Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ. 7

В статье продолжаются исследования метода ранговых факторизаций [1] для решения спектральных задач для двухпараметрических полиномиальных матриц. Предлагаются новые виды ранговых факторизаций матрицы, алгоритмы вычисления которых используют только унимодулярные матрицы. Рассматривается применение факторизаций к решению спектральных задач для двухпараметрических полиномиальных матриц как общего, так и частного видов. В качестве частного вида рассматриваются матрицы, которые не имеют сингулярного спектра. Приводятся достаточные условия отсутствия у матрицы сингулярного спектра и достаточные условия существования базисной матрицы нуль-пространства, не имеющей регулярного и сингулярного спектров.

§1. Метод ранговых факторизаций (ΔU-2 метод)

Пусть $F(\lambda;\mu)=\sum_{k=0}^{s}C_k(\mu)\lambda^k$ есть двухпараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга ρ ($\rho<n$), удовлетворяющая условию[1]

$$N_c[F]=\mathcal{H}_c[F]:=\big\{N_c[C_s(\mu)]\cap N_c[C_{s-1}(\mu)]\cap\ldots\cap N_c[C_s(\mu)]\big\}. \qquad (\alpha)$$

Ниже будет установлено, что выполнение условия (α) равносильно отсутствию правого сингулярного спектра у матрицы $F(\lambda;\mu)$.

В этом параграфе рассматривается метод ранговой факторизации матрицы $F(\lambda;\mu)$, удовлетворяющей условию (α). Приводятся различные виды ранговых факторизаций матрицы $F(\lambda;\mu)$, алгоритмы их вычисления и описывается их применение к решению спектральных задач для матрицы $F(\lambda;\mu)$.

Ключевые слова: матрица двухпараметричесая, полиномиальная; ранговая факторизация; спектр регулярный, сингулярный; нуль-пространство.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

[1]Здесь и ниже символ $N_c[\Phi]$ означает правое нуль-пространство из полиномиальных решений матрицы Φ.

1.1. Виды ранговых факторизаций

Рассмотрим три вида ранговых факторизаций матрицы $F(\lambda;\mu)$.

1.1.1. ΔU-2 факторизация. Пусть $F(\lambda;\mu)$ имеет ранг $\rho < n$. Рассмотрим соотношение

$$F(\lambda;\mu)U(\mu) = \big[\Delta(\lambda,\mu),\, \mathbb{O}\big], \tag{1.1}$$

где $\mathbb{O}$ есть нулевая $n\times(n-\rho)$ матрица; $U(\mu) = [U_1(\mu), U_0(\mu)]$ есть унимодулярная $n\times n$ матрица с блоками $U_1(\mu)$ и $U_0(\mu)$ соответственно размеров $n\times\rho$ и $n\times(n-\rho)$; $\Delta(\lambda,\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $n\times\rho$ матрица полного столбцового ранга.

Соотношение (1.1) называется ΔU-2 факторизацией матрицы $F(\lambda;\mu)$, если выполняются следующие условия.

1°. Матрица $U_0(\mu)$, столбцы которой образуют базис нуль-пространства $N_c[F]$, не имеет конечного спектра.

2°. Конечный регулярный спектр матрицы $\Delta(\lambda,\mu) = F(\lambda;\mu)U_1(\mu)$ совпадает с конечным регулярным спектром матрицы $F(\lambda;\mu)$.

3°. Левые спектральные характеристики матриц $F(\lambda;\mu)$ и $\Delta(\lambda,\mu)$ совпадают.

1.1.2. ∇V-2 факторизация. Пусть $F(\lambda;\mu)$ имеет ранг $\rho = m < n$. Рассмотрим соотношение

$$F(\lambda,\mu) = \nabla(\lambda,\mu)V(\mu), \tag{1.2}$$

где $\nabla(\lambda,\mu)$ есть регулярная двухпараметрическая полиномиальная $m\times m$ матрица; $V(\mu)$ есть однопараметрическая полиномиальная $m\times n$ матрица ранга m.

Соотношение (1.2) называется ∇V-2 факторизацией матрицы $F(\lambda;\mu)$, если выполняются следующие условия.

1°. Конечный регулярный спектр матрицы $\nabla(\lambda,\mu)$ совпадает с конечным регулярным спектром матрицы $F(\lambda;\mu)$.

2°. Матрица $V(\mu)$ не имеет конечного спектра.

3°. Правые нуль-пространства матриц $F(\lambda;\mu)$ и $V(\mu)$ совпадают.

1.1.3. UTV-2 факторизация. Пусть $F(\lambda;\mu)$ имеет ранг $\rho < \min\{m,\, n\}$. Рассмотрим соотношение

$$F(\lambda;\mu) = U(\mu)T(\lambda,\mu)V(\mu), \tag{1.3}$$

где $T(\lambda,\mu)$ есть регулярная двухпараметрическая полиномиальная $\rho\times\rho$ матрица; $U(\mu)$ и $V(\mu)$ суть однопараметрические полиномиальные матрицы полного ранга соответственно размеров $m\times\rho$ и $\rho\times n$.

Соотношение (1.3) называется UTV-2 факторизацией матрицы $F(\lambda;\mu)$, если выполняются следующие условия.

1°. Конечный спектр матрицы $T(\lambda,\mu)$ совпадает с конечным регулярным спектром матрицы $F(\lambda;\mu)$.

2°. Ни одна из матриц $U(\mu)$ и $V(\mu)$ не имеет конечного спектра.

3°. Левое нуль-пространство матрицы $U(\mu)$ и правое нуль-пространство матрицы $V(\mu)$ совпадают соответственно с левым и правым нуль-пространствами матрицы $F(\lambda;\mu)$.

1.2. Алгоритмы вычисления ранговых факторизаций

1.2.1. Алгоритм вычисления ΔU-2 факторизации состоит в выполнении следующих операций.

(1) Матрица $F(\lambda;\mu)=\sum_{k=0}^{s}C_k(\mu)\lambda^k$ записывается в виде

$$F(\lambda;\mu)=F_1(\mu)\Lambda_1(\lambda). \tag{1.4}$$

Здесь $F_1(\mu):=[C_s(\mu),\dots,C_0(\mu)]$ есть однопараметрическая полиномиальная $m\times(s+1)n$ матрица, составленная из коэффициентов $C_k(\mu)$, $k=s,\dots,0$, матрицы $F(\lambda;\mu)$; $\Lambda_1(\lambda):=[\lambda^s I_n,\lambda^{s-1}I_n,\dots,I_n]^B$; I_n – единичная $n\times n$ матрица.[2]

(2) Находится ΔW-1 факторизация [2] однопараметрической полиномиальной $(s+1)m\times n$ матрицы $F_1^B(\mu)$:

$$F_1^B(\mu)U(\mu)=[\Delta(\mu),\,\mathbb{O}]. \tag{1.5}$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $n\times(n-\rho_0)$ матрица; $\rho_0:=\operatorname{rank}F_1^B(\mu)$; $U(\mu)=[U_1(\mu),\,U_0(\mu)]$ – унимодулярная $n\times n$ матрица с блоками $U_1(\mu)$ и $U_0(\mu)$ размеров $n\times\rho_0$ и $n\times(n-\rho_0)$ соответственно.

(3) Выполняется преобразование

$$F(\lambda;\mu)U(\mu)\equiv[F(\lambda;\mu)U_1(\mu),\,F(\lambda;\mu)U_0(\mu)]=[\Delta_1(\lambda,\mu),\,\mathbb{O}]. \tag{1.6}$$

Докажем, что (1.6) есть ΔU-2 факторизация матрицы $F(\lambda;\mu)$. Сначала установим, что столбцы $U_0(\mu)$ образуют базис пространства

[2]Символ $[\ ,\ ]^B$ обозначает блочное транспонирование: $[A,\,C]^B=\left[\begin{smallmatrix}A\\C\end{smallmatrix}\right]$.

$N_c[F]$. Действительно, из (1.5) следуют равенства $C_k(\mu)U_0(\mu) = \mathbb{O}$, $k = s, \dots, 0$, так что

$$\operatorname{span} U_0 = \big\{N_c[C_s(\mu)] \cap N_c[C_{s-1}(\mu)] \cap \dots \cap N_c[C_0(\mu)]\big\} :\equiv \mathcal{H}_c[F].$$

Тогда, в силу условия (α), имеем $\operatorname{span} U_0 = N_c[F]$. Далее докажем, что спектр матрицы $\Delta_1(\lambda, \mu)$ в (1.6) совпадает с конечным спектром матрицы $F(\lambda; \mu)$. Действительно, по построению, $\Delta_1(\lambda, \mu) = F(\lambda; \mu)U_1(\mu)$, где $U_1(\mu)$ есть столбцовая подматрица унимодулярной матрицы $U(\mu)$. Отсюда следует, что конечный регулярный спектр матрицы $\Delta_1(\lambda, \mu)$ совпадает с конечным регулярным спектром $F(\lambda; \mu)$. Совпадение левых спектральных характеристик матриц $\Delta_1(\lambda, \mu)$ и $F(\lambda; \mu)$ следует из соотношения $\Delta_1(\lambda, \mu) = F(\lambda; \mu)U_1(\mu)$, что и завершает обоснование алгоритма.

1.2.2. Алгоритм вычисления ∇V-2 факторизации выполняет следующие операции.

(1) Вычисляется ΔU-2 факторизация матрицы $F(\lambda; \mu)$:

$$F(\lambda; \mu)U(\mu) = [\Delta_1(\lambda, \mu),\, \mathbb{O}].$$

(2) Вычисляется унимодулярная матрица $U^{-1}(\mu)$, например, с помощью алгоритма обращения унимодулярных матриц из [2].

(3) Выполняется преобразование

$$F(\lambda; \mu) = [\Delta_1(\lambda, \mu),\, \mathbb{O}]U^{-1}(\mu) = \nabla_1(\lambda, \mu)V_1(\mu). \tag{1.7}$$

Здесь $\nabla_1(\lambda, \mu) := \Delta_1(\lambda, \mu)$ есть регулярная двухпараметрическая $m \times m$ матрица; $V_1(\mu)$ есть однопараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица, составленная из m первых строк унимодулярной матрицы $U^{-1}(\mu)$.

Докажем, что (1.7) есть ∇V-2 факторизация матрицы $F(\lambda; \mu)$. Действительно, по построению, $\nabla_1(\lambda, \mu) = \Delta_1(\lambda, \mu)$ есть регулярная $m \times m$ матрица, вычисленная алгоритмом ΔU-2 факторизации для матрицы $F(\lambda; \mu)$ ранга $\rho = m$. Следовательно, конечный регулярный спектр $\nabla_1(\lambda, \mu)$ совпадает с конечным регулярным спектром матрицы $F(\lambda; \mu)$. Матрица $V_1(\mu)$ как строчная подматрица унимодулярной матрицы $U^{-1}(\mu)$ не имеет конечного спектра. Совпадение правых нуль-пространств матриц $F(\lambda; \mu)$ и $V(\mu)$ следует из вида (1.7), что и завершает обоснование алгоритма.

1.2.3. Алгоритм вычисления UTV-2 факторизации рассматривается при выполнении следующих условий: $N_c[F] = \mathcal{H}_c[F]$ и $N_c[F^T] = \mathcal{H}_c[F^T]$.

Выполняются следующие операции.

(1) Вычисляется ΔU-2 факторизация матрицы $F(\lambda;\mu)$:

$$F(\lambda;\mu)\widehat{U}(\mu) = [\Delta(\lambda,\mu),\, \mathbb{O}]. \tag{1.8}$$

(2) Матрица $\Delta^T(\lambda,\mu)$ записывается в виде матричного полинома с ведущим параметром λ:

$$\Delta^T(\lambda,\mu) = \sum_{k=0}^{s_1} \widehat{C}_k(\mu)\lambda^k.$$

(3) К матрице $\Delta^T(\lambda,\mu)$ применяется алгоритм ∇V-2 факторизации

$$\Delta^T(\lambda,\mu) = \nabla_1(\lambda,\mu)V_1(\mu),$$

так что

$$\Delta(\lambda,\mu) = V_1^T(\mu)\nabla_1^T(\lambda,\mu). \tag{1.9}$$

Из (1.8) и (1.9) имеем

$$F(\lambda;\mu)\widehat{U}(\mu) = \left[V_1^T(\mu)\nabla_1(\lambda,\mu),\, \mathbb{O}\right].$$

(4) Вычисляется матрица $\widehat{U}^{-1}(\mu)$, обратная к унимодулярной матрице $\widehat{U}(\mu)$.

В результате выполнения операций (1)–(4) имеем

$$F(\lambda;\mu) = V_1^T(\mu)\,\nabla_1^T(\lambda,\mu)\,V_2(\mu) \equiv U(\mu)\,T(\lambda,\mu)\,V(\mu). \tag{1.10}$$

Здесь $U(\mu) = V_1^T(\mu)$, $T(\lambda,\mu) = \nabla_1^T(\lambda,\mu)$, $V(\mu) = V_2(\mu) - \rho\times n$ матрица, составленная из ρ первых строк унимодулярной матрицы $\widehat{U}^{-1}(\mu)$; $U(\mu)$ есть $m\times\rho$ матрица, составленная из ρ первых столбцов унимодулярной матрицы, реализующей ∇V-2 факторизацию матрицы $\Delta^T(\lambda,\mu)$; $T(\lambda,\mu) = \nabla_1^T(\lambda,\mu)$ есть регулярная двухпараметрическая матрица, спектр которой, по свойствам ∇V-2 факторизации, совпадает с регулярным спектром матрицы $F(\lambda;\mu)$. Из сказанного следует, что соотношение (1.10) есть UTV-2 факторизация матрицы $F(\lambda;\mu)$.

§2. Применение ΔU-2 метода к матрицам общего вида

Рассмотрим применение ΔU-2 метода к решению спектральных задач для двухпараметрических полиномиальных $m \times n$ матриц $F(\lambda; \mu)$ ранга $\rho < n$, удовлетворяющих условию

$$N_c[F] \backslash \mathcal{H}_c[F] \neq \varnothing. \tag{β}$$

С этой целью выполняются следующие операции.

(1) Формируется матрица $F_1(\mu) = [C_s(\mu), \dots, C_0(\mu)]$.

(2) Вычисляется ΔW-1 факторизация матрицы $F_1^B(\mu)$:

$$F_1^B(\mu) U(\mu) = [\Delta(\mu), \mathbb{O}],$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $m(s+1) \times (n - \rho_0)$ матрица; $\rho_0 = \operatorname{rank} F_1^B(\mu)$; $U(\mu) = [U_1(\mu), U_0(\mu)]$ – унимодулярная $n \times n$ матрица с блоками $U_1(\mu)$ и $U_0(\mu)$ размеров $n \times \rho_0$ и $n \times (n - \rho_0)$ соответственно.

(3) Выполняется преобразование

$$F(\lambda; \mu) U(\mu) = [\Delta_2(\lambda, \mu), \mathbb{O}]. \tag{2.1}$$

Здесь $\Delta_2(\lambda, \mu) = F(\lambda; \mu) U_1(\mu)$ есть двухпараметрическая полиномиальная $n \times \rho_0$ матрица, регулярный спектр которой совпадает с регулярным спектром матрицы $F(\lambda; \mu)$; $F(\lambda; \mu) U_0(\mu) = \mathbb{O}$. При этом столбцы $n \times (n - \rho_0)$ матрицы $U_0(\mu)$ при $\rho_0 > \rho$ образуют базис пространства $\mathcal{H}_c[F]$, но не пространства $N_c[F]$. Имеет место соотношение

$$N_c[F] \supset \operatorname{span} U_0 = N_c[F_1^B] = \mathcal{H}_c[F].$$

Поскольку матрица $U_0(\mu)$ не имеет конечного спектра, то сингулярные спектры матриц $F(\lambda; \mu)$ и $\Delta_2(\lambda, \mu)$ совпадают.

Таким образом, применение ΔU-2 алгоритма к матрице $F(\lambda; \mu)$ со свойством (β) сводит решение спектральных задач для $F(\lambda; \mu)$ к решению спектральных задач для матрицы $\Delta_2(\lambda, \mu)$ меньших размеров.

Рассмотрим алгоритм вычисления правого базиса нуль-пространства $N_c[F]$, основанный на применении к $F(\lambda; \mu)$ алгоритма ΔU-2 факторизации. Пусть

$$\Delta_2(\lambda, \mu) W(\lambda, \mu) = [\Delta_3(\lambda, \mu), \mathbb{O}]$$

есть ΔW-2 факторизация [1] матрицы $\Delta_2(\lambda,\mu)$. Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $\rho_0 \times (\rho_0 - \rho)$ матрица; $W(\lambda,\mu) = [W_1(\lambda,\mu),\, W_0(\lambda,\mu)]$ есть $\rho_0 \times \rho_0$ матрица, реализующая ΔW-2 факторизацию матрицы $\Delta_2(\lambda,\mu)$, так что $\operatorname{span} W_0(\lambda,\mu) = N_c[\Delta_2]$. Обозначим через $P(\lambda,\mu)$ матрицу, реализующую факторизацию матрицы $F(\lambda;\mu)$ вида

$$F(\lambda;\mu)\,P(\lambda,\mu) = [\Delta(\lambda,\mu),\, \mathbb{O}]. \tag{2.2}$$

Здесь $P(\lambda,\mu) = U(\mu)\,W^{(1)}(\lambda,\mu)$, где

$$W^{(1)}(\lambda,\mu) := \begin{bmatrix} W(\lambda,\mu) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_{n-\rho_0} \end{bmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} P(\lambda,\mu) &= [U_1(\mu)\,W_1(\lambda,\mu),\, U_1(\mu)\,W_0(\lambda,\mu),\, U_0(\mu)] \\ &\equiv [P_1(\lambda,\mu),\, P_0(\lambda,\mu)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $P_1(\lambda,\mu) := U_1(\mu)\,W_1(\lambda,\mu)$; $P_0(\lambda,\mu) = [U_1(\mu)\,W_0(\lambda,\mu),\, U_0(\mu)]$;

$$\Delta(\lambda,\mu) = F(\lambda;\mu)\,P_1(\lambda,\mu); \quad F(\lambda;\mu)\,P_0(\lambda,\mu) = \mathbb{O}. \tag{2.4}$$

В силу (2.3) и (2.4) и того факта, что $U_1(\mu)$ и $U_0(\mu)$ суть столбцовые подматрицы унимодулярной матрицы, справедливы следующие утверждения.

• Конечный регулярный спектр матрицы $F(\lambda;\mu)$ совпадает с конечным регулярным спектром $n \times \rho$ матрицы $\Delta(\lambda,\mu)$ полного столбцового ранга.

• Правый сингулярный спектр матрицы $F(\lambda;\mu)$ совпадает с левым сингулярным спектром $\rho \times (n-\rho)$ матрицы $W_0(\lambda,\mu)$.

• Столбцы матрицы $P_0(\lambda,\mu)$ образуют базис $N_c[F]$.

Представим матрицу $P_0(\lambda,\mu)$ в блочном виде

$$P_0(\lambda,\mu) = [P_{01}(\lambda,\mu),\, P_{00}(\mu)]. \tag{2.5}$$

Здесь $P_{01}(\lambda,\mu) = U_1(\mu)\,W_0(\lambda,\mu)$, $P_{00}(\mu) = U_0(\mu)$, так что имеет место равенство

$$N_c[F] = \operatorname{span} P_{01} \oplus \operatorname{span} U_0,$$

где $\operatorname{span} U_0 = \mathcal{H}_c[F]$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того, чтобы двухпараметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица $F(\lambda;\mu) = \sum_{k=0}^{s} C_k(\mu)\lambda^k$ ранга $\rho < n$ не имела правого сингулярного спектра, достаточно выполнения любого из условий*

$$N_c[F] = \mathcal{H}_c[F]; \qquad (\alpha)$$

$$\rho_0 = \rho. \qquad (\gamma)$$

Доказательство. При выполнении условия (α) правое нуль-пространство $N_c[F]$ матрицы $F(\lambda;\mu)$ имеет базисную матрицу $U_0(\mu)$. Отсюда, с учетом того, что $U_0(\mu)$ состоит из столбцов унимодулярной матрицы, следует, что правое нуль-пространство $F(\lambda;\mu)$ не имеет конечного спектра, в частности, оно не имеет конечного сингулярного спектра. С учетом сказанного справедливость теоремы при выполнении условия (α) следует из известной [3] связи между сингулярными спектрами матрицы $F(\lambda;\mu)$ и базисной матрицы её нуль-пространства $N_c[F]$.

Докажем справедливость теоремы при выполнении условия (γ). Из (2.3), (2.4) и построения базиса $P_0(\lambda,\mu)$ пространства $N_c[F]$ следует взаимосвязь между условиями (α) и (γ): выполнение условия (α) следует из выполнения условия (γ) и наоборот. Отсюда следует справедливость теоремы.

Теорема 2. *Для существования свободного базиса (когда соответствующая базисная матрица не имеет конечных регулярного и сингулярного спектров) нуль-пространства $N_c[F]$ двухпараметрической полиномиальной матрицы $F(\lambda;\mu)$ достаточно выполнения любого из условий (α) или (γ).*

Доказательство. При выполнении условия (α) из метода ΔU-2 факторизации следует, что $N_c[F]$ имеет базисную матрицу $U_0(\mu)$, составленную из столбцов унимодулярной матрицы, так что матрица $U_0(\mu)$ не имеет конечных регулярного и сингулярного спектров. Справедливость теоремы при выполнении условия (γ) следует из взаимосвязи между условиями (α) и (γ), установленной при доказательстве предыдущей теоремы.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *К решению задач алгебры для двухпараметрических матриц.* 1. — Зап. научн. семин. ПОМИ **359** (2008), 107–149.

2. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Численные методы решения параметрических задач алгебры.* Часть 1. *Однопараметрические задачи.* Наука, С.-Петербург, 2004.
3. В. Б. Хазанов, *О некоторых свойствах полиномиальных базисов подпространств над полем рациональных функций многих переменных.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **284** (2002), 177–191.

Kublanovskaya V. N., Khazanov V. B. To solving problems of algebra for two-parameter matrices. 7.

The paper discusses the rank-factorization method for solving spectral problems for two-parameter polynomial matrices. New forms of rank factorization for matrices free of the singular spectrum are suggested. The algorithms for computing them use unimodular matrices only. The paper suggests conditions sufficient for a matrix to have no singular spectrum and also conditions sufficient for a basis matrix of the null-space to have neither the finite regular, nor the finite singular spectrum.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: verakub@pdmi.ras.ru

Поступило 12 марта 2010 г.

С.-Петербургский государственный
морской технический университет,
Лоцманская ул. 3, 190008
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: khazanovvb@gmail.com