Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 382, 2010 г.

Л. Ю. Колотилина

ТЕОРЕМА ОСТРОВСКОГО О КРУГАХ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НАИМЕНЬШИХ СОБСТВЕННЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

1. Введение

В 1951 А. Островский [7] предложил следующее обобщение теоремы Гершгорина о кругах, содержащих собственные значения.

Теорема 1.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Пусть* $k_1, \dots, k_n$ – *положительные числа, такие что*

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)^{-1} \leqslant 1, \tag{1.1}$$

и пусть положительные числа p *и* q *удовлетворяют условию*

$$p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{1.2}$$

Тогда собственные значения матрицы A *содержатся в объединении*

$$\bigcup_{i=1}^{n} D_i^{(p,q)}(A) \tag{1.3}$$

кругов

$$D_i^{(p,q)}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |a_{ii} - z| \leqslant k_i^{1/q} r_i^{(p)}(A) \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

Здесь и ниже мы используем обозначение

$$r_i^{(p)}(A) = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.5}$$

Ключевые слова: теорема о кругах, нижняя оценка, наименьшее по модулю собственное значение, младшее сингулярное значение, диагональное преобладание, невырожденность.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00318-а.

Ясно, что если $p = 1$ и $q = \infty$, то круги (1.4) – это круги Гершгорина, а если $q = 1$ и $p = \infty$, то круги (1.4) принимают вид

$$D_i^{(\infty,1)}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C}: \ |a_{ii} - z| \leqslant k_i \max_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.6}$$

Теорема 1.1, описывающая области, содержащие все собственные значения матрицы, стандартным образом переформулируется в виде следующих эквивалентных условий ее невырожденности.

Теорема 1.2. *Если в условиях теоремы* 1.1 *выполнены строгие неравенства*

$$|a_{ii}| > k_i^{1/q} r_i^{(p)}(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.7}$$

то матрица A невырождена.

В этой работе нас интересуют случаи $p > 1$, $q < \infty$, т.е. мы не рассматриваем наиболее распространенный случай кругов Гершгорина и не приводим никаких ссылок на соответствующие весьма многочисленные публикации. Напротив, отдельное внимание уделяется случаю $q = 1$, $p = \infty$, в известной мере противоположному гершгоринскому. Целью данной статьи является вывод нижних оценок для наименьшего по модулю собственного значения и наименьшего сингулярного значения квадратной матрицы при выполнении соответствующих условий диагонального преобладания типа (1.7).

Статья построена следующим образом. В разделе 2 выводятся некоторые общие результаты. Во-первых, мы уточняем теорему Островского 1.1, переходя от условия (1.1) к условию

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)^{-1} \leqslant \alpha^{-1}, \quad \alpha \geqslant 1, \tag{1.8}$$

которое является более информативным, если только $\alpha \neq 1$. Во-вторых, для матрицы A, удовлетворяющей условиям строгого диагонального преобладания (1.7), которая невырождена в силу теоремы 1.2, мы выводим некоторые нижние оценки для $\min_i |\lambda_i(A)|$ и для $\min_i \sigma_i(A)$, где $\lambda_i(A)$ и $\sigma_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, – это собственные и сингулярные значения A соответственно. Также мы устанавливаем нижнюю оценку для наименьшего по модулю собственного значения произведения $m \geqslant 2$ квадратных матриц в предположении, что они обладают согласованным диагональным преобладанием. В частности, при $m = 2$ эта оценка является и оценкой наименьшего сингулярного значения квадратной матрицы.

В разделе 3 общие результаты из раздела 2 переформулируются для частного случая $q = 1$, $p = \infty$ и сравниваются с известными результатами.

В статье используются следующие обозначения.

• Для $n \in \mathbb{N}$ мы полагаем

$$\langle n \rangle = \{1, \ldots, n\}.$$

• I_n – единичная матрица порядка $n \geqslant 1$.

• $H_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$, – множество $n \times n$ эрмитовых матриц.

• Собственные значения матрицы $A \in H_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$, упорядочены в порядке невозрастания, т.е.

$$\lambda_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A).$$

• Сингулярные значения $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, также упорядочены в порядке невозрастания, т.е.

$$\sigma_1(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n(A).$$

• Если $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, то

$$\rho(A) = \max_{i \in \langle n \rangle} |\lambda_i(A)|$$

– спектральный радиус A. В частности, если матрица A неотрицательна, то $\rho(A)$ – это перроновский корень A.

• Для $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$, ее матрица сравнения $\mathcal{M}(A) = (m_{ij})$ определяется соотношениями

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

• Для $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 1$,

$$H(A) = (A + A^*)/2$$

– это эрмитова часть A.

2. Общие результаты

2.1. Следующая теорема является уточненной версией теоремы 1.1.

Теорема 2.1. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$. *Пусть* $k_1, \ldots, k_n$ – *положительные числа, такие что*

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)^{-1} \leqslant \alpha^{-1}, \quad \text{где} \quad \alpha \geqslant 1, \tag{2.1}$$

и пусть положительные числа p *и* q *удовлетворяют условию*

$$p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Тогда собственные значения матрицы A *содержатся в объединении*

$$\bigcup_{i=1}^{n} D_i^{(p,q)}(\alpha, A) \tag{2.2}$$

кругов

$$D_i^{(p,q)}(\alpha, A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |a_{ii} - z| \leqslant \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha} \right)^{1/q} r_i^{(p)}(A) \right\}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Доказательство. Как легко видеть, неравенство (2.1) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i' + 1)^{-1} \leqslant 1, \tag{2.4}$$

где

$$k_i' = (k_i - \alpha + 1)/\alpha, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Доказательство завершается применением теоремы 1.1 с заменой k_i на k_i'. □

Замечание 2.1. В том случае, когда $\alpha = 1$, теорема 2.1 сводится к теореме 1.1.

Замечание 2.2. Соотношения (2.5) показывают, что при $\alpha > 1$ радиусы R_i' кругов (2.3) строго меньше, чем радиусы R_i кругов (1.3), и при этом

$$R_i'/R_i = (k_i'/k_i)^{1/q} = \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha k_i} \right)^{1/q} < \alpha^{-1/q}.$$

Очевидно, теорема 2.1 эквивалентна следующей теореме невырожденности, усиливающей теорему 1.2.

Теорема 2.2. *Если в условиях теоремы* 2.1

$$|a_{ii}| > \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(A), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.6}$$

то матрица A невырождена.

2.2. В этом разделе выводятся нижние оценки для $\lambda_n(\mathcal{M}(A))$ и для $\min_i |\lambda_i(A)|$. Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$\lambda_n(\mathcal{M}(A)) \leqslant \min_{i\in\langle n\rangle} |a_{ii}|. \tag{2.7}$$

Доказательство. Представим матрицу сравнения в виде

$$\mathcal{M}(A) = \xi I_n - P, \quad \text{где} \quad \xi = \max_{i\in\langle n\rangle} |a_{ii}|.$$

Тогда, очевидно, матрица P неотрицательна, и, по свойству монотонности перроновского корня относительно главных подматриц, см., например, [1, Chap. 2, Corollary 1.6], мы имеем:

$$\lambda_1(P) = \rho(P) \geqslant \max_{i\in\langle n\rangle} p_{ii} = \xi - \min_{i\in\langle n\rangle} |a_{ii}|.$$

Следовательно,

$$\lambda_n(\mathcal{M}(A)) = \xi - \rho(P) \leqslant \min_{i\in\langle n\rangle} |a_{ii}|.$$

□

Предположим, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеет строгое диагональное преобладание в смысле теоремы 2.2. Тогда этим же свойством обладает и любая матрица, эквимодулярная A, в частности, матрица сравнения $\mathcal{M}(A)$. Применяя теорему 2.1 к $\mathcal{M}(A)$, мы заключаем, что при некотором $i \in \langle n\rangle$,

$$\left||a_{ii}| - \lambda_n(\mathcal{M}(A))\right| \leqslant \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(A).$$

С другой стороны, ввиду леммы 2.1, мы имеем

$$\left||a_{ii}| - \lambda_n(\mathcal{M}(A))\right| = |a_{ii}| - \lambda_n(\mathcal{M}(A)).$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\lambda_n(\mathcal{M}(A)) \geqslant |a_{ii}| - \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(A).$$

Тем самым нами установлен следующий результат, вытекающий из теоремы 2.1.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы* 2.2 *имеет место оценка*

$$\lambda_n(\mathcal{M}(A)) \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ |a_{ii}| - \left(\frac{k_i-\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(A) \right\} > 0, \tag{2.8}$$

так что $\mathcal{M}(A)$ *является невырожденной* M*-матрицей, а* A *– невырожденной* H*-матрицей.*

Заметим теперь, что если вместо (2.6) выполнены условия

$$|a_{ii}| > k_i^{1/q}\xi_i, \quad \text{где} \quad \xi_i \geqslant r_i^{(p)}(A), \quad i=1,\dots,n, \tag{2.9}$$

более сильные, чем условия Островского (1.7), а k_i удовлетворяют (2.1), то, по теореме 1.1, матрица $\mathcal{M}(A)$ невырождена, а из (2.8) и (2.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} \lambda_n(\mathcal{M}(A)) &> \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ |a_{ii}| \left[1 - \left(\frac{k_i-\alpha+1}{\alpha k_i}\right)^{1/q} \right] \right\} \\ &\geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ \xi_i \left[k_i^{1/q} - \left(\frac{k_i-\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/q} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Итак, мы доказали следующий результат.

Следствие 2.2. *Если матрица* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, *удовлетворяет условиям* (2.9), *а положительные числа* k_i, $i=1,\dots,n$, *удовлетворяют условию* (2.1), *то справедливы нижние оценки* (2.10).

Ввиду следующей леммы, любая нижняя оценка для $\lambda_n(\mathcal{M}(A))$ одновременно является и нижней оценкой для $\min_{i\in\langle n\rangle}|\lambda_i(A)|$ для H-матрицы A, т.е. она может использоваться для отделения собственных значений A от нуля.

Лемма 2.2. *Пусть* $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 1$, *и пусть* $\mathcal{M}(A)$ *является невырожденной* M*-матрицей. Тогда*

$$\min_{i\in\langle n\rangle} |\lambda_i(A)| \geqslant \lambda_n(\mathcal{M}(A)). \tag{2.11}$$

Доказательство. В силу хорошо известной теоремы Островского [6] (также см., например, [2, p. 131]), справедливо неравенство

$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}^{-1}(A),$$

понимаемое покомпонентно. Следовательно, по лемме Виландта (см., например, [5, Chap. II, Theorem 2.1]),

$$\left(\min_{i\in\langle n\rangle}|\lambda_i(A)|\right)^{-1}=\max_{i\in\langle n\rangle}|\lambda_i(A^{-1})|\leqslant\rho\left(\mathcal{M}^{-1}(A)\right)=\lambda_n^{-1}(\mathcal{M}(A)),$$

откуда и следует (2.11). □

Ввиду леммы 2.2, из следствий 2.1 и 2.2 немедленно вытекают следующие оценки для наименьшего по модулю собственного значения матрицы со строгим диагональным преобладанием.

Теорема 2.3. *Пусть* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$, *и пусть положительные числа* k_i, $i=1,\dots,n$, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{i=1}^{n}(k_i+1)^{-1}\leqslant\alpha^{-1},\quad \text{где}\quad \alpha\geqslant 1. \tag{2.12}$$

Пусть $p,q\geqslant 1$ *и* $p^{-1}+q^{-1}=1$. *Если*

$$|a_{ii}|>\left(\frac{k_i-\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/q}r_i^{(p)}(A),\quad i=1,\dots,n, \tag{2.13}$$

то

$$\min_{i\in\langle n\rangle}|\lambda_i(A)|\geqslant\min_{i\in\langle n\rangle}\left\{|a_{ii}|-\left(\frac{k_i-\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/q}r_i^{(p)}(A)\right\}>0. \tag{2.14}$$

Кроме того, если

$$|a_{ii}|>k_i^{1/q}\xi_i,\quad \text{где}\quad \xi_i\geqslant r_i^{(p)}(A),\quad i=1,\dots,n, \tag{2.15}$$

то

$$\begin{aligned}\min_{i\in\langle n\rangle}|\lambda_i(A)|&>\min_{i\in\langle n\rangle}\left\{|a_{ii}|\left[1-\left(\frac{k_i-\alpha+1}{\alpha k_i}\right)^{1/q}\right]\right\}\\&\geqslant\min_{i\in\langle n\rangle}\left\{\xi_i\left[k_i^{1/q}-\left(\frac{k_i-\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/q}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Заметим, что в гершгоринском случае ($q=\infty$) оценка (2.14) – это в точности оценка Гершгорина, а оценка (2.16) принимает вид $\min_{i\in\langle n\rangle}|\lambda_i(A)|>0$, что означает всего лишь невырожденность A.

2.3. В этом подразделе предыдущие результаты используются для вывода нижних оценок минимального сингулярного значения квадратной матрицы. Нам понадобятся следующие вспомогательные результаты.

Лемма 2.3. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Если* $\mathcal{M}(A)$ *– невырожденная* M*-матрица, то*

$$\sigma_n(A) \geqslant \sigma_n(\mathcal{M}(A)). \tag{2.17}$$

Доказательство. Действительно, в силу уже упоминавшейся теоремы Островского, мы имеем

$$|A^{-1}| \leqslant \mathcal{M}^{-1}(A).$$

Отсюда следует покомпонентное неравенство

$$\left|\begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ A^{-*} & 0 \end{bmatrix}\right| \leqslant \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}^{-1}(A) \\ \mathcal{M}^{-*}(A) & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Ввиду леммы Виландта, из (2.18) вытекает, что

$$\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ A^{-*} & 0 \end{bmatrix}\right) \leqslant \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{M}^{-1}(A) \\ \mathcal{M}^{-*}(A) & 0 \end{bmatrix}\right). \tag{2.19}$$

Наконец, поскольку, как хорошо известно (см., например, [2, pp. 161–162]), для любой матрицы $B \in \mathbb{C}^{r\times s}$, $r, s \geqslant 1$, справедливо соотношение

$$\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix}\right) = \sigma_1(B),$$

то (2.19) можно записать в виде неравенства

$$\sigma_1(A^{-1}) \leqslant \sigma_1(\mathcal{M}^{-1}(A)),$$

равносильного неравенству (2.17). □

Замечание 2.3. Неравенство (2.17) есть специальный случай более общего блочного неравенства (см. [9])

$$\sigma_n(A) \geqslant \sigma_n(\mathcal{M}_b(A)),$$

где

$$\mathcal{M}_b(A) = (m_{ij}), \quad m_{ij} = \begin{cases} \|A_{ii}^{-1}\|^{-1}, & i = j, \\ -\|A_{ij}\|, & i \neq j, \end{cases}$$

– блочная матрица сравнения для A. Доказательство леммы 2.3 приводится для полноты изложения и легко обобщается на блочный случай. При этом вместо леммы Виландта нужно воспользоваться ее блочным аналогом (см., например, [8]).

Лемма 2.4 (см., например, [2, Corollary 3.1.5]). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$\sigma_n(A) \geqslant \lambda_n(H(A)). \tag{2.20}$$

Ввиду лемм 2.3 и 2.4, мы имеем

$$\sigma_n(A) \geqslant \sigma_n(\mathcal{M}(A)) \geqslant \lambda_n(H(\mathcal{M}(A))). \tag{2.21}$$

Применяя следствия 2.1 и 2.2 к матрице $H(\mathcal{M}(A))$, мы приходим к следующим нижним оценка для наименьшего сингулярного значения A.

Теорема 2.4. *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, *пусть положительные числа* k_i, $i = 1, \dots, n$, *удовлетворяют условию* (2.12), *и пусть* $p, q \geqslant 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Если*

$$|a_{ii}| > \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(H(\mathcal{M}(A))), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.22}$$

то

$$\sigma_n(A) \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ |a_{ii}| - \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(H(\mathcal{M}(A))) \right\} > 0. \tag{2.23}$$

Кроме того, если

$$|a_{ii}| > k_i^{1/q}\xi_i, \quad \text{где} \quad \xi_i \geqslant r_i^{(p)}(H(\mathcal{M}(A))), \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.24}$$

то

$$\begin{aligned} \sigma_n(A) &> \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ |a_{ii}| \left[1 - \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha k_i}\right)^{1/q} \right] \right\} \\ &\geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ \xi_i \left[k_i^{1/q} - \left(\frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha}\right)^{1/q} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Замечание 2.4. Поскольку, по неравенству Минковского (см., например, [4, Part II, Assertion 3.4.1]),

$$\left(\sum_{j\neq i} (|a_{ij}| + |a_{ji}|)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j\neq i} |a_{ji}|^p\right)^{1/p}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то имеют место неравенства

$$r_i^{(p)}(H(\mathcal{M}(A))) \leqslant \frac{r_i^{(p)}(A) + r_i^{(p)}(A^*)}{2}, \quad i = 1, \dots, n,$$

которые полезно иметь в виду в связи с теоремой 2.4.

2.4. В этом разделе предыдущие результаты переносятся на произведение $m \geqslant 2$ квадратных матриц $A_1 = (a_{ij}^{(1)}), \ldots, A_m = (a_{ij}^{(m)}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$, обладающих следующим свойством согласованного диагонального преобладания: для всех $t = 1, \ldots, m$,

$$|a_{ii}^{(t)}| > \left(\frac{k_i^{(t)} - \alpha + 1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(A_t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.26}$$

а положительные числа $k_i^{(t)}$, $i \in \langle n\rangle$, $t \in \langle m\rangle$, удовлетворяют условию

$$\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(k_i^{(t)} + 1\right)^{-1} \leqslant \alpha^{-1}, \quad \alpha \geqslant 1. \tag{2.27}$$

Как и выше, $p, q \geqslant 1$ и

$$p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{2.28}$$

Ясно, что при $m = 1$ условия (2.26)–(2.28) сводятся к условиям теоремы 2.2.

Рассмотрим произведение

$$B = A_1 \cdots A_m.$$

Стоит отметить, что, как хорошо известно, спектр матрицы B не зависит от того, в каком конкретно порядке перемножаются матрицы A_t. Этот факт отражается и в оценке следующей теоремы 2.5.

Теорема 2.5. *Пусть* $A_t = (a_{ij}^{(t)}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t = 1, \ldots, m$, $m, n \geqslant 2$, *и пусть выполнены условия* (2.26)–(2.28). *Тогда*

$$\min_{i\in\langle n\rangle} |\lambda_i(A_1 \cdots A_m)| \geqslant \min_{\substack{i\in\langle n\rangle\\ t\in\langle m\rangle}} \left\{\frac{\alpha^{p/q}|a_{ii}^{(t)}|^p}{\left(k_i^{(t)} - \alpha + 1\right)^{p/q}} - \left[r_i^{(p)}(A_t)\right]^p\right\}^{m/p} > 0. \tag{2.29}$$

Доказательство. Рассмотрим блочную $m \times m$ блочно циклическую матрицу

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{m-1} \\ A_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как хорошо известно, собственные значения произведения $A_1 \cdots A_m$ – это m-ые степени собственных значений $\hat{A}$. Пусть λ есть собственное значение $\hat{A}$. Тогда матрица

$$\hat{A} - \lambda I_{mn} = \begin{bmatrix} -\lambda I_n & A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda I_n & A_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda I_n & A_{m-1} \\ A_m & 0 & \cdots & 0 & -\lambda I_n \end{bmatrix}$$

вырождена, а значит вырождена и матрица

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda I_n \\ -\lambda I_n & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -\lambda I_n & A_{m-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda I_n & A_m \end{bmatrix},$$

которая получается из $\hat{A} - \lambda I_{mn}$ перестановкой ее блочных столбцов.

Ввиду условия (2.27), мы можем применить теорему 2.1 к последней матрице. Таким образом, мы приходим к заключению, что при некоторых $i \in \langle n \rangle$ и $t \in \langle m \rangle$ справедливо неравенство

$$|a_{ii}^{(t)}| \leqslant \left(\frac{k_i^{(t)} - \alpha + 1}{\alpha} \right)^{1/q} \left(\left[r_i^{(p)}(A_t) \right]^p + |\lambda|^p \right)^{1/p}. \tag{2.30}$$

Из неравенств (2.30) и (2.26) следует, что

$$|\lambda|^p \geqslant \frac{|a_{ii}^{(t)}|^p}{\left(\frac{k_i^{(t)} - \alpha + 1}{\alpha} \right)^{p/q}} - \left[r_i^{(p)}(A_t) \right]^p > 0.$$

Тем самым неравенство (2.29) установлено. □

Замечание 2.5. Ясно, что если условия теоремы 2.5 выполнены для матриц $A_1, \ldots, A_m$, то они также выполнены и для их матриц сравнения $\mathcal{M}(A_1), \ldots, \mathcal{M}(A_m)$. Следовательно, в условиях теоремы 2.5 мы имеем

$$\lambda_n(\mathcal{M}(A_1) \cdots \mathcal{M}(A_m)) \geqslant \min_{\substack{i \in \langle n \rangle \\ t \in \langle m \rangle}} \left\{ \frac{\alpha^{p/q} |a_{ii}^{(t)}|^p}{\left(k_i^{(t)} - \alpha + 1 \right)^{p/q}} - \left[r_i^{(p)}(A_t) \right]^p \right\}^{m/p}. \tag{2.31}$$

Ввиду соотношения

$$\min_{i\in\langle n\rangle} |\lambda_i(A_1\cdots A_m)| \geqslant \lambda_n(\mathcal{M}(A_1)\cdots\mathcal{M}(A_m)),$$

которое доказывается аналогично лемме 2.2, оценка (2.31) является более сильной, чем вытекающая из нее оценка (2.29).

В том частном случае, когда $m=2$, $A_1=A$ и $A_2=A^*$, теорема 2.5 дает следующую нижнюю оценку для наименьшего сингулярного значения A, дополняющую оценки теоремы 2.4.

Следствие 2.3. *Пусть* $A=(a_{ij})\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $n\geqslant 2$. *Предположим, что*

$$|a_{ii}| > \left(\frac{r_i-\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(A), \quad i=1,\dots,n, \tag{2.32}$$

и

$$|a_{ii}| > \left(\frac{s_i-\alpha+1}{\alpha}\right)^{1/q} r_i^{(p)}(A^*), \quad i=1,\dots,n, \tag{2.33}$$

где

$$\sum_{i=1}^n (r_i+1)^{-1} + \sum_{i=1}^n (s_i+1)^{-1} \leqslant \alpha^{-1}, \quad \alpha\geqslant 1. \tag{2.34}$$

Тогда

$$\sigma_n(A) \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \min\left\{\frac{\alpha^{p/q}|a_{ii}|^p}{(r_i-\alpha+1)^{p/q}} - [r_i^p(A)]^p, \frac{\alpha^{p/q}|a_{ii}|^p}{(s_i-\alpha+1)^{p/q}} - [r_i^p(A^*)]^p\right\}^{1/p}. \tag{2.35}$$

Как мы убедимся в следующем разделе, следствие 2.3 является обобщением теоремы 2.1 из работы [3] со случая $q=1$ на случай произвольного $q\geqslant 1$ и улучшает ее при $\alpha>1$. Ввиду этого замечания, теорема 2.5 также может рассматриваться как обобщение теоремы 2.1 из [3] на произведения различных $m\geqslant 2$ матриц.

3. Случай $q = 1$, $p = \infty$

В этом разделе мы специфицируем предыдущие результаты для важного частного случая $q = 1$, $p = \infty$, в котором

$$r_i^{(p)}(A) = \max_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

В этом случае теоремы 2.3, 2.4 и 2.5 соответственно сводятся к следующим утверждениям.

Следствие 3.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть положительные числа k_i, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию*

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i + 1)^{-1} \leqslant \alpha^{-1}, \quad \text{где} \quad \alpha \geqslant 1. \tag{3.2}$$

Если

$$|a_{ii}| > \frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha} \max_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.3}$$

то

$$\min_{i \in \langle n \rangle} |\lambda_i(A)| \geqslant \min_{i \in \langle n \rangle} \left\{ |a_{ii}| - \frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha} \max_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} > 0. \tag{3.4}$$

Кроме того, если

$$|a_{ii}| > k_i \xi_i, \quad \text{где} \quad \xi_i \geqslant \max_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.5}$$

то

$$\begin{aligned} \min_{i \in \langle n \rangle} |\lambda_i(A)| &> \frac{\alpha - 1}{\alpha} \min_{i \in \langle n \rangle} \left\{ \frac{k_i + 1}{k_i} |a_{ii}| \right\} \\ &\geqslant \frac{\alpha - 1}{\alpha} \min_{i \in \langle n \rangle} \left\{ (k_i + 1) \xi_i \right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Следствие 3.2. *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $n \geqslant 2$, и пусть положительные числа k_i, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условию* (3.2). *Если*

$$|a_{ii}| > \frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha} \max_{j \neq i} \frac{|a_{ij}| + |a_{ji}|}{2}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.7}$$

то

$$\sigma_n(A) \geqslant \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ |a_{ii}| - \frac{k_i - \alpha + 1}{\alpha} \max_{j\neq i} \frac{|a_{ij}| + |a_{ji}|}{2} \right\} > 0. \tag{3.8}$$

Кроме того, если

$$|a_{ii}| > k_i\xi_i, \quad \text{где} \quad \xi_i \geqslant \max_{j\neq i} \frac{|a_{ij}| + |a_{ji}|}{2}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.9}$$

то

$$\sigma_n(A) > \frac{\alpha - 1}{\alpha} \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ \frac{k_i + 1}{k_i} |a_{ii}| \right\} \geqslant \frac{\alpha - 1}{\alpha} \min_{i\in\langle n\rangle} \left\{ (k_i + 1)\xi_i \right\}. \tag{3.10}$$

Следствие 3.3. *Пусть $A_t = (a_{ij}^{(t)}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t = 1, \dots, m$, $m, n \geqslant 2$, и пусть при всех $t = 1, \dots, m$ имеют место неравенства*

$$|a_{ii}^{(t)}| > \frac{k_i^{(t)} - \alpha + 1}{\alpha} \max_{i\neq j} |a_{ij}^{(t)}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.11}$$

где положительные числа $k_i^{(t)}$, $i \in \langle n\rangle$, $t \in \langle m\rangle$, удовлетворяют условию

$$\sum_{t=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(k_i^{(t)} + 1 \right)^{-1} \leqslant \alpha^{-1}, \quad \alpha \geqslant 1. \tag{3.12}$$

Тогда

$$\min_{i\in\langle n\rangle} |\lambda_i(A_1 \cdots A_m)| \geqslant \min_{\substack{i\in\langle n\rangle \\ t\in\langle m\rangle}} \left\{ \frac{\alpha |a_{ii}^{(t)}|}{k_i^{(t)} - \alpha + 1} \right\}^m \geqslant \min_{\substack{i\in\langle n\rangle \\ t\in\langle m\rangle}} \left\{ \frac{|a_{ii}^{(t)}|}{k_i^{(t)}} \right\}^m. \tag{3.13}$$

В частности, если $m = 2$, $A_1 = A$, $A_2 = A^*$ и выполнены условия

$$|a_{ii}| > \frac{r_i - \alpha + 1}{\alpha} \max_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.14}$$

и

$$|a_{ii}| > \frac{s_i - \alpha + 1}{\alpha} \max_{j\neq i} |a_{ji}|, \quad i = 1, \dots, n, \tag{3.15}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}(r_i+1)^{-1}+\sum_{i=1}^{n}(s_i+1)^{-1}\leqslant\alpha^{-1},\quad \alpha\geqslant 1, \tag{3.16}$$

то (3.13) дает оценку наименьшего сингулярного значения

$$\sigma_n(A)\geqslant\alpha\min_{i\in\langle n\rangle}\left\{\frac{|a_{ii}|}{\max\{r_i,s_i\}-\alpha+1}\right\}. \tag{3.17}$$

Поскольку при $\alpha\geqslant 1$ мы имеем

$$\frac{r_i-\alpha+1}{\alpha}\leqslant r_i \quad \text{и} \quad \frac{s_i-\alpha+1}{\alpha}\leqslant s_i,$$

причем эти неравенства являются строгими, если $\alpha>1$, то оценка (3.17) всегда не хуже, чем оценка

$$\sigma_n(A)>\min_{i\in\langle n\rangle}\frac{|a_{ii}|}{\max\{r_i,s_i\}}, \tag{3.18}$$

предложенная в теореме 2.1 из работы [3], и улучшает последнюю при $\alpha>1$.

Наконец, заметим, что, в силу (3.2),

$$\frac{k_i+1}{\alpha}>1,\quad i=1,\dots,n. \tag{3.19}$$

Следовательно, если в следствии 3.1 выполнены условия (3.5), то, по (3.6) и (3.19), мы имеем

$$\min_{i\in\langle n\rangle}|\lambda_i(A)|>(\alpha-1)\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|/k_i\}. \tag{3.20}$$

Аналогично, если в следствии 3.2 выполнены условия (3.9), то

$$\sigma_n(A)>(\alpha-1)\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|/k_i\}. \tag{3.21}$$

В частности, если $\xi_i=\max_{j\neq i}\max\{|a_{ij}|,|a_{ji}|\}$ и $\alpha\geqslant 2$, то из (3.21) вытекает оценка

$$\sigma_n(A)>\min_{i\in\langle n\rangle}\{|a_{ii}|/k_i\}, \tag{3.22}$$

которая была установлена в следствии 2.1 из статьи [3].

Литература

1. A. Berman, R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences.* Academic Press, New York etc., 1979.
2. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1991.
3. Hou-Biao Li, Ting-Zhu Huang, Xing-Ping Liu, Hong Li, Singularity, Wielandt's lemma and singular values. — *J. Comput. Appl. Math.* **234** (2010), 2943–2952.
4. M. Marcus, H. Minc, *Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1964.
5. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* John Wiley and Sons, New York etc., 1988.
6. A. M. Ostrowski, *Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale.* — Comment. Math. Helv. **10** (1937), 69–96.
7. A. M. Ostrowski, *Sur les conditions générales pour la régularité des matrices.* — Rend. Mat. e Appl. (5) **10** (1951), 156–168.
8. A. M. Ostrowski, *On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks.* — J. Math. Anal. **2** (1961), 161–209.
9. C. L. Wang, S. J. Zhang, *The block lower bounds for the smallest singular value.* — Int. J. Comput. Math. **82** (2005), 313–319.

Kolotilina L. Yu. On Ostrowski's disk theorem and lower bounds for the smallest eigenvalues and singular values.

The paper refines the classical Ostrowski disk theorem and suggests lower bounds for the smallest-in-modulus eigenvalue and the smallest singular value of a square matrix under certain diagonal dominance conditions. A lower bound for the smallest-in-modulus eigenvalue of a product of $m \geqslant 2$ matrices satisfying joint diagonal dominance conditions is obtained. The particular cases of the bounds suggested that correspond to the infinity norm are discussed and compared with some known results.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: liko@pdmi.ras.ru

Поступило 3 ноября 2010 г.