1(\nu_1)$, получаем, что $[Q_+(\nu_2) - \nu_1 Q_-(\nu_2)]y_* = 0$. Это и завершает доказательство пункта б) и леммы 2.4.

Теорема 2.5. *Каждому решению уравнения* (γ)

$$D(\lambda;\nu_2)y = 0$$

взаимно однозначно соответствует спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$. *При этом имеют место следующие утверждения.*

а) *Если пучок* $D(\lambda;\nu_2)$ *не имеет собственных значений, то решению* $y(\lambda)$ *уравнения* (γ) *взаимно однозначно соответствует спектральная пара* $\nu_2; x_1(\lambda) = Q_{00}(\nu_2)y_1(\lambda)$, *где* $\nu_2 \in \sigma_{r2}[F]$, $x_1(\lambda) \in N_c[F(*)]$, $x_1(\lambda) \notin N_c[F]_*$, $(*) = (\lambda, \nu_2)$.

б) *Если* ν_1 *есть собственное значение пучка* $D(\lambda;\nu_2)$, *то решению* y_* *уравнения* (γ) *взаимно однозначно соответствует спектральная пара* (ν_1,ν_2); $x_* = Q_{00}(\nu_2)y_*$, *где* $(\nu_1,\nu_2) \in \sigma_{r1}[F]$, $x_* \in N_c[F(*)]$, $x_* \notin N_c[F]_*$, $(*) = (\nu_1,\nu_2)$.

Доказательство пункта а). По условию, имеет место тождество (2.3), из которого при $x_1(\lambda) = Q_{00}(\nu_2)y_1(\lambda)$ следует справедливость равенства $\Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda) = Q(\nu_2)y_1(\lambda)$. Отсюда вектор $\Lambda_1(\lambda)x_1(\lambda)$ есть решение уравнения (α). По лемме 2.2, $\Lambda_1(\lambda)x(\lambda) \notin \operatorname{span} W^{(1)}(\nu_2) \in N_c[F_1]_*$, так что, по лемме 2.1, $x_1(\lambda)$ есть решение уравнения (β) : $F(\lambda;\nu_2)x_1(\lambda) = 0$, $x_1(\lambda) \notin N_c[F]_*$. Отсюда, с учетом (2.2), пара ν_2; $x_1(\lambda) = Q_{00}(\nu_2)y_1(\lambda)$, где $x_1(\lambda) \in N_c[F(*)]$, $x_1(\lambda) \notin N_c[F]_*$, $(*) = \nu_2$, есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$, соответствующая точке ν_2 из множества $\sigma_{r2}[F]$. Справедливость прямого утверждния п. а) установлена.

Докажем прямое утверждение пункта б). По условию, имеет место равенство (2.4), с учетом которого при $x_* = Q_{00}(\nu_2)y_*$ следует справедливость равенства $\Lambda_1(\nu_1)x_* = Q(\nu_2)y_*$. Отсюда, принимая во внимание (2.2), находим: $F(\nu_1;\nu_2)x_* = 0$, $x_* \in N_c[F(*)]$, $x_* \notin N_c[F]_*$, $(*) = (\nu_1, \nu_2)$, так что (ν_1, ν_2); x_* есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$, $(\nu_1,\nu_2) \in \sigma_{r1}[F]$. Справедливость прямого утверждения пункта б) установлена. Справедливость обратных утверждений пунктов а) и б) следует из леммы 2.1 и леммы 2.3.

Замечание. При применении метода наследственных пучков к решению спектральных задач для матрицы $F(\lambda;\mu)$ целесообразно уменьшить размеры наследственных пучков $D(\lambda;\mu_i)$ и $\widetilde{D}(\lambda;\mu)$. Это можно сделать, если в качестве матрицы $F(\lambda;\mu)$ взять матрицу $\widehat{F}(\lambda;\mu) = F(\lambda;\mu)U_1(\mu)$, где $U(\mu) = [U_1(\mu), U_0(\mu)]$ есть унимодулярная матрица, реализующая ΔW-1 факторизацию [3] матрицы $M(\mu) = F_1^B(\mu)$. Известно [4], что такой выбор унимодулярной матрицы $U(\mu)$, где $\operatorname{span} U_0(\mu) = N_c[F_1^B] \neq 0$, позволяет уменьшить размеры $m \times n$ матрицы $F(\lambda;\mu)$, заменив ее матрицей $\widehat{F}(\lambda;\mu)$ размеров $m \times \rho_0$, $\rho_0 = \operatorname{rank} M(\mu)$. При этом скалярные спектральные характеристики матрицы $F(\lambda;\mu)$ не изменяются: $\sigma_{ri}[F] = \sigma_{ri}[\widehat{F}]$, $\sigma_{si}[F] = \sigma_{si}[\widehat{F}]$, $i = 1, 2$. Векторные спектральные характеристики матриц $F(\lambda;\mu)$ и $\widehat{F}(\lambda;\mu)$ связаны соотношениями $x = U_1(\nu_2)\widehat{x}$ и $X = U_1(\nu_2)\widehat{X}$ соответственно для точек $\sigma_r[F]$ и $\sigma_s[F]$.

2.2. Алгоритм вычисления регулярного спектра

Предлагается алгоритм вычисления спектральных пар, соответствующих точкам регулярного спектра $F(\lambda;\mu) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k$. Теоретической базой алгоритма являются теорема 2.5 и следующее за ней замечание.

Для вычисления спектральных пар видов $(\nu_1,\nu_2); x_*$ и $\nu_2; x(\lambda)$, соответствующих точкам множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$, нужно выполнить следующие операции.

(1) Сформировать матрицу $M(\mu) := [C_s(\mu), \dots, C_0(\mu)]^B$ и найти унимодулярную матрицу $U(\mu)$, реализующую ΔW-1 факторизацию матрицы $M(\mu)$:

$$M(\mu)U(\mu) = [\Delta(\mu), \mathbb{O}],$$

где $\mathbb{O}$ – $n\times(n-\rho_0)$ нулевая матрица, $U(\mu)=[U_1,\,U_0]$ – унимодулярная $n\times n$ матрица с блоками $U_1(\mu)$ и $U_0(\mu)$ размеров $n\times\rho_0$ и $n\times(n-\rho_0)$ соответственно, $\rho_0=\operatorname{rank}M(\mu)$.

(2) Сформировать матрицу $\widehat{F}_1(\mu)=[\widehat{C}_s(\mu),\dots,\widehat{C}_0(\mu)]\equiv\Delta^B(\mu)$, где $\widehat{C}_k(\mu)=C_k(\mu)U_1(\mu)$.

(3) Вычислить все различные собственные значения μ_i, $i=1,\dots,r$, матрицы $\widehat{F}_1(\mu)$, используя, например, алгоритм ∇V-1 факторизации [3]:

$$\widehat{F}_1(\mu)=\nabla(\mu)V(\mu).$$

Здесь $\nabla(\mu)$ есть регулярная $m\times m$ матрица, собственные значения которой совпадают с искомыми числами μ_i.

(4) Для каждого фиксированного значения μ_i (обозначим его через ν_2), $i=1,\dots,r$, вычислить наследственный пучок $D(\lambda;\nu_2)=\widehat{Q}_+(\nu_2)-\lambda\widehat{Q}_-(\nu_2)$. Для этого следует:

(4i) вычислить постоянную матрицу $\widehat{F}_1(\nu_2)$;

(4ii) найти, используя, например, алгоритм "вычитания подпространств" [3], ортонормированный базис $\{\operatorname{span}\widehat{Q}(\nu_2)\setminus\operatorname{span}W^{(1)}(\nu_2)\}$, где $\operatorname{span}\widehat{Q}(\nu_2)=N_c[\widehat{F}_1(\nu_2)]$, $\operatorname{span}W^{(1)}(\nu_2)=N_c[\widehat{F}_1]_*$;

(4iii) сформировать пучок $\widehat{D}(\lambda;\nu_2)$ постоянных матриц $\widehat{Q}_+$ и $\widehat{Q}_-$, составленных из $\rho_0 s$ первых и $\rho_0 s$ последних строк $\widehat{Q}(\nu_2)$ соответственно.

(5) Вычислить все различные собственные значения λ_{ji}, $j=1,\dots,p_i$, пучка $\widehat{D}(\lambda;\nu_2)$, $\nu_2=\mu_i$. Пары (λ_{ji},μ_i), $j=1,\dots,p_i$, $i=1,\dots,r$, образуют точки (ν_1,ν_2) собственного регулярного спектра $\sigma_{r1}[\widehat{F}]=\sigma_{r1}[F]$. Числа μ_i, для которых пучок $\widehat{D}(\lambda;\mu_i)$ не имеет собственных значений, образуют точки ν_2 множества $\sigma_{r2}[\widehat{F}]=\sigma_{r2}[F]$.

(6) Для вычисления спектральных векторов, соответствующих точкам множеств $\sigma_{r1}[F]$ и $\sigma_{r2}[F]$, следует:

(6i) для каждой фиксированной точки $(\nu_1,\nu_2)\in\sigma_{r1}[F]$ найти вектор $\hat{y}_*$, удовлетворяющий уравнению $\widehat{D}(\nu_1;\nu_2)\hat{y}_*=0$, и вычислить искомый спектральный вектор $x_*=U_1(\nu_2)\widehat{Q}_{00}(\nu_2)\hat{y}_*$;

(6ii) для каждой фиксированной точки $\nu_2\in\sigma_{r2}[F]$ найти вектор $\hat{y}(\lambda)$, удовлетворяющий условиям $\widehat{D}(\lambda;\nu_2)\hat{y}(\lambda)=0$, $\hat{y}(\lambda)\in N_c[\widehat{D}(\lambda,\nu_2)]$, и вычислить искомый спектральный вектор $x(\lambda)=U_1(\nu_2)\widehat{Q}_{00}(\nu_2)\hat{y}(\lambda)$. Здесь $\widehat{Q}_{00}(\nu_2)$ есть последняя компонента в блочной записи матрицы $\widehat{Q}(\nu_2)=[\widehat{Q}_{0s}(\nu_2),\dots,\widehat{Q}_{00}(\nu_2)]^B$.

§3. Метод наследственных пучков для вычисления сингулярного спектра

3.1. Теоретические предпосылки

Пусть

$$F(\lambda;\mu)=\sum_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}, \quad \rho<n.$$

Задача состоит в вычислении точек множеств $\sigma_{s1}[F]$ и $\sigma_{s2}[F]$ и им соответствующих спектральных векторов с помощью метода наследственных пучков.

В качестве наследственного пучка берем пучок $\widetilde{D}(\lambda;\mu)=W_+(\mu)-\lambda W_-(\mu)$ полиномиальных матриц. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

• в точках спектра $\sigma[F]$ матрицы $F(\lambda;\mu)$ имеет место соотношение

$$\{N_c[F(*)]\cap N_c[F]_*\}=0, \tag{3.1}$$

т.е $\sigma_{rs}[F]=\varnothing$;

• $\varkappa_2\in\mathbb{C}^1$ есть фиксированная точка, не совпадающая с собственными значениями матрицы $F_1(\mu):=[C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)]$, для которой уравнение $F_1(\varkappa_2)Y=0$ имеет решение вида $Y(\lambda)=\Lambda_1(\lambda)X(\lambda)$, $X(\lambda):=X(\lambda,\varkappa_2)$, принадлежащее пространству $N_c[F_1]_*$, где $(*)=\varkappa_2$.

Рассмотрим связь между решениями уравнений

$$F_1(\varkappa_2)Y(\lambda)=0\ (\alpha);\quad F(\lambda,\varkappa_2)X(\lambda)=0\ (\beta);\quad \widetilde{D}(\lambda,\varkappa_2)Y(\lambda)=0\ (\gamma).$$

Лемма 3.1. *Между решениями $X_1(\lambda)\in N_c[F]_*$ и $Y_1(\lambda)=\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda)$ $\in N_c[F_1]_*$ соответственно уравнений (β) и (α), где $(*)=(\lambda,\varkappa_2)$, существует взаимно однозначное соответствие.*

Справедливость утверждения следует из равенства

$$F(\lambda;\varkappa_2)X_1(\lambda)=F_1(\varkappa_2)\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda),$$

вытекающего из (2.1). Действительно, каждому решению $X_1(\lambda)=W_0(\lambda;\varkappa_2)\eta$, где $\operatorname{span}W_0(\lambda;\mu)=N_c[F]$, соответствует решение $Y(\lambda)=\Lambda_1(\lambda)W_0(\lambda;\varkappa_2)\eta$, принадлежащее $N_c[F_1]_*=\operatorname{span}W^{(1)}(\varkappa_2)$. Обратно, решению уравнения (α) $Y(\lambda):=\Lambda_1(\lambda)W_0(\lambda;\varkappa_2)\eta\subseteq N_c[F_1]_*$ соответствует, как это следует из (2.1), решение $X_1(\lambda)=W_0(\lambda;\varkappa_2)\eta\in N_c[F]_*$ уравнения (β). Справедливость леммы установлена.

Лемма 3.2. *Между решениями уравнений* (α) *и* (γ) *существует взаимно однозначное соответствие.*

Действительно, пусть $Y_1(\lambda) = \Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda)$ есть решение уравнения (α):

$$F_1(\varkappa_2)Y_1(\lambda) = 0, \quad Y_1(\lambda) \in \operatorname{span} W^{(1)}(\varkappa_2) = N_c[F_1]_*,$$

так что выполняется равенство

$$\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda) = W^{(1)}(\varkappa_2)Y_1(\lambda).$$

Отсюда, с учетом вида матрицы $\Lambda_1(\lambda)$, имеем

$$[W_+(\varkappa_2) - \lambda W_-(\varkappa_2)]Y_1(\lambda) = 0,$$

т.е. уравнение (γ) имеет решение.

Обратно, пусть $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)Y(\lambda) = 0$ имеет решение. Если $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$ не имеет собственных значений, то справедливо тождество

$$[W_+(\varkappa_2) - \lambda W_-(\varkappa_2)]Y(\lambda) = 0. \tag{3.2}$$

Если $\varkappa_1$ есть фиксированное собственное значение пучка $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$, то имеет место равенство

$$[W_+(\varkappa_2) - \varkappa_1 W_-(\varkappa_2)]Y_* = 0. \tag{3.3}$$

Из (3.2) при $X_1(\lambda) = W_{00}(\varkappa_2)Y_1(\lambda)$ выводим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\lambda X_1(\lambda) &= \lambda W_{00}(\varkappa_2)Y_1(\lambda) = W_{01}(\varkappa_2)Y_1(\lambda), \dots ,\\ \lambda^s X_1(\lambda) &= W_{0s}(\varkappa_2)Y_1(\lambda).\end{aligned}$$

Таким образом, имеем $\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda) = W^{(1)}(\varkappa_2)Y_1(\lambda)$. Отсюда следует, что вектор $\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda)$ есть решение уравнения (α). Аналогично, из равенства (3.3) при $X_* = W_{00}(\varkappa_2)Y_*$ получаем равенство $\Lambda_1(\varkappa_1)X_* = W^{(1)}(\varkappa_2)Y_*$, так что вектор $\Lambda_1(\varkappa_1)X_* \in N_c[F_1]_*$ удовлетворяет уравнению (α). Справедливость леммы установлена.

Лемма 3.3. *Между решениями уравнений* (γ) *и* (β) *существует взаимно однозначное соответствие. При этом справедливы следующие утверждения.*

а) *Если пучок* $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$ *не имеет собственных значений, то решению уравнения* $D(\lambda;\varkappa_2)Y(\lambda) = 0$ *взаимно однозначно соответствует спектральная пара* $\varkappa_2$; $X_1(\lambda)$ *матрицы* $F(\lambda;\mu)$, *где* $\varkappa_2 \in \sigma_{s2}[F]$, $X_1(\lambda) \in N_c[F]_*$, $(*) = (\lambda, \varkappa_2)$.

б) *Если* $\varkappa_1$ *есть собственное значение пучка* $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$, *то решению уравнения* (γ) *взаимно однозначно соответствует спектральная пара матрицы* $F(\lambda;\mu)$ *вида*

$$(\varkappa_1, \varkappa_2); X_*,\ (\varkappa_1, \varkappa_2) \in \sigma_{s1}[F],\ X_* \in N_c[F]_*,\ (*) = (\varkappa_1, \varkappa_2).$$

Доказательство пункта а). По условию, выполняется тождество (3.2), из которого при $X_1(\lambda) = W_{00}(\varkappa_2)Y_1(\lambda)$ следует равенство $\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda) = W^{(1)}(\varkappa_2)Y_1(\lambda)$, так что вектор $\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda)$ принадлежит пространству $N_c[F_1]_*$, т.е. удовлетворяет уравнению (α). Тогда, по лемме 3.1, $X_1(\lambda) \in N_c[F]_*$ является решением уравнения (β): $F(\lambda;\varkappa_2)X_1(\lambda) = 0$. При этом, по условию, $\varkappa_2$ есть замкнутое многообразие в $\mathbb{C}^2$, так что $\varkappa_2$ принадлежит спектру $\sigma[F]$ матрицы $F(\lambda;\mu)$. Тогда из сказанного, с учетом (3.1), следует, что $\varkappa_2$; $X_1(\lambda) = W_{00}(\varkappa_2)Y_1(\lambda)$ есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\varkappa_2$; $X_1(\lambda)$, где $\varkappa_2 \in \sigma_{s2}[F]$, $X_1(\lambda) \in N_c[F]_*$, есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$.

Надо доказать, что уравнение (γ) имеет решение, если $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$ не имеет собственных значений. Действительно, из леммы (3.1) и равенства $F(\lambda;\varkappa_2)X_1(\lambda) = 0$ следует, что $\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda) \in N_c[F_1]_*$ есть решение уравнения (α), так что мы имеем

$$\Lambda_1(\lambda)X_1(\lambda) = W^{(1)}(\varkappa_2)Y_1(\lambda).$$

Отсюда, с учетом вида матрицы $\Lambda_1(\lambda)$, получаем

$$[W_+(\varkappa_2) - \lambda W_-(\varkappa_2)]Y_1(\lambda) \equiv \widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)Y_1(\lambda) = 0,$$

т.е. уравнение (γ) имеет решение. При этом пучок $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$ не имеет собственных значений, так как, по условию, $\varkappa_2$ есть замкнутое многообразие в пространстве $\mathbb{C}^2$. Сраведливость пункта а) установлена.

Докажем справедливость пункта б). Пусть имеет место равенство $\widetilde{D}(\varkappa_1;\varkappa_2)Y_* = 0$. Тогда, по лемме 3.2, имеет место равенство $F_1(\varkappa_2)\Lambda_1(\varkappa_1)X_* = W^{(1)}(\varkappa_2)Y_*$. Отсюда, по лемме 3.1 с учетом условия (3.1), справедливы равенства $F(\varkappa_1;\varkappa_2)X_* = 0$, $(\varkappa_1, \varkappa_2) \in \sigma_{s1}[F]$,

$X_* \in N_c[F]_*$, т.е. $(\varkappa_1, \varkappa_2)$; X_* есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$.

Обратно, пусть $(\varkappa_1, \varkappa_2)$; $X_* = W_{00}(\varkappa_2)Y_*$ есть спектральная пара матрицы $F(\lambda;\mu)$. Докажем, что справедливо равенство (3.3). Действительно, по лемме 3.1, вектор $\Lambda_1(\varkappa_1)X_* \in N_c[F_1]_*$, т.е. является решением уравнения (β). Тогда, по лемме 3.2, пучок $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$ имеет собственное значение, и справедливо равенство $\widetilde{D}(\varkappa_1;\varkappa_2)Y_* = 0$. Справедливость леммы установлена.

При выполнении условий $\varkappa_2 \notin \sigma[F_1]$, $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.4. 1) *Регулярный спектр наследственного пучка $\widetilde{D}(\lambda;\mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$ совпадает с сингулярным спектром матрицы $F(\lambda;\mu) : \sigma_{r1}[\widetilde{D}] = \sigma_{s1}[F]$; $\sigma_{r2}[\widetilde{D}] = \sigma_{s2}[F]$.*

2) *Спектральные векторы пучка $\widetilde{D}(\lambda;\mu)$ и матрицы $F(\lambda;\mu)$ связаны соотношениями вида*

$$X_* = W_{00}(\varkappa_2)Y_*, \quad \text{если} \quad (\varkappa_1, \varkappa_2) \in \sigma_{s1}[F] = \sigma_{r1}[\widetilde{D}];$$
$$X(\lambda) = W_{00}(\varkappa_2)Y_1(\lambda), \quad \text{если} \quad \varkappa_2 \in \sigma_{s2}[F] = \sigma_{r2}[\widetilde{D}].$$

Здесь X_*, $X(\lambda)$ и Y_*, $Y(\lambda)$ суть спектральные векторы соответственно матрицы $F(\lambda;\mu)$ и пучка $\widetilde{D}(\lambda;\mu)$; $W_{00}(\varkappa_2)$ есть последняя блочная компонента в блочном представлении матрицы $W^{(1)}(\varkappa_2) = [W_{0s}(\varkappa_2), \dots, W_{00}(\varkappa_2]^B$.

Справедливость теоремы следует из леммы 3.3.

3.2. Алгоритм вычисления сингулярного спектра

Пусть $F(\lambda;\mu) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k \in \mathcal{F}_\rho^{m\times n}$, $\rho < n$, $s \geqslant 1$. Требуется вычислить точки сингулярного спектра матрицы $F(\lambda;\mu)$ и им соответствующие спектральные векторы, используя метод наследственных пучков. Теоретической базой предлагаемого ниже алгоритма являются теорема 3.4 и замечание из п. 2.2. Согласно замечанию, в качестве начальной матрицы для решения задачи берется матрица $\widehat{F}(\lambda;\mu) = F(\lambda;\mu)U_1(\mu)$, где $U(\mu) = [U_1(\mu), U_0(\mu)]$ – унимодулярная матрица, реализующая ΔW-1 факторизацию матрицы $F_1^B(\mu)$, $F_1(\mu) := [C_s(\mu), \dots, C_0(\mu)]$. Целесообразность построения матрицы $\widehat{F}(\lambda;\mu)$ в случае вычисления точек $\sigma_s[F]$ состоит в следующем.

1) При вычислении матрицы $U(\mu)$ выясняется [4] наличие или отсутствие сингулярного спектра у исходной матрицы $F(\lambda;\mu)$. Если $\rho_0=\rho$, где $\rho_0=\operatorname{rank} F_1^B(\mu)$, $\rho=\operatorname{rank} F(\lambda;\mu)$, то матрица $F(\lambda;\mu)$ не имеет сингулярного спектра.

2) Размеры наследственного пучка $\widehat{D}(\lambda;\mu)$ для матрицы $\widehat{F}(\lambda;\mu)$ меньше, чем размеры $\widetilde{D}(\lambda;\mu)$ для $F(\lambda;\mu)$.

Алгоритм вычисления $\sigma_s[F]$ состоит в выполнении следующих операций.

(1) Вычислить унимодулярную матрицу $U(\mu)=[U_1(\mu),\,U_0(\mu)]$, реализующую ΔW-1 факторизацию матрицы $F_1^B(\mu)$:

$$F_1^B(\mu)U(\mu)=F_1^B(\mu)[U_1(\mu),\,U_0(\mu)]=[\Delta(\mu),\,\mathbb{O}],$$

где[2] $\operatorname{span} U_0(\mu)=N_c[F_1^B]$.

(2) Сформировать матрицу $\widehat{F}_1(\mu)=\Delta^B(\mu)=[\hat{C}_s(\mu),\dots,\hat{C}_k(\mu)]$, так что $\hat{C}_k(\mu)=C_k(\mu)U_1(\mu)$.

(3) Вычислить матрицу $\widehat{W}^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис пространства $N_c[\widehat{F}_1]$, используя алгоритм ΔW-1 факторизации: $\widehat{F}_1(\mu)W(\mu)=[\Delta_1(\mu),\mathbb{O}]$, где $W(\mu)=[W_1(\mu),W_0(\mu)]$. В качестве $\widehat{W}^{(1)}(\mu)$ взять матрицу $W_0(\mu)$.

(4) Сформировать пучок $\widehat{D}(\lambda;\mu)=\widehat{W}_+(\mu)-\lambda\widehat{W}_-(\mu)$, где $\widehat{W}_+$ и $\widehat{W}_-$ суть полиномиальные матрицы, составленные из $s\rho_0$ первых и $s\rho_0$ последних строк матрицы $\widehat{W}^{(1)}(\mu)$.

(5) Вычислить все различные точки регулярного спектра пучка $\widehat{D}(\lambda;\mu)$, используя, например, алгоритм вычисления регулярного спектра пучка полиномиальных матриц из [1] или из §4 настоящей статьи.

(6) Вычислить спектральные векторы матрицы $F(\lambda;\mu)$, соответствующие точкам $(\varkappa_1,\varkappa_2)\in\sigma_{r1}[\widetilde{D}]\equiv\sigma_{s1}[F]$, $\varkappa_2\in\sigma_{r2}[\widehat{D}]\equiv\sigma_s[F]$, используя соотношения:

$$X_*=U_1(\varkappa_2)\widehat{W}_{00}(\varkappa_2)\hat{Y}_*;\quad X(\lambda)=U_1(\varkappa_2)\widehat{W}_{00}(\varkappa_2)\hat{Y}(\lambda).$$

Здесь $\hat{Y}_*$ и $\hat{Y}(\lambda)$ суть спектральные векторы пучка $\widehat{D}(\lambda;\mu)$, соответствующие точкам $(\varkappa_1,\varkappa_2)$ и $\varkappa_2$ его регулярного спектра, т.е. решения уравнений $\widehat{D}(\varkappa_1;\varkappa_2)Y=0$ и $\widehat{D}(\lambda;\varkappa_2)Y(\lambda)=0$; $\widehat{W}_{00}(\varkappa_2)$ есть последний блок матрицы $\widehat{W}^{(1)}(\varkappa_2)=[\widehat{W}_{0s}(\varkappa_2),\dots,\widehat{W}_{00}(\varkappa_2)]^B$.

[2] Если блок $U_0(\mu)$ отсутствует, то алгоритм вычисления $\sigma_s[F]$ применяется к исходной матрице $F(\lambda;\mu)$.

§4. Метод наследственных пучков для решения спектральных задач для пучка полиномиальных матриц

4.1. Теоретические предпосылки

Пусть $F(\lambda;\mu) = A(\mu) - \lambda B(\mu)$ есть пучок ранга ρ полиномиальных матриц размеров $m \times n$. Задача состоит в вычислении точек регулярного и сингулярного спектров и им соответствующих спектральных векторов пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$ с помощью метода наследственных пучков. Очевидно, пучок $A(\mu) - \lambda B(\mu)$ является частным видом двухпараметрического матричного полинома с линейной зависимостью от спектрального параметра λ. Так что все результаты, полученные в §§2, 3 для матриц $F(\lambda;\mu)$ общего вида, справедливы и для пучка полиномиальных матриц. В этом случае равенство (2.10) имеет вид

$$F(\lambda;\mu) \equiv A(\mu) - \lambda B(\mu) = F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda),$$

где $F_1(\mu) = [-B(\mu),\ A(\mu)]$, $\Lambda_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_n \\ I_n \end{bmatrix}$.

При выполнении условия $\sigma_{rs}[F] = \varnothing$ справедливы следующие утверждения.

1. Между точками регулярных спектров пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$ и наследственных пучков

$$D_k(\lambda;\mu_k) = Q_+(\mu_k) - \lambda Q_-(\mu_k), \quad k = 1,\dots,r,$$

существует взаимно однозначное соответствие. Здесь $Q_+(\mu_k)$ и $Q_-(\mu_k)$ – постоянные матрицы, составленные из n первых и n последних строк матрицы $Q(\mu_k)$, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы $F_1(\mu_k)$, где μ_k, $k = 1,\dots,r$, – все различные собственные значения матрицы $F_1(\mu)$. При этом $\operatorname{span} Q(\mu_k)$ не содержит $N_c[F_1]_{\mu_k}$.

2. Для того, чтобы многообразие (ν_1,ν_2) было собственным значением пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$, достаточно, чтобы были выполнены следующие условия: ν_1 есть любое фиксированное собственное значение пучка $D_k(\lambda;\nu_2^{(k)})$ постоянных матриц; $\nu_2^{(k)}$ – одно из собственных значений μ_k, $k = 1,\dots,r$, матрицы $F_1(\mu)$. При этом, если пучок $D_k(\lambda;\nu_2^{(k)})$ не имеет собственных значений, то $\nu_2^{(k)}$ есть точка смешанного регулярного спектра пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$.

3. Точки сингулярного спектра пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$ совпадают с точками $(\varkappa_1,\varkappa_2)$ и $\varkappa_2$ регулярного спектра наследственного пучка

$\widetilde{D}(\lambda;\mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$, если $\varkappa_2 \neq \mu_k$, $k = 1,\dots,r$. При этом $(\varkappa_1,\varkappa_2)$ есть точка собственного сингулярного спектра пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$, если $\varkappa_1$ есть собственное значение пучка $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$; $\varkappa_2$ есть точка смешанного сингулярного спектра пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$, если $\widetilde{D}(\lambda;\varkappa_2)$ не имеет собственных значений. Здесь $\widetilde{D}(\lambda;\mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$ есть пучок полиномиальных матриц, составленных из n первых и n последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$, столбцы которой образуют свободный базис правого нуль-пространства $N_c[F_1]$.

4. Спектральные векторы пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$, соответствующие точкам (ν_1,ν_2) и ν_2 регулярного спектра, вычисляются по формулам:

$$x_* = Q_{00}(\nu_2)y_*, \quad x_1(\lambda) = Q_{00}(\nu_2)y_1(\lambda),$$

где y_* и $y_1(\lambda)$ суть решения уравнений

$$D(\nu_1,\nu_2)y_* = 0 \quad \text{и} \quad D(\lambda,\nu_2)y_1(\lambda) = 0.$$

Спектральные векторы пучка $A(\mu)-\lambda B(\mu)$, соответствующие точкам $(\varkappa_1,\varkappa_2)$ и $\varkappa_2$ его сингулярного спектра, вычисляются по формулам $X_* = W_{00}(\varkappa_2)Y_*$ и $X_1(\lambda) = W_{00}(\varkappa_2)Y_1(\lambda)$, где Y_* и $Y(\lambda)$ суть решения соответственно уравнений $\widetilde{D}(\varkappa_1;\varkappa_2)Y_* = 0$ и $\widetilde{D}(\lambda,\varkappa_2)Y(\lambda) = 0$.

4.2. Алгоритм вычисления точек спектра пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$

Для вычисления точек собственного и смешанного регулярных спектров пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$ следует выполнить следующие операции.

(1) Вычислить все различные собственные значения μ_i, $i = 1,\dots,r$, полиномиальной матрицы $F_1(\mu) := [-B(\mu),\ A(\mu)]$.

(2) Для каждого фиксированного μ_i сформировать наследственный пучок $D_i(\lambda,\mu_i) = Q_+(\mu_i) - \lambda Q_-(\mu_i)$ и вычислить все его различные собственные значения λ_{ji}, $j = 1,\dots,p_i$. Пары (λ_{ji},μ_i) так вычисленных чисел образуют точки собственного регулярного спектра пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$. Собственные значения μ_i, для которых пучок $D_i(\lambda;\mu_i)$ не имеет собственных значений, образуют точки смешанного регулярного спектра пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$.

Для вычисления точек собственного и смешанного сингулярных спектров пучка $A(\mu)-\lambda B(\mu)$ следует выполнить следующие операции.

(1) Вычислить матрицу $W^{(1)}(\mu)$, $\operatorname{span} W^{(1)}(\mu) = N_c[W^{(1)}]$.

(2) Сформировать наследственный пучок $\widetilde{D}(\lambda;\mu) = W_+(\mu) - \lambda W_-(\mu)$, где $W_+(\mu)$ и $W_-(\mu)$ суть полиномиальные матрицы, составленные из n первых и n последних строк матрицы $W^{(1)}(\mu)$.

(3) Вычислить все различные точки регулярного спектра пучка $\widetilde{D}(\lambda;\mu)$, используя алгоритм пункта 3.2, в котором пучок $\widetilde{D}(\lambda;\mu)$ рассматривается как матричный полином с линейным вхождением ведущего параметра λ.

В результате выполнения операций (1)–(3) будут вычислены многообразия вида $(\varkappa_1, \varkappa_2)$ и $\varkappa_2$, образованные точками собственного и смешанного сингулярных спектров пучка $A(\mu) - \lambda B(\mu)$.

Замечание. Для уменьшения размеров наследственных пучков в рассмотренном алгоритме целесообразно [4] в качестве начального пучка брать пучок $\widehat{A}(\mu) - \lambda\widehat{B}(\mu)$, где $\widehat{A}(\mu) = A(\mu)U_1(\mu)$, $\widehat{B}(\mu) = B(\mu)U_1(\mu)$, а $U(\mu) = [U_1(\mu), U_0(\mu)]$ есть унимодулярная матрица, реализующая ΔW-1 факторизацию матрицы $M(\mu) := \begin{bmatrix} -B(\mu) \\ A(\mu) \end{bmatrix}$. Такое преобразование имеет смысл, если $\rho_0 < n$, где ρ_0 – ранг матрицы $M(\mu)$.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц*.1. — Зап. научн. семинар. ПОМИ **359** (2008), 107–149.
2. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц*. 4. — Зап. научн. семин. ПОМИ **367** (2009), 121–144.
3. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры*. Часть 1. *Однопараметрические задачи*. Наука, С.-Петербург, 2004.
4. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц*. 7. — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 141–149.

Kublanovskaya V. N. To solving problems of algebra for two-parameter matrices. 8.

The paper discusses the method of hereditary pencils for computing points of regular and singular spectra of a general two-parameter polynomial matrix. The method allows one to reduce the spectral problems mentioned above to eigenproblems for polynomial matrices and pencils of constant matrices.

Algorithms realizing the method are suggested and justified.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 15 марта 2010 г.